This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, ирииадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.
- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице http://books.google.com/

Gift of

Joseph J. Smortchevsky

LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

A.Domogarov

FUNDAMENTALS OF MECHANICS

This binder contains 4 volumes:
1. Introduction (and Supplement)
2. Kinetics
3. Statics
4. Dynamics

1897-1900

Russian

В. I. Введеніе 1-48
Дополненіе къ §1 Введенія 1-34
В. II. Кинематика 1-208
В. III. Статика 1-164
В. IV. Динамика 1-241

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

ОСНОВЫ
МЕХАНИКИ

СОСТАВИЛЪ
Ар. Домогаровъ
(магистръ прикладной [illegible])

Выпускъ [illegible]

ВВЕ[illegible]

From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

Печатано по распоряженію Института инженеровъ путей сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

СТР.

§ 1. Два пріема пользованія безконечно-малыми величинами и относящійся къ нимъ основной принципъ 5

§ 2. Векторы и моменты векторовъ 15

A. Векторы 15

B. Моменты векторовъ 28

C. Пара векторовъ и ея моментъ 35

D. Аналитическія выраженія моментовъ векторовъ . . 39

§ 3. Три основныя величины 42

§ 4. Предметъ и раздѣленіе механики 47

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Два пріема пользованія безконечно-малыми величинами и относящійся къ нимъ основной принципъ.

При опредѣленіи многихъ понятій механики приходится пользоваться понятіемъ о безконечно-малыхъ величинахъ. Прежде чѣмъ приступить къ уясненію пріемовъ пользованія безконечно-малыми величинами припомнимъ извѣстныя опредѣленія.

Безконечно-малою величиною *называется такая* **перемѣнная** *величина, абсолютное значеніе которой при ея измѣненіи можетъ быть сдѣлано менѣе какой угодно малой величины.*

Предѣлъ перемѣнной величины. Если нѣкоторая перемѣнная величина A при своемъ измѣненіи такъ приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ a, что абсолютная величина разности $(A-a)$ есть безконечно-малая величина, то говорятъ, что постоянная величина a есть предѣлъ перемѣнной величины A и выражаютъ это обстоятельство равенствами:

$$\text{пред. } A = a \text{ или } lim.\, A = a,$$

или же наконецъ равенствомъ безъ знака предѣла

$$A = a + \alpha,$$

гдѣ подъ α подразумѣвается безконечно-малая величина; причемъ α безразлично можетъ быть $\gtrless 0$.

Введя понятіе о предѣлѣ перемѣнной величины, мы можемъ сказать, что безконечно-малая величина имѣетъ своимъ предѣломъ нуль и обратно: если пред. $\alpha = 0$, то α есть величина безконечно-малая.

Чтобы уяснить теперь основные пріемы пользованія понятіемъ о безконечно-малыхъ величинахъ, мы обратимъ вниманіе на слѣдующіе **два факта**:

а) *Отношеніе или предѣлъ отношенія* $\frac{\beta}{\alpha}$ *двухъ безконечно-малыхъ величинъ можетъ быть* **конечною** *величиною*.

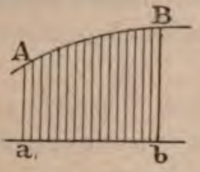
Напримѣръ.

1) Если α есть безконечно-малая величина, то и 2α тоже будетъ величиною безконечно-малою, отношеніе же $\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$.

2) При безпредѣльномъ приближеніи перемѣнной величины x къ ея предѣлу a разности $(x - a)$ и $(x^2 - a^2)$ будутъ безконечно-малы, предѣлъ же ихъ отношенія, т. е.

$$\text{пред.} \left(\frac{x^2 - a^2}{x - a}\right)_{x=a} = \text{пред.} \, (x + a)_{x=a} = 2a.$$

b) *Предѣлъ суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ можетъ быть* **конечною** *величиною*.



Черт. 1.

Примѣръ. Разбивъ основаніе ab (черт. 1) площади $a\widehat{AB}b$ на n равныхъ частей и проведя черезъ каждое дѣленіе линіи параллельныя aA, мы видимъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи n площадь $a\widehat{AB}b$ разобьется на безконечно-большое число безконечно-малыхъ площадокъ, сумма которыхъ составитъ площадь $a\widehat{AB}b$.

На указанныхъ двухъ фактахъ основаны **два пріема** *пользованія безконечно-малыми величинами*:

а) **первый пріемъ** *состоитъ въ томъ, что на нѣкоторыя конечныя величины, на основаніи перваго изъ указанныхъ фактовъ, можно смотрѣть какъ на предѣлы отношенія двухъ безконечно-малыхъ величинъ*, и дѣйствительно, многія геометрическія, механическія и другія понятія, какъ мы увидимъ, опредѣляются какъ предѣлы отношенія двухъ безконечно-малыхъ величинъ;

b) **второй пріемъ** *основанъ на томъ, что всякая конечная величина, будучи разбита на безконечно-малые элементы, можетъ быть разсматриваема какъ предѣлъ суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ*.

Безконечно-малыя величины различныхъ порядковъ. Мы замѣтили, что предѣлъ отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$ двухъ безконечно-малыхъ величинъ можетъ быть конечною величиною, но, вообще говоря, при отысканіи такихъ предѣловъ могутъ представиться *три отдѣльныхъ случая*:

1) пред. $\frac{\beta}{\alpha}$ = кон. вел.; 2) пред. $\frac{\beta}{\alpha} = 0$; 3) пред. $\frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

Напримѣръ:

$$\text{при } \beta = 3\alpha \quad \text{пред. } \frac{\beta}{\alpha} = 3,$$

$$\text{при } \beta = \alpha^2 \quad \text{пред. } \frac{\beta}{\alpha} = \text{пред. } \alpha = 0,$$

$$\text{при } \beta = \sqrt{\alpha} \quad \text{пред. } \frac{\beta}{\alpha} = \text{пред. } \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \infty.$$

Въ первомъ случаѣ безконечно-малыя величины β и α называютъ «безконечно-малыми величинами **одного и того же порядка малости**»; во второмъ случаѣ β называется безконечно-малою величиною **высшаго порядка** относительно α, и наконецъ въ третьемъ—β называютъ безконечно-малою величиною **низшаго порядка** относительно α.

Такъ произведеніе $\varepsilon\alpha$ двухъ безконечно-малыхъ величинъ есть безконечно-малая величина высшаго порядка относительно той и другой, ибо пред. $\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\alpha}\right) = \varepsilon = 0$ и пред. $\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon}\right)$ = пред. $\alpha = 0$.

Порядокъ малости безконечно-малой величины β по отношенію къ α выражаютъ еще нѣкоторымъ числомъ, такъ если

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\alpha^n} = \text{кон. вел.},$$

то говорятъ, что β *есть безконечно-малая величина n-го порядка относительно* α.

Эквивалентныя *безконечно-малыя величины.* Между безконечно-малыми величинами одного и того же порядка особое значеніе представляетъ тотъ случай, когда

$$\text{пред. } \frac{\beta}{\alpha} = 1;$$

такія безконечно-малыя величины β и α мы будемъ называть **эквивалентными**; но, если пред. $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, то:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon \text{ или } \beta = \alpha + \varepsilon\alpha,$$

т. е. *двѣ эквивалетныя безконечно-малыя величины отличаются другъ отъ друга на безконечно-малыя величины высшихъ порядковъ.* Обратно, *если разность* $(\beta - \alpha)$ *двухъ безконечно-малыхъ величинъ есть безконечно-малая величина высшаго порядка относительно* α, *то* β *и* α *эквивалентны.*

Напримѣръ, безконечно-малыя величины

$$\alpha,\ (\alpha + 3\alpha^2),\ (\alpha + \alpha^2 - 4\alpha^3) \text{ эквивалентны.}$$

Мы уже замѣтили, что два пріема пользованія безконечно-малыми величинами сводятся или къ отысканію предѣла отношенія двухъ безконечно-малыхъ величинъ, или къ отысканію предѣла суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ; но непосредственное нахожденіе такихъ предѣловъ бываетъ иногда слишкомъ сложно, если не воспользоваться однимъ основнымъ принципомъ одинаково приложимымъ къ обоимъ пріемамъ.

Основной принципъ. *При отысканіи предѣла отношенія двухъ безконечно-малыхъ величинъ* α_1, α_2.

т. е. $$\text{пред. } \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

или предѣла суммы

$$\text{пред. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)_{n=\infty}$$

безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ можно, не измѣняя этихъ предѣловъ, подставить вмѣсто данныхъ безконечно-малыхъ величинъ α_1, α_2, α_3 .... *другія безконечно-малыя величины* β_1, β_2, β_3 ...., *если только эти послѣднія будутъ соотвѣтственно эквивалентны первымъ,*

т. е. $$\text{пред. } \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \quad \text{пред. } \frac{\beta_2}{\beta_2} = 1 \text{ и т. д.}$$

или $$\beta_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1\alpha_1, \ \beta_2 = \alpha_2 + \varepsilon_2\alpha_2 \text{ и т. д.}$$

и если кромѣ того извѣстно, что въ первомъ случаѣ пред. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, *а во второмъ* пред. $[(\alpha_1)+(\alpha_2)+\ldots]$, *т. е. предѣлъ суммы абсолютныхъ значеній безконечно-малыхъ величинъ* α_1, α_2, ... *будутъ конечными величинами.*

Доказательство.

a) Положимъ, что

$$\text{пред. } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = K.$$

гдѣ K есть нѣкоторая конечная величина, и безконечно-малыя величины β_1, β_2 соотвѣтственно эквивалентны безконечно-малымъ величинамъ α_1, α_2, т. е.

$$\beta_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1\alpha_1 \text{ и } \beta_2 = \alpha_2 + \varepsilon_2\alpha_2;$$

въ такомъ случаѣ

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1+\varepsilon_1\alpha_1}{\alpha_2+\varepsilon_2\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}\right),$$

но

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = K + \alpha \text{ и } \frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} = 1+\varepsilon,$$

гдѣ α и $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$, суть нѣкоторыя безконечно-малыя величины, слѣдовательно

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = (K+\alpha)\,(1+\varepsilon) = K+\beta,$$

гдѣ $\beta = \alpha + K\varepsilon + \varepsilon\alpha$ есть нѣкоторая новая безконечно-малая величина, и потому

$$\text{пред. } \frac{\beta_1}{\beta_2} = K = \text{пред. } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ ч. т. д.}$$

b) Положимъ, что

$$\text{пред. } (\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_n)_{n=\infty} = a,$$

и безконечно-малыя величины β_1, β_2 .... β_n соотвѣтственно эквивалентны безконечно-малымъ величинамъ α_1, α_2 .... α_n т. е.

$$\beta_1 = \alpha_1+\varepsilon_1\alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2+\varepsilon_2\alpha_2,\ \ldots.\ \beta_n = \alpha_n+\varepsilon_n\alpha_n;$$

въ такомъ случаѣ, при безпредѣльно увеличивающемся числѣ n, сумма $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$ отличается отъ своего предѣла a на безконечно-малую величину α, т. е.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = a + \alpha$$

и

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + (\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n \alpha_n) =$$
$$= (a + \alpha) + (\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n \alpha_n).$$

Обозначивъ черезъ (ε) наибольшее изъ абсолютныхъ значеній безконечно-малыхъ величинъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, а черезъ $(\alpha_1), (\alpha_2) \ldots (\alpha_n)$— абсолютныя значенія величинъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, мы приходимъ къ очевидному заключенію, что

$$\text{абс. зн.}\ (\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n \alpha_n) \leqq (\varepsilon) [(\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n)];$$

если теперь

$$\text{пред.}\ [(\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n)]_{n=\infty} = K,$$

гдѣ K есть нѣкоторая конечная величина, то, пользуясь произвольною малостью величины (ε), при достаточно большомъ n, мы можемъ сдѣлать

$$\text{абс. зн.}\ (\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n \alpha_n),$$

менѣе какой угодно малой величины, т. е.

$$\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n \alpha_n = \gamma,$$

гдѣ γ есть нѣкоторая безконечно-малая величина, и потому

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = (a + \alpha) + \gamma = a + \beta,$$

причемъ величина $\beta = \alpha + \gamma$ безконечно-мала; слѣдовательно

$$\text{пред.}\ (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)_{n=\infty} = a = \text{пред.}\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)_{n=\infty}.$$

Итакъ *если* пред. $[(\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n)]_{n=\infty} = K$ *т. е. предѣлъ суммы абсолютныхъ значеній безконечно-малыхъ величинъ* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *равенъ конечной величинѣ и безконечно-малыя величины* β_1, β_2, *соотвѣтственно имъ эквивалентны, то*

$$\text{пред.}\ (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)_{n=\infty} = \text{пред.}\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)_{n=\infty} \quad \text{ч. т. д.}$$

Съ точки зрѣнія именно этого **основного принципа** и введено понятіе объ *эквивалентныхъ* безконечно-малыхъ величинахъ; причемъ мы видимъ, что **эквивалентность** въ двухъ пріемахъ пользованія безконечно-малыми величинами играетъ ту же роль, что **равенство** въ конечныхъ величинахъ, такъ какъ въ указанныхъ пріемахъ вмѣсто данныхъ безконечно-малыхъ величинъ можно подставлять величины имъ эквивалентныя.

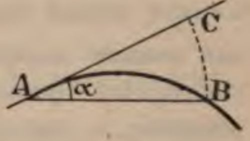
Примѣры *эквивалентныхъ безконечно-малыхъ величинъ.*

1) *Безконечно-малая дуга $\widehat{AB}$ плоской кривой эквивалентна-стягивающей ее хордѣ $\overline{AB}$.*

Описавъ изъ точки A (черт. 2) радіусомъ $\overline{AB}$ дугу окружности $\widehat{BC}$ до пересѣченія съ касательной AC проведенной въ дугѣ $\widehat{AB}$ въ точкѣ A *), мы приходимъ къ очевиднымъ неравенствамъ:

$$\overline{AC} + \widehat{CB} > \widehat{AB} > \overline{AB};$$

раздѣливъ теперь всѣ члены этихъ неравенствъ на хорду AB и замѣтивъ, что по построенію $AC = AB$, мы получимъ



Черт. 2.

$$1 + \frac{\widehat{CB}}{AB} > \frac{\widehat{AB}}{AB} > 1,$$

но отношеніе $\dfrac{\widehat{CB}}{AB}$ равно α, гдѣ α естѣ безконечно-малое отвлеченное число, выражающее уголъ BAC **), слѣдовательно

$$1 + \alpha > \frac{\widehat{AB}}{AB} > 1, \text{ т. е. пред. } \frac{\widehat{AB}}{AB} = 1, \text{ ч. т. д.}$$

---

*) Касательною BC, проведенной къ дугѣ AB въ точкѣ A (черт. 2) называется **предѣльное** *положеніе сѣкущей* AB, проходящей черезъ данную точку A, когда вторая точка пересѣченія B стремится совмѣститься съ точкою A.

**) Отношеніе $\dfrac{\widehat{CB}}{AB}$ не зависитъ отъ величины радіуса AB, ибо во сколько разъ увеличится радіусъ AB, во столько же разъ увеличится и дуга $\widehat{CB}$, а потому каждому углу BAC соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное отвлеченное число α; наоборотъ каждому отвлеченному числу α, разсматриваемому какъ отношеніе нѣкоторой дуги окружности $\widehat{BC}$ къ своему радіусу AB, соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный уголъ, число градусовъ котораго n° опредѣляется

2) *$tg\,\alpha$ и $sin\,\alpha$ эквивалентны безконечно-малому углу α, выраженному отвлеченнымъ числомъ.*

Дѣйствительно

$$\text{пред.}\left(\frac{sin\,\alpha}{tg\,\alpha}\right)_{\alpha=0} = \text{пред.}\ (cos\,\alpha)_{\alpha=0} = 1$$

но

$$sin\,\alpha < \alpha < tg\,\alpha;$$

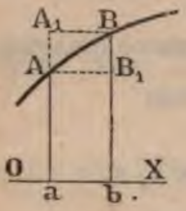
слѣдовательно и подавно

$$\text{пред.}\left(\frac{sin\,\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1 \text{ и пред.}\left(\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1,$$

т. е. безконечно-малыя величины

$$sin\,\alpha,\ tg\,\alpha \text{ и } \alpha \text{ эквивалентны.}$$

3) *Если изъ концовъ безконечно малаго отрѣзка $\widehat{AB}$ нѣкоторой плоской кривой опустить перпендикуляры на ось OX, то полученная такимъ построеніемъ площадка $a\widehat{AB}b$ (черт. 3) эквивалентна площадкамъ прямоугольниковъ $a\overline{AB_1}b$ и $a\overline{A_1B}b$, имѣющимъ тоже основаніе, а высотами соотвѣтственно — меньшій и большій изъ перпендикуляровъ Aa и Bb.*



Черт. 3.

Дѣйствительно, положивъ для краткости

$$\text{пл. } a\widehat{AB}b = \alpha;$$

$$\text{пл. } a\overline{AB_1}b = \alpha_1; \text{ и пл. } a\overline{A_1B}b = \alpha_2,$$

мы приходимъ къ очевиднымъ неравенствамъ:

$$\alpha_2 > \alpha > \alpha_1, \text{ но пред. } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{пред. } \frac{Bb}{Aa} = 1,$$

изъ отношенія $\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{\widehat{BC}}{2\pi.\,AB}$ т. е. $n^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi}\frac{\widehat{BC}}{AB} = \frac{360^\circ}{2\pi}\alpha$. Отношеніе $\frac{360^\circ}{2\pi}$ можетъ быть вычислено съ любою точностью, оно называется **«радіаномъ»** и приближенно равно 57°,17′44″21. Такимъ образомъ *уголъ выраженный отвлеченнымъ числомъ α, содержитъ въ себѣ α* **радіановъ**; наоборотъ; *каждая дуга окружности равна ея радіусу, умноженному на стягиваемый ею уголъ выраженный отвлеченнымъ числомъ.*

слѣдовательно и подавно

$$\text{пред.}\ \frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 \ \text{ и пред.}\ \frac{\alpha_2}{\alpha} = 1,$$

т. е. площадки α_1 и α_2 эквивалентны α.

4) *Если нѣкоторое геометрическое тѣло пересѣчь двумя безконечно близкими параллельными плоскостями, то безконечно малый объемъ тѣла, заключенный между ними, эквивалентенъ входящему и объемлющему прямымъ цилиндрамъ, построеннымъ на двухъ сѣченіяхъ этого тѣла и имѣющимъ общую высоту, равную разстоянію между плоскостями сѣченій.*

Обозначивъ указанный безконечно малый объемъ тѣла черезъ α, а объемы входящаго и объемлющаго цилиндровъ соотвѣтственно черезъ α_1 и α_2, мы имѣемъ очевидныя неравенства

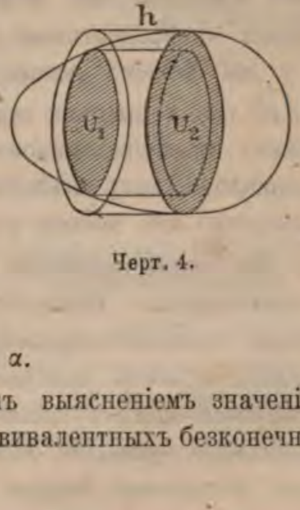
$$\alpha_2 > \alpha > \alpha_1,$$

но

$$\alpha_1 = hu_1 \ \text{ и } \ \alpha_2 = hu_2,$$

гдѣ (черт. 4) h есть безконечно малая высота, а u_1, u_2 суть основанія указанныхъ цилиндровъ, слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{пред.}\ \frac{u_2}{u_1} = 1,$$



Черт. 4.

такъ какъ въ предѣлѣ площади u_1 и u_2 совмѣщаются, если же

$$\text{пред.}\ \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 1,$$

то и подавно

$$\text{пред.}\ \frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 \ \text{ и пред.}\ \frac{\alpha_2}{\alpha} = 1,$$

т. е. объемы α_1 и α_2 эквивалентны объему α.

Заключеніе. Эту статью мы закончимъ выясненіемъ значенія изложеннаго основнаго принципа замѣны эквивалентныхъ безконечно малыхъ величинъ.

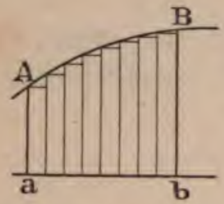
а) Положимъ требуется найти

$$\text{пред.}\ \left(\frac{2\alpha + \sin^2\alpha}{\alpha^2 + tg\,\alpha}\right)_{\alpha=0},$$

т. е. предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ.

Непосредственное вычисленіе этого предѣла довольно затруднительно; пользуясь же послѣдовательно основнымъ принципомъ, мы имѣемъ право отбросить въ числителѣ и знаменателѣ $sin^2 \alpha$ и α^2, какъ безконечно малыя величины высшихъ порядковъ; замѣнивъ затѣмъ въ знаменателѣ $tg\,\alpha$ эквивалентною ему безконечно малою величиною α, найдемъ, что искомый предѣлъ равенъ 2.

b) При вычисленіи площади $a\widehat{AB}b$, ограниченной сверху отрѣзкомъ $\widehat{AB}$ нѣкоторой кривой (черт. 5), а съ остальныхъ сторонъ — тремя взаимно перпендикулярными прямыми, можно представить эту площадь, какъ предѣлъ безконечно большого числа безконечно малыхъ площадокъ, если, разбивъ ея основаніе ab на безконечно малые элементы, провести черезъ всѣ дѣленія линіи параллельныя aA; но каждая изъ такихъ элементарныхъ площадокъ въ свою очередь ограничена сверху нѣкоторою безконечно малою дугою и потому представляетъ тѣ же затрудненія для выраженія ея величины, какъ и сама криволинейная площадь $a\widehat{AB}b$, въ силу же извѣстнаго намъ основного принципа, мы можемъ замѣнить всѣ эти элементарныя площадки эквивалентными имъ безконечно малыми прямоугольниками, т. е. мы можемъ разсматривать искомую криволинейную площадь $a\widehat{AB}b$, какъ предѣлъ суммы безконечно большого числа безконечно узкихъ прямоугольниковъ; причемъ величина каждой изъ такихъ площадокъ, какъ извѣстно изъ элементарной геометріи, равна произведенію изъ высоты на основаніе.



Черт. 5.

Изъ этихъ примѣровъ ясно **значеніе** основного принципа замѣны эквивалентныхъ безконечно малыхъ величинъ, а именно: *если какая-нибудь величина выражена какъ предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ, или какъ предѣлъ суммы безконечно большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ, то при отысканіи этихъ предѣловъ указанный принципъ даетъ возможность подставить вмѣсто данныхъ безконечно малыхъ величинъ, непосредственно явившихся изъ разсматриваемаго вопроса,* **другія, болѣе простыя, облегчающія** *нахожденіе искомыхъ предѣловъ, если только эти новыя безконечно-малыя величины эквивалентны старымъ.*

§ 2. Векторы и моменты векторовъ.

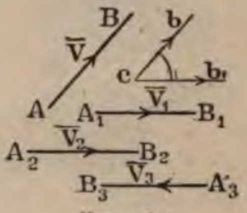
Для нагляднаго представленія многихъ понятій и законовъ механики полезно установить нѣкоторыя предварительныя геометрическія понятія.

А. Векторы.

1) Отрѣзокъ $\overline{AB}$, въ которомъ мы заразъ принимаемъ во вниманіе *не только его величину, но и направленіе*, называется **векторомъ**. Чтобы отличить векторы отъ обыкновенныхъ отрѣзковъ, мы будемъ отмѣчать ихъ направленіе стрѣлками, а при обозначеніи векторовъ буквами будемъ ставить надъ этими послѣдними черточки.

Векторы $\overline{A_1B_1}$ *и* $\overline{A_2B_2}$ (черт. 6) *равные по величинѣ, параллельные и одинаково направленные* называются **геометрически равными** векторами, а равенства:

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \text{ или } \overline{v}_1 = \overline{v}_2$$



Черт. 6.

носятъ названіе **геометрическихъ равенствъ** въ отличіе отъ алгебраическихъ равенствъ, выражающихъ лишь равенство величинъ.

Векторы $\overline{v}_1$, $\overline{v}_3$ (черт. 6) равные по величинѣ, параллельные, но противоположныхъ направленій, считаются векторами различныхъ знаковъ, т. е.

$$\overline{v}_1 = -\overline{v}_3 \text{ и } \overline{v}_3 = -\overline{v}_1;$$

другими словами *отрицательный знакъ поставленный передъ векторомъ измѣняетъ лишь его направленіе на противоположное.*

Угломъ (v, v_1) *между двумя векторами* $\overline{v}$, $\overline{v}_1$ *или ихъ направленіями называется уголъ* bCb_1 (черт. 6) *между направленіями тѣхъ же векторовъ, проведенными черезъ произвольно выбранную точку* C.

2) **Геометрическая сумма.** На понятіе о векторахъ распространяютъ понятіе объ ихъ суммированіи.

Если изъ произвольной точки C *(черт. 7) проведемъ векторъ* $\overline{CC_1} = \overline{v}_1$, *затѣмъ изъ конца* C_1 *этого вектора отложимъ векторъ* $\overline{C_1C_2} = \overline{v}_2$, *изъ конца* C_2 *вновь полученнаго вектора проведемъ век-*

торъ $\overline{C_2C_3} = \overline{v}_3$ *и т. д. вплоть до послѣдняго вектора* $\overline{C_{n-1}C_n} = \overline{v}_n$, *въ такомъ случаѣ векторъ* $\overline{CC_n}$, *идущій изъ начала перваго вектора въ конецъ послѣдняго, называется* **геометрическою суммою** *данныхъ векторовъ* и выражается равенствомъ

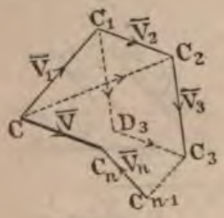
$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \ldots + \overline{v}_n.$$

3) Иногда векторъ $\overline{v}$ равный геометрической суммѣ нѣсколькихъ векторовъ называютъ еще **замыкающею стороною**, а слагаемые векторы **замкнутыми сторонами.**

Свойства *геометрической суммы*:

a) *Геометрическая сумма не зависитъ отъ порядка суммированія.*

Дѣйствительно, отложивъ напр. отъ точки C_1 (черт. 7) сначала векторъ $\overline{C_1D_3} = \overline{v}_3$, а потомъ векторъ $\overline{v}_2$, мы снова придемъ въ ту же точку C_3, ибо векторы $\overline{D_3C_3}$ и $\overline{C_1C_2}$, какъ линіи соединяющія концы двухъ равныхъ и параллельныхъ отрѣзковъ, равны и параллельны, т. е. $\overline{D_3C_3} = \overline{C_1C_2} = \overline{v}_2$. Такимъ образомъ геометрическая сумма не зависитъ отъ перестановки двухъ рядомъ стоящихъ слагаемыхъ векторовъ, но послѣдовательною таковой перестановкою можно придти къ любому порядку суммированія, слѣдовательно геометрическая сумма, подобно алгебраической, нисколько не зависитъ отъ порядка сложенія векторовъ.



Черт. 7.

b) *При отысканіи геометрической суммы можно сначала суммировать отдѣльныя группы векторовъ, а затѣмъ взять геометрическую сумму всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ векторовъ.*

Свойство это непосредственно очевидно для послѣдовательно стоящихъ векторовъ, напр., сложивъ векторы $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ (черт. 7) въ векторъ $\overline{CC_2}$ и прибавивъ къ нему всѣ остальные векторы, мы конечно придемъ къ той же самой геометрической суммѣ, принявъ же во вниманіе возможность перестановки векторовъ при ихъ суммированіи, мы приходимъ къ убѣжденію въ справедливости указаннаго свойства вообще.

c) *Геометрическое равенство* $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n$ *не нарушается, если всѣ члены его помножить на одно и то же число* k, *т. е.*

$$k\overline{v} = k\overline{v}_1 + k\overline{v}_2 + \ldots + k\overline{v}_n.$$

Дѣйствительно, проведя въ геометрической суммѣ (черт. 8) $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_n$ діагональные векторы $\overline{CC}_2, \overline{CC}_3, \ldots \overline{CC}_{n-1}$ и построивъ векторы

$$\overline{CD}_1 = k\overline{CC}_1,\ \ \overline{CD}_2 = k\overline{CC}_2 \text{ и т. д. } \overline{CD}_n = k\overline{CC}_n,$$

мы приходимъ къ геометрической суммѣ

$$\overline{CD}_n = \overline{CD}_1 + \overline{D_1D}_2 + \overline{D_2D}_3 + \ldots + \overline{D_{n-1}D}_n,$$

причемъ очевидно, что замкнутыя фигуры $AC_1C_2 \ldots C_n$ и $AD_1D_2 \ldots D_n$ подобны; слѣдовательно

$$\frac{CD_1}{CC_1} = \frac{D_1D_2}{C_1C_2} = \frac{D_2D_3}{C_2C_3} = \ldots = \frac{CD_n}{CC_n} = k,$$

Черт. 8.

т. е.

$$\overline{CD}_1 = k\bar{v}_1;\ \overline{D_1D}_2 = k\bar{v}_2;\ \ldots\ \overline{CD}_n = k\bar{v}$$

и потому

$$k\bar{v} = k\bar{v}_1 + k\bar{v}_2 + \ldots + k\bar{v}_n.$$

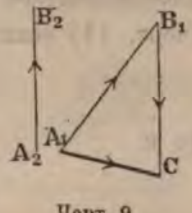
3) **Геометрическою разностью** *двухъ векторовъ*

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2,$$

называется, подобно алгебраической разности, геометрическая сумма

$$\bar{v}_1 + (-\bar{v}_2)$$

«уменьшаемаго» вектора и «вычитаемаго» вектора, взятаго съ обратнымъ знакомъ или вектора по величинѣ равнаго, но противоположно направленнаго «вычитаемому» вектору.



Черт. 9.

Изъ этого опредѣленія ясно, что для построенія геометрической разности $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ надо (черт. 9) изъ конца перваго вектора B_1 отложить векторъ $\overline{B_1C}$, равный, но противоположно направленный второму вектору и провести векторъ идущій изъ начала перваго вектора A_1 въ конецъ послѣдняго вектора C; этотъ векторъ $\overline{A_1C}$ и есть геометрическая разность двухъ данныхъ векторовъ $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$.

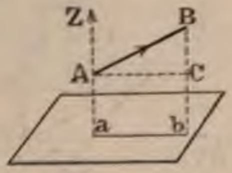
4) **Проекціи точки и вектора на плоскость.**

Проекціей точки A на плоскость P (черт. 10) *называется основаніе а перпендикуляра, опущеннаго изъ точки A на эту плоскость*, которую въ такомъ случаѣ называютъ **плоскостью проекцій.**

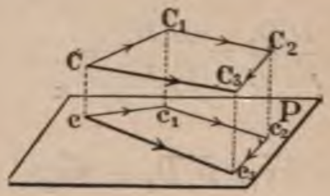
Проекціей вектора $\overline{AB}$ на плоскость *P называется векторъ $\overline{ab}$, идущій изъ проекціи а начала вектора къ проекціи b его конца.* Изъ (черт. 10) видно, что

$$ab = AC = AB \cos(BAC) = v \sin(v, Z),$$

т. е. *проекція вектора на плоскость равна величинѣ вектора, умно-*



Черт. 10.



Черт. 11.

женной на sin угла между направленіями вектора и перпендикуляра, возставленнаго къ плоскости проекцій.

Проекціей вообще нѣкоторой фигуры на плоскость называется геометрическое мѣсто проекцій всѣхъ ея точекъ.

Проекція замкнутой фигуры на плоскость будетъ тоже замкнутая фигура; причемъ очевидно, что *проекція замыкающей стороны равна геометрической суммѣ проекцій замкнутыхъ сторонъ;* такъ напр. (черт. 11) если

$$\overline{CC_3} = \overline{CC_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3},$$

то и

$$\overline{cc_3} = \overline{cc_1} + \overline{c_1c_2} + \overline{c_2c_3},$$

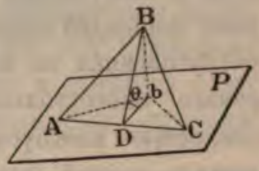
гдѣ c, c_1, c_2, c_3 суть проекціи точекъ C, C_1, C_2, C_3 на плоскость P.

Теорема 1. *Площадь проекціи треугольника на нѣкоторую плоскость равна площади самого треугольника, умноженной на cos остраго угла между плоскостью треугольника и плоскостью проекцій.*

Проекціи всякой фигуры на параллельныя плоскости очевидно равны, поэтому намъ достаточно разсмотрѣть лишь два случая.

1-й случай. Плоскость проекцій проходитъ черезъ одну изъ сторонъ треугольника; напр. на (черт. 12) сторона AC треугольника ABC лежитъ въ плоскости проекцій P.

Опустивъ изъ точки B высоту BD на основаніе AC и спроектировавъ вершину B на плоскость P, не трудно видѣть, что линія $bD \perp AC$, слѣдовательно уголъ $BDb = \theta$ измѣряетъ острый двугранный уголъ между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекцій P; вмѣстѣ съ тѣмъ треугольникъ AbC есть проекція на эту плоскость треугольника ABC, но



Черт. 12.

$$\Delta\,(AbC) = \frac{1}{2}\,AC\,.\,bD = \frac{1}{2}\,AC\,.\,BD\,.\cos\theta = \Delta\,(ABC)\cos\theta,$$

гдѣ знакомъ Δ для краткости мы замѣнили слово площадь; слѣд. для этого случая теорема наша доказана.

2-й случай. Плоскость проекцій проходитъ черезъ одну изъ вершинъ треугольника; напр. на (черт. 13) вершина A лежитъ въ плоскости проекцій P.

Спроектировавъ вершины B и C на плоскость P и продолживъ сторону BC до пересѣченія съ этою плоскостью въ точкѣ D, мы видимъ, что

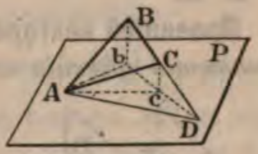
$$\Delta\,(Abc) = \Delta\,(AbD) - \Delta\,(AcD),$$

но, по выше разобранному нами случаю,

$$\Delta\,(AbD) = \Delta\,(ABD)\cos\theta$$

и

$$\Delta\,(AcD) = \Delta\,(ACD)\cos\theta,$$



Черт. 13.

гдѣ θ есть мѣра остраго двуграннаго угла между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекцій, слѣдовательно

$$\Delta(Abc) = [\Delta(ABD) - \Delta(ACD)]\cos\theta = \Delta(ABC)\cos\theta.$$

2*

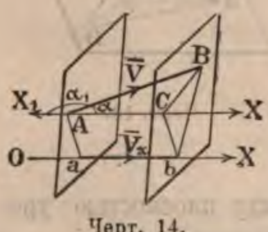
Итакъ теорема наша доказана и для второго случая, но, перемѣщая плоскость проекцій параллельно самой себѣ, ее всегда можно совмѣстить или съ одною изъ вершинъ треугольника или съ одною изъ его сторонъ, слѣдовательно высказанная нами теорема справедлива вообще.

Слѣдствіе. Площадь всякаго плоскаго многоугольника можно разбить діагоналями, выходящими изъ одной его вершины, на сумму площадей треугольниковъ; поэтому площадь проекціи плоскаго многоугольника на нѣкоторую плоскость равна площади проектируемаго многоугольника, умноженной на *cos* остраго угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекцій; наконецъ, на площадь всякой плоской криволинейной фигуры можно смотрѣть какъ на предѣлъ площадей вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, а потому *площадь проекціи всякой плоской фигуры на нѣкоторую плоскость равна площади самой фигуры умноженной на cos остраго угла между ея плоскостью и плоскостью проекцій.*

3) **Проекціи точки и вектора на ось.** *Проекціей точки A на ось OX* (черт. 14) *называется основаніе a перпендикуляра Aa, опущеннаго изъ данной точки на эту ось*, или точка пересѣченія оси съ плоскостью, перпендикулярною къ ней и проходящею черезъ данную точку A.

Ось OX въ такомъ случаѣ носитъ названіе **оси проекцій**; ей приписываютъ нѣкоторое направленіе отмѣчаемое стрѣлкою, или порядкомъ буквъ, напр. (черт. 14) ось OX направлена отъ O къ X.

Проекціей вектора AB **на ось** OX *называется векторъ ab, соединяющій проекціи начала и конца вектора на ту же ось.* Проекціи вектора приписываютъ нѣкоторое *направленіе*; причемъ за начало проекціи принимаютъ проекцію начала вектора, а за конецъ—проекцію его конца; такъ на (черт. 14) направленіе проекціи вектора AB идетъ отъ a къ b.



Черт. 14.

Если направленіе проекціи совпадаетъ съ направленіемъ оси, то проекція считается *положительною*, въ противномъ же случаѣ—*отрицательною*.

Условившись такимъ образомъ въ величинѣ и знакѣ проекціи

вектора на нѣкоторую ось, нетрудно доказать слѣдующую теорему для вычисленія ея величины.

Теорема 2. *Проекція вектора на нѣкоторую ось по величинѣ и по знаку равна произведенію длины вектора на cos угла между направленіями вектора и оси проекцій.*

Дѣйствительно на нашемъ (черт. 14) направленіе v_x проекціи вектора $\overline{v}$ на ось OX совпадаетъ съ осью проекцій; слѣдовательно проекція эта положительна. Проведя изъ точки A линію AX параллельную оси OX и одинаково съ нею направленную и замѣтивъ точку пересѣченія C этой линіи съ проектирующею плоскостью, проходящею черезъ точку B, мы видимъ, что

$$v_x = ab = AC;$$

но въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC

$$AC = AB\cos\alpha = v\cos\alpha,$$

слѣдовательно

$$v_x = v\cos(v, X),$$

такъ какъ уголъ α по построенію есть уголъ между направленіями вектора $\overline{v}$ и оси проекцій OX.

Если мы измѣнимъ направленіе оси OX на противоположное OX_1, то проекція вектора $\overline{AB}$ на эту новую ось, оставаясь по абсолютной величинѣ равной ab, по знаку будетъ отрицательна; но въ такомъ случаѣ уголъ между направленіями вектора $\overline{AB}$ и новой оси проекцій будетъ (черт. 14) $\alpha_1 = \pi - \alpha$ и произведеніе

$$v\cos\alpha_1 = v\cos(\pi - \alpha) = -v\cos\alpha = -(ab)$$

опять выразитъ по величинѣ и по знаку проекцію вектора $\overline{AB}$ на эту новую ось; слѣдовательно *при всякомъ направленіи оси X проекція v_x вектора v на эту ось по величинѣ и по знаку выражается равенствомъ*

$$v_x = v\cos(v, X) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Если направленіе вектора v совпадаетъ съ направленіемъ оси OX, то $v_x = v$; если эти направленія прямо-противоположны, то $v_x = -v$; наконецъ, если векторъ перпендикуляренъ къ оси проекцій, то $v_x = 0$.

есть ничто иное, какъ проекція вектора $\overline{w}_2 = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$ на направленіе вектора $\overline{v}_3$, слѣдовательно, по теоремѣ о проекціи геометрической суммы

$$w_2 \cos(w_2, v_3) = v_1 \cos(v_1, v_3) + v_2 \cos(v_2, v_3);$$

подставивъ это выраженіе въ предыдущую формулу и замѣнивъ въ ней w_2^2 выраженіемъ (3), мы приходимъ къ формулѣ

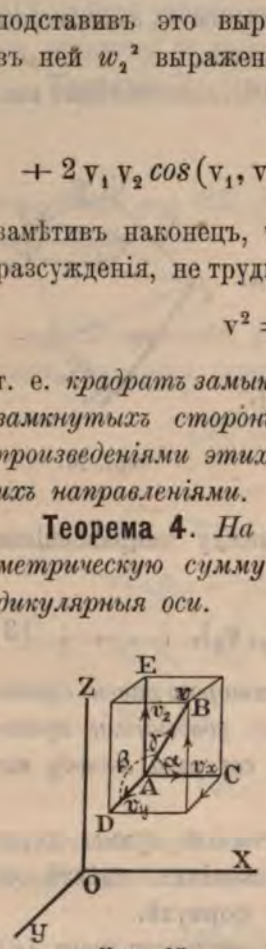
$$w_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 +$$
$$+ 2 v_1 v_2 \cos(v_1, v_2) + 2 v_1 v_3 \cos(v_1, v_3) + 2 v_2 v_3 \cos(v_2, v_3);$$

замѣтивъ наконецъ, что $\overline{w}_4 = \overline{w}_3 + \overline{v}_4$ и продолжая подобныя же разсужденія, не трудно убѣдиться въ справедливости общей формулы

$$v^2 = \Sigma v_i^2 + \Sigma 2 v_i v_k \cos(v_i, v_k), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

т. е. *кbадратъ замыкающей стороны равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ замкнутыхъ сторонъ, сложенной со всевозможными удвоенными произведеніями этихъ сторонъ, умноженными на cos угловъ между ихъ направленіями.*

Теорема 4. *На всякій векторъ можно смотрѣть, какъ на геометрическую сумму трехъ его проекцій на три взаимно-перпендикулярныя оси.*



Черт. 17.

Дѣйствительно, если изъ начала вектора A (черт. 17) проведемъ направленія параллельныя тремъ взаимно-перпендикулярнымъ осямъ проекцій OX, OY, OZ, а изъ конца его B проведемъ къ этимъ прямымъ перпендикулярныя плоскости, то полученные такимъ построеніемъ отрѣзки AC, AD, AE будутъ по величинѣ и направленію одинаковы съ проекціями $\overline{v}_x$, $\overline{v}_y$, $\overline{v}_z$ вектора $\overline{v}$ на соотвѣтственныя оси; причемъ изъ прямоугольнаго параллелепипеда, построеннаго на этихъ осяхъ, очевидно, что

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE};$$

т. е.

$$\overline{v} = \overline{v}_x + \overline{v}_y + \overline{v}_z. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Формулы *для вычисленія величины и направленія вектора.* Величина вектора $\overline{v}$, какъ діагональ прямоугольнаго параллелепипеда построеннаго на указанныхъ проекціяхъ, или по формулѣ (4), опредѣлится изъ равенства

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

а углы α, β, γ составляемые направленіемъ вектора $\overline{v}$ съ соотвѣтственными осями OX, OY, OZ по формулѣ (2) найдутся изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (7)$$

Изъ этихъ формулъ видно, что величина и направленіе вектора вполнѣ опредѣляются его проекціями на три взаимно-перпендикулярныя оси.

Если проекціи вектора на три взаимно-перпендикулярныя оси равны нулю, то изъ равенства (6) очевидно, что и *самъ векторъ равенъ нулю.*

Возвысивъ равенства (7) въ квадратъ и сложивъ полученныя величины, мы приходимъ къ равенству

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \ldots \ldots (8)$$

т. е. *углы α, β, γ составляемые векторомъ съ тремя взаимно-перпендикулярными осями не могутъ быть задаваемы произвольно;* они должны удовлетворять написанному равенству (8).

6) **Геометрическимъ произведеніемъ** $\overline{V}.\overline{v}$ *двухъ векторовъ мы будемъ называть произведеніе ихъ величинъ, умноженное на* $\cos$ *угла между ихъ направленіями; т. е.*

$$\overline{V}.\overline{v} = Vv\cos(V, v) \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

Свойства *геометрическаго произведенія.*

а) Изъ опредѣленія геометрическаго произведенія двухъ векто-

ровъ ясно, что *результатъ такого произведенія не зависитъ отъ измѣненія порядка перемножаемыхъ векторовъ, т. е.*

$$\overline{V}\,.\,\overline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}\,.\,\overline{V}=V\mathrm{v}\ cos\ (V,\ \mathrm{v}).$$

b) *Если векторы взаимно-перпендикулярны, то ихъ геометрическое произведеніе равно нулю; обратно, если геометрическое произведеніе двухъ векторовъ неравныхъ нулю равно нулю, то такіе векторы взаимно-перпендикулярны.*

c) *Если*

$$\overline{V}=\overline{V}_1+\overline{V}_2+\ \ldots\ +\overline{V}_n,$$

то

$$\overline{V}.\overline{\mathrm{v}}=(\overline{V}_1+\overline{V}_2+\ldots+\overline{V}_n).\,\overline{\mathrm{v}}=\overline{V}_1\overline{\mathrm{v}}+\overline{V}_2\overline{\mathrm{v}}+\ldots+\overline{V}_n\overline{\mathrm{v}},\ .\ (10)$$

т. е. *геометрическое произведеніе замыкающей стороны на нѣкоторый векторъ равно алгебраической суммѣ геометрическихъ произведеній замкнутыхъ сторонъ на тотъ же векторъ.* Дѣйствительно,

$$\overline{V}\,\overline{\mathrm{v}}=V\mathrm{v}\ cos\ (V,\ \mathrm{v})$$

но $V\ cos\ (V,\ \mathrm{v})$ равно величинѣ проекціи вектора $\overline{V}$ на направленіе вектора $\overline{\mathrm{v}}$; слѣд., по теоремѣ о проекціи геометрической суммы,

$$V\,cos\,(V,\mathrm{v})=V_1\,cos\,(V_1,\,\mathrm{v})+V_2\,cos\,(V_2,\,\mathrm{v})+\ldots+V_n\,cos\,(V_n,\mathrm{v});$$

помножая всѣ члены этого выраженія на v, мы приходимъ къ равенству

$$V\mathrm{v}\ cos\ (V,\ \mathrm{v})=V_1\mathrm{v}\ cos\ (V_1,\ \mathrm{v})+\ \ldots\ +V_n\,\mathrm{v}\ cos\ (V_n,\ \mathrm{v}),$$

которое можно переписать подъ видомъ

$$\overline{V}\,\overline{\mathrm{v}}=\overline{V}_1\,.\,\overline{\mathrm{v}}+\overline{V}_2\overline{\mathrm{v}}+\ \ldots\ +\overline{V}_n\,\overline{\mathrm{v}}\ \text{ч. и т. д.}\quad .\ (10)$$

Если и $\overline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}_1+\overline{\mathrm{v}}_2+\ \ldots.\ +\overline{\mathrm{v}}_k$, то, разложивъ по доказанному свойству каждый изъ членовъ правой части послѣдняго равенства (10) на новыя слагаемыя, мы приходимъ къ заключенію, что *геометрическое произведеніе двухъ замыкающихъ сторонъ равно алгебраической суммѣ всевозможныхъ геометрическихъ произведеній замкнутыхъ сторонъ или слагаемыхъ векторовъ взятыхъ по два; другими словами геометрическое произведеніе двухъ замыкающихъ сторонъ разлагается на отдѣльныя произведенія по извѣстному правилу умноженія алгебраическихъ многочленовъ.*

Напримѣръ, если

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \text{ и } \overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2,$$

то

$$\overline{V}.\overline{v} = (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \overline{V}_1\overline{v}_1 + \overline{V}_2\overline{v}_1 + \overline{V}_1\overline{v}_2 + \overline{V}_2\overline{v}_2.$$

Слѣдствіе. Послѣднее свойство геометрическаго произведенія дѣлаетъ очевидною выведенную нами формулу (4) для величины геометрической суммы; дѣйствительно, если

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n,$$

то

$$v^2 = \overline{v}.\overline{v} = (\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n)^2 = \Sigma(\overline{v}_i)^2 + \Sigma 2\overline{v}_i\overline{v}_k =$$
$$= \Sigma v_i^2 + \Sigma 2 v_i v_k \cos(v_i, v_k).$$

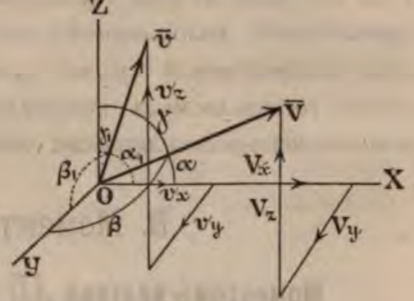
Выраженіе *геометрическаго произведенія двухъ векторовъ черезъ ихъ проекціи на три взаимно-перпендикулярныя оси.*

Обозначивъ черезъ V_x, V_y, V_z; v_x, v_y, v_z соотвѣтственно проекціи векторовъ $\overline{V}$ и $\overline{v}$ на три взаимно-перпендикулярныя оси OX, OY, OZ (черт. 18), мы знаемъ, что

$$\overline{V} = \overline{V}_x + \overline{V}_y + \overline{V}_z \text{ и } \overline{v} = \overline{v}_x + \overline{v}_y + \overline{v}_z;$$

слѣдовательно, по доказанному свойству геометрическаго произведенія,

$$\overline{V}\,\overline{v} = (\overline{V}_x + \overline{V}_y + \overline{V}_z)(\overline{v}_x + \overline{v}_y + \overline{v}_z) = \overline{V}_x\overline{v}_x + \overline{V}_y\overline{v}_y + \overline{V}_z\overline{v}_z;$$



Черт. 18.

остальные шесть членовъ въ послѣднемъ выраженіи пропадутъ, такъ какъ они будутъ представлять изъ себя геометрическія произведенія взаимно - перпендикулярныхъ векторовъ; но нетрудно убѣдиться, что *геометрическое произведеніе проекцій двухъ векторовъ на одну и ту же ось* $\overline{V}_x\,\overline{v}_x$ *по величинѣ и по знаку равно ихъ алгебраическому произведенію* $V_x v_x$; дѣйствительно, уголъ между направленіями проекцій двухъ векторовъ на одну и ту же ось равенъ или O, или π;

слѣдовательно *cos* этого угла равенъ ± 1 и потому $\overline{V}_x\,\overline{v}_x = \pm V_x v_x$; наконецъ, если обѣ проекціи одинаковыхъ знаковъ, то уголъ между ними равенъ нулю и произведенія ихъ, какъ геометрическое, такъ и алгебраическое, будутъ $> O$; если же эти проекціи различныхъ знаковъ, то уголъ между ихъ направленіями равенъ π и произведенія ихъ, какъ геометрическое, такъ и алгебраическое, будутъ $< O$, слѣдовательно, равенства

$$\overline{V}_x\,\overline{v}_x = V_x v_x,\quad \overline{V}_y\,\overline{v}_y = V_y v_y,\quad \overline{V}_z\,\overline{v}_z = V_z v_z$$

будутъ справедливы какъ по абсолютнымъ величинамъ, такъ и по знакамъ, и потому

$$\overline{V}\,\overline{v} = V_x v_x + V_y v_y + V_z v_z, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

т. е. *геометрическое произведеніе двухъ векторовъ равно алгебраической суммѣ произведеній соотвѣтственныхъ ихъ проекцій на три взаимно-перпендикулярныя оси.*

Слѣдствіе. Обозначивъ черезъ α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 соотвѣтственно (черт. 18) углы составляемые векторами V, v съ осями OX, OY, OZ и воспользовавшись равенствами (11) и (7), мы находимъ, что

$$\cos(V, v) = \frac{\overline{V}.\overline{v}}{V.v} = \frac{V_x v_x + V_y v_y + V_z v_z}{V.v} =$$

$$= \cos\alpha\,\cos\alpha_1 + \cos\beta\,\cos\beta_1 + \cos\gamma\,\cos\gamma_1, \quad . \quad (12)$$

т. е. *cos угла между двумя векторами равенъ ихъ геометрическому произведенію, раздѣленному на произведеніе ихъ величинъ или равенъ алгебраической суммѣ произведеній cos'овъ соотвѣтственныхъ угловъ, составляемыхъ направленіями данныхъ векторовъ съ тремя взаимно-перпендикулярными осями.*

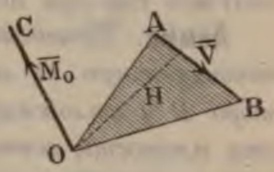
B. Моменты векторовъ.

7) **Моментомъ вектора $\overline{AB} = \overline{v}$ относительно точки** O (черт. 19) *называется произведеніе* $v\,.\,H$ *изъ величины вектора на разстояніе H точки O до линіи направленія вектора.*

Обозначивъ моментъ вектора $\overline{v}$ относительно точки O знакомъ

$M_0(\overline{v})$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$M_0(\overline{v}) = vH = 2\Delta\,(OAB),$$



Черт. 19.

т. е. *величина момента вектора* $\overline{v}$ *относительно нѣкоторой точки O равна удвоенной площади треугольника, построеннаго на этой точкѣ и данномъ векторѣ*; отсюда ясно, что $M_0(\overline{v})$ обращается въ нуль:

1) *если векторъ равенъ нулю,*

2) *если точка O, относительно которой мы беремъ моментъ вектора, лежитъ на самомъ векторѣ или его продолженіи.*

Линейнымъ моментомъ $\overline{M}_0(\overline{v})$ **вектора** $\overline{v}$ **относительно точки** *O называется* (черт. 19) *векторъ* $\overline{OC}$, *численно равный* $M_0(\overline{v})$, *т. е.*

$$OC = 2\Delta\,(OAB)$$

и возставленный перпендикулярно къ плоскости OAB въ ту сторону, чтобы, ставъ по его направленію и смотря на начало вектора, мы видѣли направленіе даннаго вектора идущимъ слѣва направо или «по часовой стрѣлкѣ».

Свойства *линейнаго момента* $\overline{M}_0(\overline{v})$.

Изъ приведеннаго опредѣленія ясно, что:

1) *Ни величина, ни направленіе линейнаго момента вектора относительно точки O не зависятъ отъ перенесенія точки приложенія вектора въ любую точку, лежащую на его (вектора) направленіи, или отъ перенесенія точки O, относительно которой берется моментъ, по линіи параллельной данному вектору.*

2) *Числового множителя можно подводить подъ знакъ момента, т. е.*

$$k\overline{M}_0(\overline{v}) = \overline{M}_0(k\overline{v}).$$

Дѣйствительно, если векторъ $\overline{v}$, не измѣняя его точки приложенія, увеличить въ k разъ, то ясно, что *величина* его линейнаго момента относительно точки O увеличится въ то же число разъ, *направленіе же* — останется безъ перемѣны, что и выражается написаннымъ равенствомъ, остающимся справедливымъ, какъ нетрудно непосредственно убѣдиться, и при $k < O$.

Для доказательства слѣдующей теоремы мы замѣтимъ предвари-

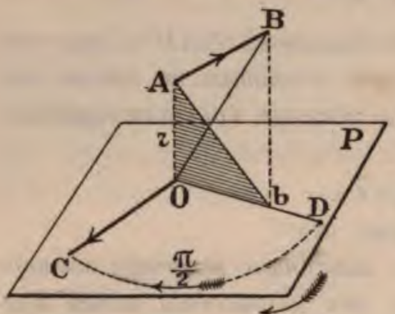
тельно, что величину и направленіе линейнаго момента $\overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}})$ можно получить еще при помощи слѣдующаго построенія.

Лемма. *Проведемъ черезъ точку* O (черт. 20) *плоскость* P *перпендикулярную къ линіи* OA, *спроектируемъ на нее конецъ вектора* B *и отложимъ, по направленію проекціи* Ob *вектора* $\overline{\mathrm{v}}$ *на эту плоскость, векторъ* $\overline{OD} = r\,.\,\overline{Ob}$, *гдѣ*

$$r = OA;$$

т. е. r *есть число, измѣряющее разстояніе между точками* O *и* A; *если затѣмъ повернуть плоскость* P *около оси* OA *на уголъ* $\frac{\pi}{2}$ *по направленію движенія часовой стрѣлки, то векторъ* $\overline{OD}$ *совмѣстится съ векторомъ* $\overline{OC}$, *геометрически равнымъ линейному моменту* $\overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}})$.

Дѣйствительно, величина вектора $\overline{OC}$ по построенію удовлетворяетъ равенствамъ



Черт. 20.

$$OC = OD = r\,.\,Ob = 2\,\Delta(OAb)$$

но $\Delta(OAb) = \Delta(OAB)$, такъ какъ треугольники эти имѣютъ общее основаніе и равныя высоты, слѣдовательно

$$OC = 2\,\Delta(OAB) = \mathrm{M}_0(\overline{\mathrm{v}}),$$

что же касается до направленія вектора $\overline{OC}$, то оно очевидно будетъ перпендикулярно къ плоскости OAB, и кромѣ того относительно него векторъ $\overline{AB}$ направленъ слѣва направо; слѣдовательно полученный такимъ построеніемъ векторъ $\overline{OC}$ есть не что иное, какъ линейный моментъ $\overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}})$ вектора $\overline{\mathrm{v}}$ относительно точки O.

Теорема 5. *Линейный моментъ относительно точки* O *геометрической суммы*

$$\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}}_1 + \overline{\mathrm{v}}_2 + \ldots + \overline{\mathrm{v}}_n,$$

нѣсколькихъ векторовъ проведенныхъ изъ общей точки A *равенъ геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ относительно той же точки* O *слагаемыхъ векторовъ, т. е.*

$$\overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}}) = \overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}}_1) + \overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}}_2) + \ldots + \overline{\mathrm{M}}_0(\overline{\mathrm{v}}_n).$$

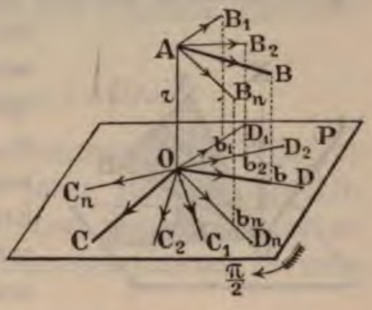
Положимъ, что изъ точки A (черт. 21) проведено n векторовъ

$$\overline{AB}=\overline{v},\ \overline{AB}_1=\overline{v}_1,\ \overline{AB}_2=\overline{v}_2\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \overline{AB}_n=\overline{v}_n,$$

причемъ

$$\overline{v}=\overline{v}_1+\overline{v}_2+\ldots+\overline{v}_n.$$

Для построенія линейныхъ моментовъ этихъ векторовъ относительно точки O воспользуемся предыдущею леммою; съ этою цѣлью проведемъ въ точкѣ O плоскость P перпендикулярную къ OA и спроектируемъ концы всѣхъ векторовъ на эту плоскость; въ такомъ случаѣ, обозначивъ указанныя проекціи соотвѣтственными малыми буквами и замѣтивъ, что точка O по построенію есть проекція точки A на ту же плоскость P, мы знаемъ, что



Черт. 21.

$$\overline{Ob}=\overline{Ob}_1+\overline{Ob}_2+\ldots+\overline{Ob}_n,$$

такъ какъ проекція замыкающей стороны на нѣкоторую плоскость равна геометрической суммѣ проекцій замкнутыхъ сторонъ на ту же плоскость.

Увеличивъ теперь всѣ члены этой геометрической суммы въ r разъ, гдѣ $r=OA$, мы получимъ рядъ векторовъ

$$\overline{OD}=r.\ \overline{Ob},\ OD_1=r.\overline{Ob}_1\ \ldots\ OD_n=r.\ \overline{Ob}_n;$$

причемъ по доказанному свойству (c) геометрической суммы

$$r.\ \overline{Ob}=r.\ \overline{Ob}_1+r.\overline{Ob}_2+\ldots+r.\overline{Ob}_n$$

или

$$\overline{OD}=\overline{OD}_1+\overline{OD}_2+\ldots+\overline{OD}_n;$$

но, повернувъ плоскость проекцій P на уголъ $\frac{\pi}{2}$ вокругъ оси OA «по часовой стрѣлкѣ», мы знаемъ, что векторы $\overline{OD}$, $\overline{OD}_1$, ... $\overline{OD}_n$ по величинѣ и направленію совмѣстятся соотвѣтственно съ линейными

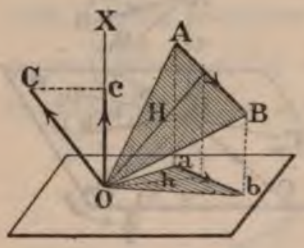
моментами $\overline{OC}$, $\overline{OC}_1$, ... $\overline{OC}_n$; слѣдовательно

$$\overline{OC} = \overline{OC}_1 + \overline{OC}_2 + \ldots + \overline{OC}_n$$

или

$$\overline{M}_0(v) = \overline{M}_0(\overline{v}_1) + \overline{M}_0(\overline{v}_2) + \ldots + \overline{M}_0(\overline{v}_n) \text{ ч. и т. д.}$$

8) **Моментомъ** $M_{ox}(\overline{v})$ **вектора** $\overline{AB} = \overline{v}$ (черт. 22) **относительно направленія оси** *OX называется, взятое съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, произведеніе изъ проекціи ab вектора на плоскость перпендикулярную къ оси, умноженной на разстояніе h, до указанной проекціи, точки пересѣченія O данной оси съ этою плоскостью.* Моменту вектора относительно оси приписываютъ знаки (+) или (—), смотря по направленію вектора относительно наблюдателя, стоящаго по оси и обращеннаго лицомъ къ началу вектора; *если векторъ $\overline{v}$ направленъ относительно такого наблюдателя слѣва направо, то указанный моментъ считается—положительнымъ, въ противномъ же случаѣ—отрицательнымъ.*



Черт. 22.

Такимъ образомъ

$$M_{ox}(\overline{v}) = \pm ab \cdot h = \pm 2\Delta(Oab),$$

т. е. *абсолютная величина момента вектора относительно оси равна удвоенной площади проекціи на плоскость перпендикулярную къ оси треугольника OAB, построеннаго на нѣкоторой точкѣ O этой оси и на данномъ векторѣ $\overline{AB}$.*

Изъ высказаннаго опредѣленія ясно, что моментъ вектора относительно оси обращается въ нуль въ трехъ случаяхъ:

1) *когда векторъ обращается въ нуль;*

2) *когда векторъ или его направленіе проходитъ черезъ ось;*

3) *когда векторъ параллеленъ оси.*

Линейнымъ моментомъ $\overline{M}_{ox}(\overline{v})$ **вектора** $\overline{v}$ **относительно оси** *OX называется векторъ $\overline{Oc}$ (черт. 22) численно равный $2\Delta(Oab)$ т. е. абсолютной величинѣ момента $M_{ox}(\overline{v})$ и отложенный по оси OX, если $M_{ox}(\overline{v}) > O$ и противоположно ея направленію если $M_{ox}(\overline{v}) < O$,* другими словами *линейный моментъ вектора относительно оси OX*

есть линейный моментъ проекціи вектора на плоскость перпендикулярную къ этой оси относительно точки пересѣченія оси съ плоскостью.

Теорема 6. *Моментъ вектора относительно оси по величинѣ и знаку есть проекція на эту ось линейнаго момента вектора относительно любой точки O той же оси.*

Дѣйствительно, обозначивъ для краткости (четр. 22) моменты вектора $\overline{v}$ относительно точки O и оси OX проходящей черезъ эту точку знаками M_0 и M_x, мы знаемъ, что ихъ величины удовлетворяютъ равенствамъ:

$$M_0 = 2\Delta(OAB) \text{ и } M_x = \pm 2\Delta(Oab)$$

но $\Delta(Oab)$, какъ площадь проекціи треугольника (OAB) на плоскость перпендикулярную къ оси OX, равна площади $\Delta(OAB)$, умноженной на cos остраго угла между этими плоскостями или, что все равно, на cos остраго угла между перпендикулярами къ этимъ плоскостямъ; т. е.

$$\Delta(Oab) = \Delta(OAB)\cos(COc);$$

слѣдовательно

$$M_x = \pm M_0 \cos(COc);$$

но $cos\ (COc)$ по абсолютной величинѣ очевидно равенъ $cos\ (M_0, X)$; причемъ знакъ послѣдняго cos'а совпадаетъ со знакомъ момента M_x; въ самомъ дѣлѣ, если, какъ на нашемъ (черт. 22), $cos\ (M_0, X) > O$, то ось OX и линейный моментъ $\overline{M}_0$ лежатъ по одну сторону плоскости OAB, слѣдовательно векторъ $\overline{AB}$ направленъ относительно этой оси слѣва направо и потому моментъ M_x будетъ тоже $> O$, въ противномъ же случаѣ, если напр. на томъ же чертежѣ измѣнить направленіе оси OX на противоположное, то $cos\ (M_0, X)$ и моментъ M_x будутъ $< O$, такимъ образомъ мы приходимъ къ равенству

$$M_x = M_0 \cos(M_0, X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

справедливому по величинѣ и по знаку; слѣдовательно *моментъ* M_x *есть проекція линейнаго момента* $\overline{M}_0$ *на ось* OX.

Слѣдствіе. Если черезъ точку O провести три взаимно-перпендикулярныя оси OX, OY, OZ, то по доказанной теоремѣ линейные моменты $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_z$ вектора $\overline{v}$ (черт. 23) относительно этихъ

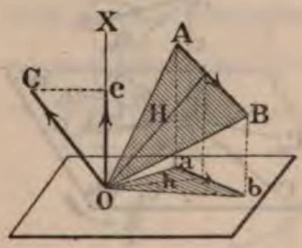
моментами $\overline{OC}$, $\overline{OC}_1$, ... $\overline{OC}_n$; слѣдовательно

$$\overline{OC} = \overline{OC}_1 + \overline{OC}_2 + \ldots + \overline{OC}_n$$

или

$$\overline{M}_0(v) = \overline{M}_0(\overline{v}_1) + \overline{M}_0(\overline{v}_2) + \ldots + \overline{M}_0(\overline{v}_n) \text{ ч. и т. д.}$$

8) **Моментомъ** $M_{ox}(\overline{v})$ **вектора** $\overline{AB} = \overline{v}$ (черт. 22) **относительно направленія оси** OX *называется, взятое съ положительнымъ или отрицательнымъ знакомъ, произведеніе изъ проекціи ab вектора на плоскость перпендикулярную къ оси, умноженной на разстояніе h, до указанной проекціи, точки пересѣченія O данной оси съ этою плоскостью.* Моменту вектора относительно оси приписываютъ знаки (+) или (—), смотря по направленію вектора относительно наблюдателя, стоящаго по оси и обращеннаго лицомъ къ началу вектора; *если векторъ* $\overline{v}$ *направленъ относительно такого наблюдателя слѣва направо, то указанный моментъ считается—положительнымъ, въ противномъ же случаѣ—отрицательнымъ.*



Черт. 22.

Такимъ образомъ

$$M_{ox}(\overline{v}) = \pm ab.\, h = \pm 2\Delta(Oab),$$

т. е. *абсолютная величина момента вектора относительно оси равна удвоенной площади проекціи на плоскость перпендикулярную къ оси треугольника OAB, построеннаго на нѣкоторой точкѣ O этой оси и на данномъ векторѣ* $\overline{AB}$.

Изъ высказаннаго опредѣленія ясно, что моментъ вектора относительно оси обращается въ нуль въ трехъ случаяхъ:

1) *когда векторъ обращается въ нуль;*
2) *когда векторъ или его направленіе проходитъ черезъ ось;*
3) *когда векторъ параллеленъ оси.*

Линейнымъ моментомъ $\overline{M}_{ox}(\overline{v})$ **вектора** $\overline{v}$ **относительно оси** OX *называется векторъ* $\overline{Oc}$ *(черт. 22) численно равный* $2\Delta(Oab)$ *т. е. абсолютной величинѣ момента* $M_{ox}(\overline{v})$ *и отложенный по оси OX, если* $M_{ox}(\overline{v}) > O$ *и противоположно ея направленію если* $M_{ox}(\overline{v}) < O$, другими словами *линейный моментъ вектора относительно оси OX*

есть линейный моментъ проекціи вектора на плоскость перпендикулярную къ этой оси относительно точки пересѣченія оси съ плоскостью.

Теорема 6. *Моментъ вектора относительно оси по величинѣ и знаку есть проекція на эту ось линейнаго момента вектора относительно любой точки O той же оси.*

Дѣйствительно, обозначивъ для краткости (четр. 22) моменты вектора $\overline{v}$ относительно точки O и оси OX проходящей черезъ эту точку знаками M_0 и M_x, мы знаемъ, что ихъ величины удовлетворяютъ равенствамъ:

$$M_0 = 2\Delta(OAB) \text{ и } M_x = \pm 2\Delta(Oab)$$

но $\Delta(Oab)$, какъ площадь проекціи треугольника (OAB) на плоскость перпендикулярную къ оси OX, равна площади $\Delta(OAB)$, умноженной на cos остраго угла между этими плоскостями или, что все равно, на cos остраго угла между перпендикулярами къ этимъ плоскостямъ; т. е.

$$\Delta(Oab) = \Delta(OAB)\, cos(COc);$$

слѣдовательно

$$M_x = \pm M_0\, cos(COc);$$

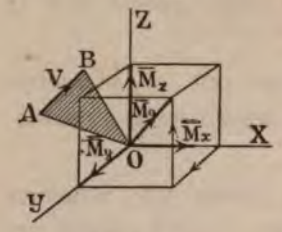
но $cos\,(COc)$ по абсолютной величинѣ очевидно равенъ $cos\,(M_0, X)$; причемъ знакъ послѣдняго cos'а совпадаетъ со знакомъ момента M_x; въ самомъ дѣлѣ, если, какъ на нашемъ (черт. 22), $cos\,(M_0, X) > O$, то ось OX и линейный моментъ $\overline{M}_0$ лежатъ по одну сторону плоскости OAB, слѣдовательно векторъ $\overline{AB}$ направленъ относительно этой оси слѣва направо и потому моментъ M_x будетъ тоже $> O$, въ противномъ же случаѣ, если напр. на томъ же чертежѣ измѣнить направленіе оси OX на противоположное, то $cos\,(M_0, X)$ и моментъ M_x будутъ $< O$, такимъ образомъ мы приходимъ къ равенству

$$M_x = M_0\, cos(M_0, X) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

справедливому по величинѣ и по знаку; слѣдовательно *моментъ* M_x *есть проекція линейнаго момента* $\overline{M}_0$ *на ось* OX.

Слѣдствіе. Если черезъ точку O провести три взаимно-перпендикулярныя оси OX, OY, OZ, то по доказанной теоремѣ линейные моменты $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_z$ вектора $\overline{v}$ (черт. 23) относительно этихъ

осей будутъ соотвѣтственно проекціями на тѣ же оси линейнаго момента $\overline{M}_0$ даннаго вектора относительно выбранной точки O; слѣдовательно по теоремѣ (4)



Черт. 23.

$$\overline{M}_0 = \overline{M}_x + \overline{M}_y + \overline{M}_z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

т. е. *линейный моментъ вектора относительно точки пересѣченія трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осей равенъ геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ того же вектора относительно этихъ осей*, слѣдовательно величина и направленіе момента M_0 опредѣлятся по формуламъ:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(M_0, X) &= \frac{M_x}{M_0} \\ \cos(M_0, Y) &= \frac{M_y}{M_0} \\ \cos(M_0, Z) &= \frac{M_z}{M_0} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Теорема 7. *Моментъ относительно оси OX геометрической суммы $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots \overline{v}_n$ нѣсколькихъ векторовъ, проведенныхъ изъ общей точки A, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ относительно той же оси слагаемыхъ векторовъ; т. е.*

$$M_{ox}(\overline{v}) = M_{ox}(\overline{v}_1) + M_{ox}(\overline{v}_2) \;.\;.\;.\; M_{ox}(\overline{v}_n).$$

Дѣйствительно, по теоремѣ (5)

$$\overline{M}_0(\overline{v}) = \overline{M}_0(\overline{v}_1) + \overline{M}_0(\overline{v}_2) + \;.\;.\;.\; \overline{M}_0(\overline{v}_n),$$

но $M_{ox}(\overline{v})$, $M_{ox}(\overline{v}_1) \ldots M_{ox}(\overline{v}_n)$ по теоремѣ (6) суть соотвѣтственно проекціи на ось OX моментовъ $\overline{M}_0(\overline{v})$, $\overline{M}_0(\overline{v}_1) \ldots \overline{M}_0(\overline{v}_n)$, слѣдовательно по теоремѣ о проекціи геометрической суммы на нѣкоторую ось

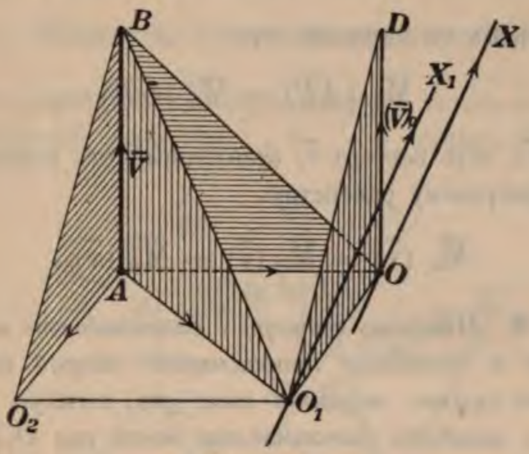
$$M_{ox}(\overline{v}) = M_{ox}(\overline{v}_1) + M_{ox}(\overline{v}_2) + \ldots + M_{ox}(\overline{v}_n).$$

Точку O, относительно которой берутъ моментъ даннаго вектора, для краткости называютъ иногда **центромъ момента.**

Теорема 8. *Линейный моментъ вектора* $\overline{\mathrm{v}}$ *относительно новаго центра* O_1 *равенъ геометрической суммѣ: линейнаго момента того же вектора относительно стараго центра* O *и линейнаго момента относительно новаго центра* O_1 *вектора* $\overline{\mathrm{v}}$, *отложеннаго отъ стараго центра* O, *т. е.*

$$\overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{\mathrm{v}}) + \overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{\mathrm{v}})_0$$

Дѣйствительно (черт. 24), соединивъ начало A даннаго век-



Черт. 24.

тора $\overline{\mathrm{v}} = \overline{AB}$ съ центрами O и O_1, и построивъ параллелограммъ AOO_1O_2, мы видимъ, что

$$\overline{AO}_1 = \overline{AO} + \overline{AO}_2$$

слѣдовательно по теоремѣ (5):

$$\overline{\mathrm{M}}_B(\overline{AO}_1) = \overline{\mathrm{M}}_B(\overline{AO}) + \overline{\mathrm{M}}_B(\overline{AO}_2),$$

но

$$\overline{\mathrm{M}}_B(\overline{AO}_1) = -\overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{AB}),$$

ибо оба эти линейные момента по величинѣ равны удвоенной площади треугольника BAO_1, направленія же ихъ, будучи перпенди-

кулярны къ плоскости этого треугольника, идутъ, какъ нетрудно непосредственно убѣдиться, въ противоположныя стороны.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости равенствъ:

$$\overline{\mathrm{M}}_B(\overline{AO}) = -\overline{\mathrm{M}}_O(\overline{AB}),$$

$$\overline{\mathrm{M}}_B(\overline{AO_2}) = -\overline{\mathrm{M}}_{O_2}(\overline{AB}).$$

Подставивъ эти выраженія въ наше геометрическое равенство и помноживъ обѣ части его на -1, мы придемъ къ равенству:

$$\overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{AB}) = \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{AB}) + \overline{\mathrm{M}}_{O_2}(\overline{AB});$$

принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$\overline{\mathrm{M}}_{O_2}(\overline{AB}) = \overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{OD})$$

гдѣ $\overline{OD} = (\overline{\mathrm{v}})_0$ есть векторъ $\overline{\mathrm{v}}$, отложенный отъ центра O, мы приходимъ къ требуемому равенству:

$$\overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{\mathrm{v}}) + \overline{\mathrm{M}}_{O_1}(\overline{\mathrm{v}})_0.$$

Теорема 9. *Моментъ вектора $\overline{\mathrm{v}}$ относительно новой оси O_1X_1 параллельной и одинаково направленной старой оси OX равенъ алгебраической суммѣ: момента того же вектора относительно старой оси и момента относительно новой оси O_1X_1 вектора $\overline{\mathrm{v}}$, отложеннаго отъ одной изъ точекъ O старой оси, т. е.*

$$\mathrm{M}_{O_1X_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \mathrm{M}_{OX}(\overline{\mathrm{v}}) + \overline{\mathrm{M}}_{O_1X_1}(\overline{\mathrm{v}})_0.$$

Дѣйствительно, спроектировавъ всѣ члены предыдущаго геометрическаго равенства (черт. 24) на новую ось O_1X_1, параллельную и одинаково направленную старой оси OX и обозначивъ эти проекціи присоединеніемъ къ знакамъ моментовъ снизу запятой вмѣстѣ съ буквою $_{x_1}$, по теоремѣ о проекціи геометрической суммы на нѣкоторую ось, мы придемъ къ равенству:

$$\mathrm{M}_{O_1,\,x_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \mathrm{M}_{O,\,x_1}(\overline{\mathrm{v}}) + \mathrm{M}_{O_1,\,x_1}(\overline{\mathrm{v}})_0;$$

но

$$\mathrm{M}_{O,\,x_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \mathrm{M}_{O,\,x}(\overline{\mathrm{v}}),$$

ибо оси O_1X_1 и OX параллельны и одинаково направлены; слѣдовательно

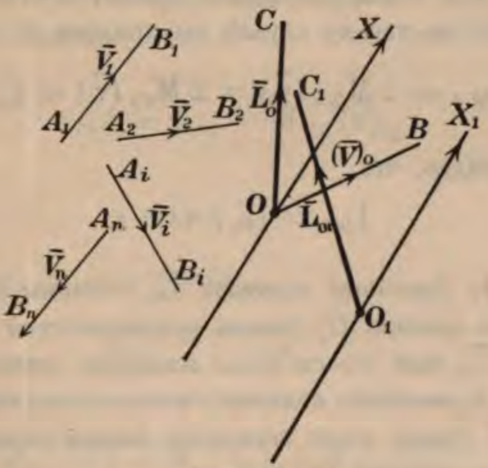
$$\mathrm{M}_{O_1 . X_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \mathrm{M}_{O . X}(\overline{\mathrm{v}}) + \mathrm{M}_{O_1, X_1}(\overline{\mathrm{v}})_0 .$$

Принявъ наконецъ во вниманіе, что проекція линейнаго момента вектора относительно одной изъ точекъ данной оси, взятая на эту ось, равна моменту этого же вектора относительно этой оси, ясно, что, не нарушая предыдущаго равенства, во всѣхъ членахъ его можно откинуть занятыя и мы придемъ къ требуемому теоремою равенству:

$$\mathrm{M}_{O_1 X_1}(\overline{\mathrm{v}}) = \mathrm{M}_{OX}(\overline{\mathrm{v}}) + \mathrm{M}_{O_1 X_1}(\overline{\mathrm{v}})_0 .$$

C. Моменты системъ векторовъ.

Линейнымъ моментомъ $\overline{\mathrm{L}}_O$ *относительно точки или центра O* **системы** *n данныхъ векторовъ* $\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2, \ldots \overline{\mathrm{v}}_n$ *(черт. 25) мы будемъ*



Черт. 25.

называть **геометрическую сумму** *линейныхъ моментовъ относительно того же центра O всѣхъ векторовъ этой системы, т. е.*

$$\overline{\mathrm{L}}_O = \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{\mathrm{v}}_1) + \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{\mathrm{v}}_2) + \ldots + \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{\mathrm{v}}_n) = \Sigma\, \overline{\mathrm{M}}_O(\overline{\mathrm{v}}_i).$$

Подобнымъ же образомъ: **моментомъ** L_{OX} *относительно оси OX данной системы векторовъ называется алгебраическая сумма мо-*

ментовъ относительно той же оси всѣхъ векторовъ этой системы, т. е.

$$L_{ox} = M_{ox}(\overline{v}_1) + M_{ox}(\overline{v}_2) + \ldots + M_{ox}(\overline{v}_n) = \Sigma M_{ox}(\overline{v}_i).$$

Теорема 10. *Моментъ* L_{ox} *данной системы векторовъ относительно нѣкоторой оси OX равенъ проекціи* $L_{o,x}$ *на эту ось линейнаго момента* $\overline{L}_o$ *той же системы относительно одной изъ точекъ O этой оси, т. е.*

$$L_{ox} = L_{o,x}.$$

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ $L_{o,x}$ и $M_{o,x}(\overline{v}_i)$ проекціи на ось OX линейныхъ моментовъ $\overline{L}_o$ и $\overline{M}_o(\overline{v}_i)$ и принявъ во вниманіе, что по опредѣленію

$$\overline{L}_o = \Sigma \overline{M}_o(\overline{v}_i),$$

спроектируемъ всѣ члены послѣдняго геометрическаго равенства на данную ось OX; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ равенствамъ:

$$L_{o,x} = \Sigma M_{o,x}(\overline{v}_i) = \Sigma M_{ox}(\overline{v}_i) = L_{ox},$$

изъ которыхъ видно, что

$$L_{ox} = L_{o,x} \text{ ч. т. д.}$$

Теорема 11. *Линейный моментъ* $\overline{L}_{o_1}$ *системы векторовъ относительно новаго центра* O_1 *равенъ геометрической суммѣ, линейнаго момента* $\overline{L}_o$ *той же системы векторовъ относительно стараго центра O и линейнаго момента относительно новаго центра* O_1 *геометрической суммы всѣхъ векторовъ данной системы, отложенной отъ стараго центра O, т. е.*

$$\overline{L}_{o_1} = \overline{L}_o + \overline{M}_{o_1}(\overline{v})_0,$$

гдѣ

$$\overline{v} = \Sigma \overline{v}_i.$$

Дѣйствительно, по опредѣленію

$$\overline{L}_{o_1} = \Sigma \overline{M}_{o_1}(\overline{v}_i),$$

но по теоремѣ (8)

$$\overline{M}_{o_1}(\overline{v}_i) = \overline{M}_o(\overline{v}_i) + \overline{M}_{o_1}(\overline{v}_i)_0;$$

слѣдовательно

$$\overline{L}_{o_1} = \Sigma\, \overline{M}_o(\overline{v}_i) + \Sigma\, \overline{M}_{o_1}(\overline{v}_i)_0,$$

т. е.

$$\overline{L}_{o_1} = \overline{L}_o + \overline{M}_{o_1}(\overline{v})_0,$$

гдѣ по теоремѣ (5)

$$\overline{v} = \Sigma\, \overline{v}_i.$$

Теорема 12. *Моментъ $L_{o_1x_1}$ данной системы векторовъ относительно новой оси O_1X_1 параллельной и одинаково направленной старой оси OX равенъ алгебраической суммѣ; момента L_{ox} той же системы относительно старой оси и момента $M_{o_1x_1}(\overline{v})_0$ относительно новой оси O_1X_1 геометрической суммы $\overline{v} = \Sigma\, \overline{v}_i$ всѣхъ векторовъ данной системы, отложенной отъ одной изъ точекъ O старой оси, т. е.*

$$L_{o_1x_1} = L_{ox} + M_{o_1x_1}(\overline{v})_0,$$

гдѣ

$$\overline{v} = \Sigma\, \overline{v}_i.$$

Дѣйствительно, по опредѣленію

$$L_{o_1x_1} = \Sigma\, M_{o_1x_1}(\overline{v}_i)$$

но по теоремѣ (9)

$$M_{o_1x_1}(\overline{v}_i) = M_{ox}(\overline{v}_i) + M_{o_1x_1}(\overline{v}_i)_0,$$

слѣдовательно

$$L_{o_1x_1} = \Sigma\, M_{ox}(\overline{v}_i) + \Sigma\, M_{o_1x_1}(\overline{v}_i)_0 =$$

$$= L_{ox} + M_{o_1x_1}(\overline{v})_0,$$

гдѣ по теоремѣ (6)

$$\overline{v} = \Sigma\, \overline{v}_i.$$

Слѣдствіе. *Если*

$$\overline{\mathrm{v}} = \Sigma \overline{\mathrm{v}}_i = 0,$$

т. е. геометрическая сумма всѣхъ векторовъ данной системы равна **нулю**, *то*

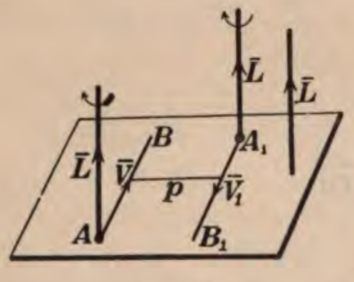
$$\overline{\mathrm{L}}_{O_1} = \overline{\mathrm{L}}_O \text{ и } \mathrm{L}_{O_1X_1} = \mathrm{L}_{OX},$$

другими словами линейные моменты такой системы относительно **всѣхъ центровъ** *будутъ* **геометрически равны** *и ея моменты относительно* **всѣхъ параллельныхъ** *и* **одинаково направленныхъ осей** *будутъ равны* **алгебраически.**

Линейный моментъ $\overline{\mathrm{L}}_O$ такой системы векторовъ относительно нѣкотораго центра O называютъ поэтому просто **линейнымъ моментомъ** $\overline{\mathrm{L}}$ этой системы, такъ какъ ни величина, ни направленіе его **не зависятъ** отъ выбора полюса O.

Простѣйшая система векторовъ, удовлетворяющихъ условію, чтобы ихъ геометрическая сумма была равна нулю, есть, такъ-называемая, *«пара векторовъ»*.

«Парою векторовъ» *называется два вектора* (черт. 26) $\overline{AB} = \overline{\mathrm{v}}$, $\overline{A_1B_1} = \overline{\mathrm{v}}_1$ *равныхъ, параллельныхъ, но противоположно направленныхъ и не лежащихъ на одной прямой.*



Черт. 26.

Разстояніе p между направленіями пары векторовъ называется **плечомъ** пары.

Найдемъ величину и направленіе **линейнаго момента** $\overline{\mathrm{L}}$ пары векторовъ, т. е. величину и направленіе линейнаго момента пары векторовъ относительно нѣкотораго **произвольнаго** центра. Взявъ для простоты за центръ линейнаго момента пары векторовъ точку приложенія A одного изъ нихъ, мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\overline{\mathrm{L}} = \overline{\mathrm{L}}_A = \overline{\mathrm{M}}_A(\overline{\mathrm{v}}) + \overline{\mathrm{M}}_A(\overline{\mathrm{v}}_1) = \overline{\mathrm{M}}_A(\overline{\mathrm{v}}_1),$$

ибо

$$\overline{\mathrm{M}}_A(\overline{\mathrm{v}}) = 0.$$

Подобнымъ-же образомъ убѣдимся въ справедливости равенства:

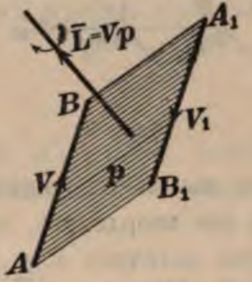
$$\overline{L} = \overline{M}_{A_1}(\overline{v}).$$

Итакъ

$$\overline{L} = \overline{M}_A(\overline{v}_1) = \overline{M}_{A_1}(\overline{v}),$$

т. е. **линейный моментъ** *пары векторовъ по величинѣ и направленію совпадаетъ съ линейнымъ моментомъ одного изъ пары векторовъ относительно точки приложенія другого.*

Слѣдовательно (черт. 27) **величина** *линейнаго момента* $\overline{L}$ *пары векторовъ будетъ численно равна площади параллелограмма* ABA_1B_1, *построеннаго на этихъ векторахъ или произведенію* v*p* *одного изъ векторовъ пары на ея плечо,* **направленіе же** *его будетъ перпендикулярно къ плоскости пары, притомъ идетъ отъ нея въ ту сторону, что, вставъ по этому направленію въ точкѣ приложенія одного изъ векторовъ пары, мы увидимъ другой идущимъ* **слѣва на право.**



Черт. 27.

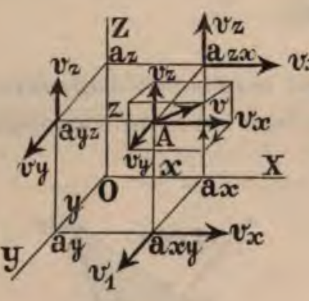
Замѣтимъ наконецъ, что произведеніе v*p* одного изъ пары векторовъ на ея плечо называютъ еще **моментомъ пары.**

D. Аналитическія выраженія моментовъ векторовъ.

Положеніе всякой точки A въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется положеніями трехъ ея проекцій a_x, a_y, a_z (черт. 28) на три взаимно-перпендикулярныя оси OX, OY, OZ; положенія же проекцій a_x, a_y, a_z опредѣлятся ихъ разстояніями x, y, z отъ точки O, считаемыми положительными, когда проекціи a_x, a_y, a_z лежатъ на самихъ осяхъ, и—отрицательными, когда эти проекціи лежатъ на продолженіяхъ соотвѣтственныхъ осей по другія стороны точки O.

Система трехъ осей (O; X, Y, Z) называется въ такомъ случаѣ прямоугольною прямолинейною системою координатъ, точку O на-

зываютъ началомъ координатъ, а числа x, y, z—координатами данной точки A. Направленія осей OX, OY, OZ называются ихъ положительными направленіями, направленія же продолженій этихъ осей по другія стороны начала O — отрицательными направленіями осей; причемъ расположеніе положительныхъ направленій осей OX, OY, OZ берутъ обыкновенно въ указанномъ на нашемъ чертежѣ порядкѣ, а именно, чтобы, вставъ по оси OX и обратившись лицомъ къ оси OY, мы имѣли направленіе оси OZ по правую сторону.



Черт. 28.

Итакъ положеніе точки A вполнѣ опредѣляется тремя ея координатами (x, y, z), величина же и направленіе приложеннаго къ ней вектора $\overline{AB} = \overline{v}$, какъ мы знаемъ, опредѣляются тремя его проекціями v_x, v_y, v_z на эти оси координатъ, слѣдовательно въ зависимости отъ указанныхъ шести величинъ x, y, z, v_x, v_y, v_z должны выразиться какъ моменты M_x, M_y, M_z вектора $\overline{v}$ относительно осей координатъ, такъ и линейный моментъ $\overline{M}_0$ того же вектора относительно начала координатъ, причемъ намъ достаточно опредѣлить лишь моменты M_x, M_y, M_z, такъ какъ

$$\overline{M}_0 = \overline{M}_x + \overline{M}_y + \overline{M}_z;$$

но

$$\overline{v} = \overline{v}_x + \overline{v}_y + \overline{v}_z;$$

слѣдовательно по теоремѣ (7)

$$M_x = M_{ox}(\overline{v}) = M_{ox}(\overline{v}_x) + M_{ox}(\overline{v}_y) + M_{ox}(\overline{v}_z),$$

причемъ $M_{ox}(\overline{v}_x) = O$, такъ какъ $\overline{v}_x \parallel OX$; для нахожденія же двухъ послѣднихъ моментовъ мы спроектируемъ векторы $\overline{v}_y$, $\overline{v}_z$ на плоскость YOZ перпендикулярную къ оси OX; они очевидно спроектируются въ натуральныя величины и потому

$$M_{ox}(\overline{v}_y) = -z v_y,$$

такъ какъ z есть разстояніе точки O до направленія проекціи вектора $\overline{\mathrm{v}}_y$ на плоскость YOZ, кромѣ того на нашемъ чертежѣ векторъ $\overline{\mathrm{v}}_y$ направленъ справа налѣво относительно оси OX; слѣдовательно искомый моментъ < 0.

Подобнымъ же образомъ находимъ, что

$$\mathrm{M}_{ox}(\overline{\mathrm{v}}_z) = y\,\mathrm{v}_z.$$

Наконецъ нетрудно убѣдиться, что найденныя выраженія для моментовъ $\mathrm{M}_{ox}(\overline{\mathrm{v}}_y)$ и $\mathrm{M}_{ox}(\overline{\mathrm{v}}_z)$ остаются справедливыми при всевозможныхъ знакахъ величинъ y, z, v_y, v_z, такъ какъ при измѣненіи знака одной изъ этихъ величинъ и зависящій отъ нея моментъ тоже измѣняетъ свой знакъ. Итакъ

$$\mathrm{M}_x = y\mathrm{v}_z - z\mathrm{v}_y;$$

подобнымъ же путемъ найдемъ моменты M_y, M_z и получимъ слѣдующія **аналитическія выраженія** *моментовъ вектора относительно осей координатъ*:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_{ox}(\overline{\mathrm{v}}) &= \mathrm{M}_x = y\mathrm{v}_z - z\mathrm{v}_y \\ \mathrm{M}_{oy}(\overline{\mathrm{v}}) &= \mathrm{M}_y = z\mathrm{v}_x - x\mathrm{v}_z \\ \mathrm{M}_{oz}(\overline{\mathrm{v}}) &= \mathrm{M}_z = x\mathrm{v}_y - y\mathrm{v}_x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

Примѣчаніе. Формулы эти настолько часто встрѣчаются въ приложеніяхъ, что полезно указать мнемоническій способъ ихъ составленія: онѣ получаются одна изъ другой при помощи такъ называемой **круговой перестановки** буквъ x, y, z. Дѣйствительно, представивъ (черт. 29) буквы x, y, z размѣщенными на нѣкоторой окружности въ алфавитномъ порядкѣ, по движенію часовой стрѣлки, мы замѣчаемъ, что въ лѣвыхъ частяхъ этихъ равенствъ и въ первыхъ членахъ правыхъ частей буквы x, y, z идутъ въ указанномъ круговомъ порядкѣ

Черт. 29.

$$x,\ y,\ z;\quad y,\ z,\ x;\quad z,\ x,\ y;$$

послѣдніе же члены правыхъ частей получаются изъ первыхъ ихъ членовъ замѣною буквъ значками и значковъ буквами.

Если точка O_1, относительно которой берется линейный моментъ вектора, не совпадаетъ съ началомъ координатъ, то, обозначивъ черезъ (a, b, c) координаты этой точки O_1 и проведя черезъ нее

три новыя оси O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 соотвѣтственно параллельныя осямъ OX, OY, OZ и одинаково съ ними направленныя, мы знаемъ, что новыя координаты (x_1, y_1, z_1) точки приложенія вектора будутъ связаны съ ея старыми координатами (x, y, z) системою равенствъ:

$$x_1 = x - a, \quad y_1 = y - b, \quad z_1 = z - c,$$

проекціи же вектора $\bar{v}$ на старыя и новыя оси будутъ соотвѣственно равны, слѣдовательно *проекціи линейнаго момента* $\overline{M}_{0_1}(\bar{v})$ на оси O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 или, что все равно, *на оси* OX, OY, OZ *опредѣляются изъ равенствъ*:

$$\left.\begin{aligned} M_{0_1}(\bar{v}) \cos(M_{0_1}, X) &= y_1 v_z - z_1 v_y = (y-b)\, v_z - (z-c)\, v_y \\ M_{0_1}(\bar{v}) \cos(M_{0_1}, Y) &= z_1 v_x - x_1 v_z = (z-c)\, v_x - (x-a)\, v_z \\ M_{0_1}(\bar{v}) \cos(M_{0_1}, Z) &= x_1 v_y - y_1 v_x = (x-a)\, v_y - (y-b)\, v_x \end{aligned}\right\} (16).$$

§ 3. Три основныя величины.

1) **Длина**, **время** и **матерія**, какъ понятія первоначальныя, не подлежатъ опредѣленію, но мы можемъ сказать, что *онѣ суть нѣкоторыя* **величины**, *т. е. длина, время и матерія могутъ быть* **измѣряемы**.

Дѣйствительно, какъ извѣстно, каждую длину можно выразить при помощи нѣкотораго отрѣзка, называемаго **единицею длины** и числа, опредѣляющаго отношеніе данной длины къ этому отрѣзку.

Обозначивъ единицу длины черезъ $[L]$, мы приходимъ къ заключенію, что каждая длина s выразится произведеніемъ $[L]$ на нѣкоторое отвлеченное число (s), но для согласованія письма съ произношеніемъ и въ виду нѣкоторыхъ другихъ удобствъ, условились писать это произведеніе въ обратномъ порядкѣ; такимъ образомъ всякую длину s *символически* мы будемъ обозначать произведеніемъ

$$s = (s) . [L],$$

гдѣ (s) есть отвлеченное число, а $[L]$ выбранная единица длины. Удобство такого обозначенія сказывается при переходѣ отъ выраженія данной длины въ одной единицѣ къ выраженію той же длины въ другой единицѣ.

Напримѣръ

$$9\,[\text{арш.}] = 9\left[\frac{1}{3}\ \text{саж.}\right] = 3\ [\text{саж.}] = 3\ [7\ \text{фут.}] = 21\ [\text{фут.}]\ \text{и т. д.}$$

При физическихъ измѣреніяхъ за единицу длины принимается обыкновенно **сантиметръ**, а при техническихъ — **метръ**. При изготовленіи прототипа метра, для возможности его возстановленія, предполагалось сдѣлать метръ равнымъ 0,00000001 *четверти Парижскаго меридіана*, но позднѣйшія, болѣе точныя измѣренія этого меридіана показали, что изготовленный прототипъ не вполнѣ соотвѣтствуетъ указанной длинѣ.

Измѣреніе промежутковъ времени *между двумя моментами приводится къ измѣренію угловъ или дугъ.*

Дѣйствительно, періодичность кажущагося суточнаго вращенія небеснаго свода уже въ давнія времена обратила на себя вниманіе наблюдателей, дала въ наше распоряженіе вполнѣ опредѣленный промежутокъ времени — **звѣздныя сутки**, соотвѣтствующій полному обороту небеснаго свода и привела *къ представленію равныхъ промежутковъ времени, какъ промежутковъ соотвѣтствующихъ одному и тому же углу поворота небеснаго свода или одной изъ его звѣздъ.* Такимъ образомъ, если принять за единицу времени звѣздныя сутки, то промежутокъ времени, которому соотвѣтствуетъ уголъ поворота небеснаго свода на n^0, можетъ быть выраженъ числомъ $\frac{n}{360}$.

При физическихъ и техническихъ измѣреніяхъ за **единицу времени** обыкновенно принимаютъ **секунду средняго времени** или «**секунду**», какъ ее проще называютъ въ общежитіи, причемъ

$$\textbf{звѣздныя сутки} = 86164{,}89\ \textbf{«секундъ»}.$$

Обозначивъ вообще единицу времени черезъ $[T]$, каждый промежутокъ времени t, согласно нашему условію, мы будемъ выражать произведеніемъ

$$t = (t)\,.\,[T],$$

гдѣ (t) есть отвлеченное число, а $[T]$ — выбранная единица времени.

Напримѣръ

$$120\ [\text{сек.}] = 120\left[\frac{1}{60}\ \text{мин.}\right] = 2\ [\text{мин.}] = \frac{1}{30}\ [\text{часъ}].$$

Матеріальнымъ тѣломъ *называется геометрическое тѣло, заполненное матеріею или веществомъ.*

Матеріальныя тѣла могутъ отличаться другъ отъ друга разнообразными физическими, химическими и другими свойствами, но всѣ они обладаютъ однимъ общимъ свойствомъ, а именно вблизи поверхности земли (въ пустотѣ) стремятся падать и оказываютъ давленія на опоры, препятствующія ихъ паденію; *давленіе это называется* **вѣсомъ** *тѣла.*

Массою *матеріальнаго тѣла называется количество матеріи въ немъ заключающееся. Массы дистиллированной воды при одной и той же температурѣ, а именно при 4° Цельсія, считаются пропорціональными замѣщаемымъ ими объемамъ, массы же вообще всѣхъ тѣлъ считаютъ равными, когда равны ихъ вѣса въ пустотѣ;* причемъ равенство вѣсовъ опредѣляется при помощи всѣмъ извѣстныхъ приборовъ: рычажныхъ, пружинныхъ и другихъ вѣсовъ.

Такимъ образомъ, *если мы примемъ за единицу массы массу нѣкотораго опредѣленнаго объема дистиллированной воды, при 4° Цельсія, то измѣреніе массы какого-нибудь тѣла приведется*:

1) *къ нахожденію такого объема указанной воды, вѣсъ котораго въ пустотѣ равенъ вѣсу даннаго тѣла,* и

2) *къ опредѣленію отношенія полученннаго объема воды къ объему воды, соотвѣтствующему выбранной единицѣ массы.*

При физическихъ измѣреніяхъ за **единицу массы** условились принимать **«граммъ»** или *массу кубическаго сантиметра дистиллированной воды при 4° Цельсія*, при техническихъ же измѣреніяхъ— **килограммъ**, *равный 1000 граммамъ или массѣ одного кубическаго дециметра таковой же воды.*

Обозначивъ единицу массы черезъ $[M]$, мы, подобно предыдущему, будемъ выражать массу m каждаго тѣла произведеніемъ

$$m = (m)\,[M],$$

гдѣ (m) есть отвлеченное число, а $[M]$ выбранная единица массы.

Напримѣръ

$$500\ [\text{граммъ}] = \frac{1}{2}\ [\text{килограммъ}].$$

Примѣчаніе. Приведя такимъ образомъ вычисленіе массы тѣла къ взвѣшиванію, мы должны оговориться, что массу даннаго тѣла, какъ опредѣленное количество матеріи въ немъ заключающееся, принято считать за неотъемлемое свойство тѣла, тогда какъ вѣсъ его въ пустотѣ, т. е. то давленіе, которое оно оказываетъ на опоры, есть свойство матеріи, проявляющееся вблизи поверхности земли и, какъ показали опыты, *вѣсъ одного и того же тѣла зависитъ отъ географическаго по-*

ложенія (*широты мѣста*) *тѣла на землѣ*. Не входя пока въ объясненіе этого явленія, мы замѣтимъ, что *вѣсъ одного и того же тѣла увеличивается по направленію отъ экватора къ полюсамъ*, такъ что наименьшій вѣсъ тѣла будетъ на экваторѣ, а наибольшій на полюсахъ, хотя *тѣла, равновѣсомыя въ пустотѣ на одномъ географическомъ пунктѣ, остаются таковыми на всѣхъ мѣстахъ земной поверхности* и равенство вѣсовъ тѣлъ въ пустотѣ, какъ мы указали, принято за опредѣленіе равенства ихъ массъ или количествъ матеріи.

2. **Сложныя величины и символы ихъ единицъ.** Единицы длины, времени и массы называются **основными единицами**, такъ какъ *измѣреніе всѣхъ величинъ приводится къ измѣренію этихъ трехъ основныхъ величинъ.* Напр. измѣреніе площадей и объемовъ, какъ извѣстно изъ геометріи, приводится къ измѣренію длинъ; причемъ, если принять за единицу площади площадь квадрата, построеннаго на выбранной единицѣ длины $[L]$, то при увеличеніи единицы длины въ k разъ, т. е. при выборѣ новой единицы длины $[L_1] = [k\,L]$, единица площади увеличится въ k^2 разъ, и потому число, измѣряющее ту же площадь при новой единицѣ длины $[L_1]$, уменьшится въ k^2 разъ; чтобы не повторять при переходѣ къ новой единицѣ подобнаго разсужденія, условились обозначать каждую площадь u произведеніемъ

$$(u)\,[L^2],$$

гдѣ (u) есть отвлеченное число, измѣряющее площадь при выбранной единицѣ длины $[L]$, а $[L^2]$ называется **символомъ единицы площади**, *такъ какъ* L^2 *измѣняется съ измѣненіемъ единицы длины такъ же, какъ и единица площади*, и потому, пользуясь такимъ обозначеніемъ, *мы можемъ переходить къ выраженію данной площади въ новой единицѣ простою подстановкою въ указанный символъ вмѣсто данной единицы ея выраженія черезъ новую.* Напр.

$$9 \text{ кв. арш.} = 9\,[\text{арш.}^2] = 9\left[\left(\frac{1}{3}\text{ саж.}\right)^2\right] =$$

$$= 1\,[\text{саж.}^2] = 1.\ [7^2\text{ фут.}^2] = 49\,[\text{фут.}^2] \text{ и т. д.}$$

Подобнымъ же образомъ, если за единицу объема принять объемъ куба, построеннаго на выбранной единицѣ длины $[L]$, то каждый объемъ v выразится произведеніемъ

$$(v)\,[L^3],$$

гдѣ (v) есть число, измѣряющее данный объемъ, а $[L^3]$ **символъ**

единицы объема, *т. е. символъ, дающій возможность переходить отъ выраженія даннаго объема при выбранной единицы длины къ выраженію того же объема при новой единицѣ длины.* Напримѣръ.

$$27 \text{ куб. арш.} = 27\ [\text{арш.}^3] = 27 \left[\frac{1}{3^3}\text{саж.}^3\right] =$$

$$= 1\ [\text{саж.}^3] = 1\ [7^3 \text{ фут.}] = 343\ [\text{фут.}^3] \text{ и т. д.}$$

Площади и объемы принадлежатъ къ разряду **сложныхъ величинъ**; въ механикѣ мы встрѣтимся съ цѣлымъ рядомъ сложныхъ величинъ; причемъ, устанавливая понятіе о новой сложной величинѣ, мы всякій разъ будемъ указывать не только ея **единицу**, но и **символъ ея единицы**, *т. е. символъ, служащій для вычисленія той же величины при новой системѣ основныхъ единицъ.*

3. **Однородность формулъ**. Символъ единицы какой-нибудь величины называютъ еще ея **измѣреніемъ**. Величины одного и того же измѣренія называются **однородными**.

Всѣ величины отнесенныя къ своимъ единицамъ выражаются числами ихъ измѣряющими; но числа эти, какъ мы видимъ, *зависятъ отъ выбора основныхъ единицъ*, т. е. измѣняются вмѣстѣ съ измѣненіемъ этихъ послѣднихъ, поэтому всѣ равенства или формулы, выражающія зависимость между различными величинами *при произвольныхъ основныхъ единицахъ*, необходимо должны быть *однородными*, т. е. всѣ отдѣльные члены ихъ должны быть одного и того же измѣренія, ибо въ противномъ случаѣ, съ измѣненіемъ основныхъ единицъ, отдѣльные члены этихъ формулъ измѣнятся въ различное число разъ и равенства нарушатся.

Напримѣръ:

Площадь круга $u = \pi r^2$; въ лѣвой части этого равенства находится площадь, т. е. величина имѣющая измѣреніе $[L^2]$, въ правой же части π есть отвлеченное число, не зависящее ни отъ какихъ единицъ, а $r = (r)\ [L]$, гдѣ (r) есть число измѣряющее радіусъ r при единицѣ длины $[L]$; слѣдовательно $\pi r^2 = \pi (r)^2\ [L^2]$, т. е. πr^2 имѣетъ измѣреніе площади.

Наоборотъ; если, при рѣшеніи нѣкоторой геометрической задачи, по двумъ даннымъ отрѣзкамъ a, b найдено для искомаго отрѣзка x выраженіе:

$$x = a - b^2,$$

то, не справляясь ни о задачѣ, ни о ходѣ ея рѣшенія можемъ утверждать, что приведенное рѣшеніе невозможно; дѣйствительно, съ уменьшеніемъ единицы длины положимъ въ 2 раза, числа измѣряющія отрѣзки x и a увеличатся въ 2 раза, а число измѣряющее величину b^2 увеличится въ 4 раза и равенство нарушится.

4. **Абсолютная система основныхъ единицъ.** Зная символы единицъ или измѣренія величинъ, мы всегда можемъ перейти отъ числа измѣряющаго данную величину при одной системѣ основныхъ единицъ къ числу измѣряющему ту же величину при другой системѣ, а потому для простоты можно было бы разъ на всегда условиться въ выборѣ трехъ основныхъ единицъ; такъ при физическихъ измѣреніяхъ въ настоящее время принята *сантиметръ-граммъ-секундная* система основныхъ единицъ, называемая **абсолютною системою единицъ**, но при техническихъ измѣреніяхъ обыкновенно пользуются системою: *метръ-килограммъ-секунда*, поэтому въ теоретической части нашего изложенія мы не будемъ фиксировать систему основныхъ единицъ, и съ этою цѣлью сохранимъ для обозначенія единицъ длины, времени и массы введенные нами общіе символы $[L]$, $[T]$, $[M]$.

§ 4. Предметъ и раздѣленіе механики.

Механика *имѣетъ своею основновною цѣлью изученіе дѣйствія* **силъ** *на матеріальныя тѣла.*

Понятіе о силѣ тѣсно связано съ понятіемъ о матеріи; такъ, желая привести въ движеніе нѣкоторое покоющееся тѣло, мы знаемъ, что для этого надо употребить извѣстное «усиліе», что усиліе это можетъ быть «больше» или «меньше», смотря по размѣрамъ тѣла и по обстоятельствамъ того движенія, которое мы желаемъ ему сообщить; также приходится употребить извѣстное усиліе для того, чтобы остановить движущееся тѣло, или вообще измѣнить нѣкоторыя обстоятельства его движенія.

Обобщая эти явленія, мы приписываемъ матеріи свойство **инерціи**, одно изъ проявленій котораго заключается въ томъ, что никакое матеріальное тѣло само собою, безъ дѣйствія нѣкоторыхъ **постороннихъ причинъ**, не можетъ перейти изъ состоянія покоя въ движеніе или, наоборотъ, изъ движенія въ покой, и если такія явленія наблюдаются, то ихъ надо приписать дѣйствію нѣкоторыхъ **внѣшнихъ причинъ**, примѣрами которыхъ могутъ служить наши собственныя мускульныя напряженія.

Эти внѣшнія причины указанныхъ явленій, въ чемъ бы они ни состояли, называютъ **силами**, причемъ ежедневный опытъ вызываетъ въ насъ представленіе о силѣ какъ о нѣкоторой величинѣ, прежде чѣмъ мы научаемся точному измѣренію силъ.

Какъ составляется въ насъ такое представленіе о силѣ, это во всякомъ случаѣ не есть вопросъ механики, которая изучаетъ дѣйствіе силъ на матеріальныя тѣла, *допустивъ предварительно изъ опытовъ и наблюденій нѣкоторыя* **положенія**, дающія возможность построить эту науку подобно тому, какъ геометрія построена на своихъ аксіомахъ.

Но для точной формулировки этихъ положеній приходится предварительно познакомиться съ нѣкоторыми обстоятельствами и свойствами движеній матеріальныхъ тѣлъ, независимо отъ причинъ ихъ вызывающихъ, или съ движеніями геометрическихъ точекъ и тѣлъ; эта часть механики называется **кинематикою,** та же ея часть, которая изслѣдуетъ дѣйствія силъ на матеріальныя тѣла, носитъ названіе **кинетики.**

Итакъ мы можемъ высказать слѣдующее опредѣленіе: **механика** *есть наука о движеніи и дѣйствіи силъ на матеріальныя тѣла*; согласно съ этимъ опредѣленіемъ механика раздѣляется на двѣ части: *кинематику* и *кинетику*:

I. **Кинематика** *изучаетъ движенія матеріальныхъ тѣлъ независимо отъ причинъ, вызывающихъ эти движенія; другими словами, эта часть механики изслѣдуетъ различныя обстоятельства и свойства движеній геометрическихъ точекъ и тѣлъ;*

II. **Кинетика** *изучаетъ дѣйствія силъ на матеріальныя тѣла*, причемъ силы, дѣйствуя на матеріальныя тѣла, вообще говоря, сообщаютъ имъ нѣкоторыя движенія, но иногда бываетъ, что матеріальное тѣло подъ дѣйствіемъ нѣсколькихъ силъ, одновременно къ нему приложенныхъ, остается въ **покоѣ** или **равновѣсіи**, поэтому кинетику въ свою очередь раздѣляютъ на *динамику* и *статику*.

1) **Динамика** *изучаетъ вопросы о движеніи матеріальныхъ тѣлъ въ зависимости отъ причинъ или силъ ихъ вызывающихъ.*

2) **Статика** *изслѣдуетъ условія, при которыхъ силы, приложенныя къ матеріальному тѣлу, не нарушаютъ его равновѣсія и разсматриваетъ различные вопросы, связанные съ равновѣсіемъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ.*

(Дополненіе къ § 1 введенія)

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§ 1. Непрерывныя функціи отъ одной независимой перемѣнной и ихъ графики . 1

§ 2. Производная y' отъ данной непрерывной функціи $y=f(x)$ 3

Опредѣленіе производной 4

Построеніе графика производной 5

§ 3. Интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ отъ данной непрерывной функціи $y=f(x)$. . . 7

Опредѣленіе интеграла 10

Построеніе графика интеграла 12

§ 4. Дифференціалъ функціи 13

§ 5. Зависимость между функціей и интеграломъ отъ ея производной 15

§ 6. Пріемъ для вычисленія интеграловъ 16

§ 7. Первообразныя функціи и ихъ неопредѣленность 17

§ 8. Второе опредѣленіе интеграла 19

§ 9. Неопредѣленный интегралъ 20

§ 10. Заключеніе 21

§ 11. Примѣры на построеніе графиковъ производныхъ и интеграловъ . . . 22

§ 12. Формулы для приближеннаго вычисленія интеграловъ 31

I. Формула трапецій 31

II. Формула Симпсона 32

ОПЕЧАТКА,

ЗАМѢЧЕННАЯ ВЪ ЧЕРТЕЖАХЪ.

На чертежѣ (5) предпослѣдняя ордината и послѣдняя площадка должны имѣть значки n—1 вмѣсто k—1, т. е. онѣ должны быть обозначены соотвѣтственно черезъ y_{n-1} и U_{n-1}.

ПОНЯТІЕ О ПРОИЗВОДНЫХЪ И ИНТЕГРАЛАХЪ ОТЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

(Дополненіе къ § 1 введенія).

§ 1. Непрерывныя функціи отъ одной независимой перемѣнной и ихъ графики.

Функціи. Во многихъ случаяхъ перемѣнныя величины бываютъ такъ между собою связаны, что каждому значенію одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное, или нѣсколько опредѣленныхъ значеній другой. Въ такомъ случаѣ та изъ этихъ перемѣнныхъ, которой приписываютъ произвольныя значенія, называется **независимой перемѣнною**, а другая, значенія которой опредѣляются по значеніямъ первой, называется ея **функціей**.

Напримѣръ:

1) Площадь круга есть функція его радіуса.

2) Разстояніе движущейся точки отъ нѣкоторой неподвижной точки есть функція времени.

Если перемѣнная величина y есть нѣкоторая функція независимой перемѣнной x, то обстоятельство это выражаютъ равенствами:

$$y=f(x),\ y=F(x) \text{ и т. под.}$$

Если каждому значенію независимой перемѣнной соотвѣтствуетъ одно значеніе функціи, то такая функція называется **однозначною**.

Напримѣръ:

$$x^2,\ 2x,\ 5+\sin x,\ tg\, x \text{ и т. под.}$$

суть однозначныя функціи отъ независимой перемѣнной x.

Функція называется **непрерывною**, *если при безконечно-маломъ измѣненіи независимой перемѣнной сама она измѣняется на величину безконечно-малую;* другими словами, если $y = f(x)$ есть непрерывная функція и мы дадимъ независимой перемѣнной безконечно-малое приращеніе Δx, то сама функція получитъ приращеніе

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

причемъ это приращеніе Δy *тоже будетъ безконечно-мало.*

Напримѣръ:

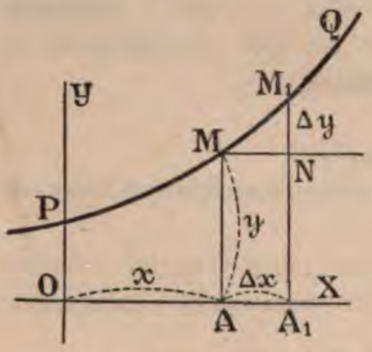
$y = x^2$ есть непрерывная функція отъ x; въ самомъ дѣлѣ, давая независимой перемѣнной безконечно-малое приращеніе Δx, мы видимъ, что функція наша получитъ приращеніе

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x\,(2x + \Delta x),$$

которое, при безконечной малости Δx, само будетъ безконечно мало.

Графикъ непрерывной функціи. Для большей наглядности каждую непрерывную функцію $y = f(x)$ можно представить **графически** въ видѣ нѣкоторой кривой.

Съ этою цѣлью проведемъ на плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя оси координатъ OX, OY (черт. 1) и будемъ по оси OX откладывать отъ начала координатъ O въ извѣстномъ масштабѣ вправо положительныя, а влѣво отрицательныя значенія независимой перемѣнной x; тогда каждому значенію x на оси OX, или ея продолженіи влѣво, будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная точка A; возставивъ въ этой точкѣ A перпендикуляръ къ оси OX и отложивъ на немъ въ данномъ масштабѣ въ ту или другую сторону, смотря по знаку, соотвѣтствующее значеніе функціи y (— въ сторону оси OY, если $y > 0$ и — въ противоположную сторону, если $y < 0$), мы получимъ нѣкоторую опредѣленную точку M. Предполагая такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ значеній независимой перемѣнной x, у насъ, въ силу непрерывности функціи



Черт. 1.

$y = f(x)$, получится нѣкоторая сплошная кривая PQ, называемая **графикомъ** *данной непрерывной функціи*. Отрѣзки OA и AM называются въ аналитической геометріи соотвѣтственно **абсциссою** и **ординатою** точки M; причемъ ясно, что абсцисса точки M есть графическое изображеніе значенія независимой перемѣнной x, а ордината — графическое изображеніе соотвѣтствующаго значенія функціи y.

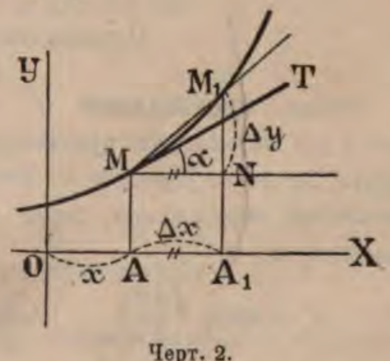
Такимъ образомъ *графикъ функціи* $y = f(x)$ *даетъ возможность вычислить при помощи масштаба значеніе функціи y для любого значенія независимой перемѣнной x*, для чего достаточно построить точку A, соотвѣтствующую данному значенію независимой перемѣнной x, и измѣрить проходящую черезъ нее ординату AM графика данной функціи.

Построивъ наконецъ точку A_1 (черт. 1), соотвѣтствующую новому значенію $(x + \Delta x)$ независимой перемѣнной и замѣтивъ точку пересѣченія N ординаты A_1M_1 съ прямою MN, проведенною черезъ точку M параллельно оси OX, мы видимъ, что *приращеніе функціи Δy графически выразится отрѣзкомъ* NM_1.

Соотвѣтственно двумъ пріемамъ пользованія безконечно-малыми величинами, графикъ каждой непрерывной функціи даетъ намъ геометрическія представленія **двухъ новыхъ функцій** *непосредственно связанныхъ съ данной функціей указанными пріемами.*

§ 2. Производная y' отъ данной непрерывной функціи $y = f(x)$.

Проведя въ нѣкоторой точкѣ M (черт. 2) графика данной функціи $y = f(x)$ касательную MT, условимся подразумѣвать подъ «**направленіемъ касательной къ графику**» *то ея направленіе, которое составляетъ* **острый** *уголъ съ осью OY*; въ такомъ случаѣ мы видимъ, что величина $tg\,\alpha = tg(TMN)$ угла между направленіями этой касательной и оси абсциссъ зависитъ, вообще говоря, отъ положенія точки M на графикѣ, т. е. *этотъ $tg\,\alpha$ есть нѣкоторая функція*



Черт. 2.

отъ абсциссы x; но изъ опредѣленія касательной MT, какъ предѣльнаго положенія сѣкущей MM_1, когда точка M_1 безпредѣльно приближается къ точкѣ M, мы находимъ, что

$$tg\,\alpha = \text{пред.}\ tg\,(M_1MN) = \text{пред.}\ \frac{NM_1}{MN} = \text{пред.}\ \frac{NM_1}{AA_1} = \text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha,$$

т. е. предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія Δy непрерывной функціи къ безконечно-малому приращенію Δx независимой перемѣнной, есть нѣкоторая новая функція отъ той же независимой перемѣнной, геометрически выражающаяся tg-омъ угла между направленіями касательной къ графику данной функціи и оси абсциссъ.

Функція эта называется **производною** отъ данной функціи $y=f(x)$ и обозначается знаками y', или $f'(x)$.

Напримѣръ:

Если $y = x^2$, то

$$y' = \text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \text{пред.}\left(\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} =$$

$$= \text{пред.}\ (2x + \Delta x)_{\Delta x = 0} = 2x.$$

Опредѣленіе производной.

Итакъ, **производною** y' *отъ данной непрерывной функціи* $y = f(x)$ *называется предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія* Δy *этой функціи къ безконечно-малому приращенію* Δx *независимой перемѣнной, когда это послѣднее безпредѣльно уменьшается, т. е.*

$$y' = \text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \text{пред.}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0}.$$

Производная $y' = f'(x)$ *есть нѣкоторая* **функція** *отъ независимой перемѣнной x,* **геометрически** *выражающаяся tg-омъ угла между*

направленіями касательной въ соотвѣтственныхъ точкахъ графика данной функціи $y = f(x)$ и оси абсциссъ.

Примѣры:

1) **Если** $y = ax^m$, **гдѣ** a **есть нѣкоторый коэффиціентъ, а** m **цѣлое и положительное число, то**

$$y' = \text{пред.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{пред.} \frac{a(x + \Delta x)^m - ax^m}{\Delta x} =$$

$$= \text{пред.}\ a \left[mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^{m-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^m \right]_{\Delta x = 0} = max^{m-1}.$$

Итакъ

$$(ax^m)' = max^{m-1}.$$

Напримѣръ:

$$(3x^2)' = 6x.\quad (2x^4)' = 8x^3 \text{ и т. д.}$$

2) $y = \sin x$; $y' = ?$.

$$y' = \text{пред.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{пред.} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \text{пред.} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \text{пред.} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}};$$

подставивъ въ знаменателѣ послѣдняго выраженія вмѣсто $\frac{\Delta x}{2}$ **эквивалентную ему величину** $\sin\frac{\Delta x}{2}$ **и сокративъ затѣмъ числителя и знаменателя на этотъ общій множитель, приходимъ къ заключенію, что**

$$y' = (\sin x)' = \text{пред.} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

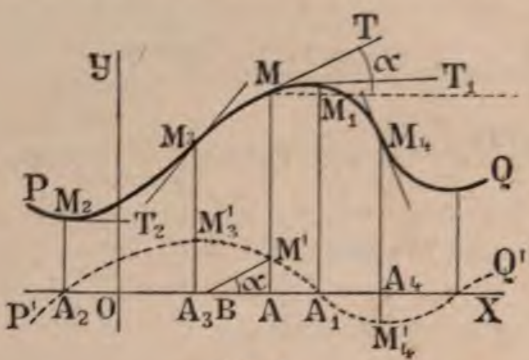
3) **Подобнымъ же образомъ найдемъ, что**

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Построеніе графика производной.

Положимъ, кривая PQ (черт. 3) есть графикъ данной непрерывной функціи $y = f(x)$; для построенія графика $P'Q'$ производной $y' = f'(x)$ мы воспользуемся ея геометрическимъ значеніемъ. При-

нявъ во вниманіе, что значеніе производной при данномъ значеніи независимой перемѣнной x геометрически выражается $tg\,\alpha$ угла между направленіями касательной MT въ соотвѣтственной точкѣ графика PQ и оси абсциссъ, нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго построенія точекъ графика производной $y' = f'(x)$ по графику PQ данной функціи $y = f(x)$: *проведемъ въ нѣкоторой точкѣ A оси абсциссъ ординату AM даннаго графика PQ и отложимъ въ лѣвую сторону отъ точки A по этой оси отрѣзокъ AB, равный масштабной единицѣ длины $[l]$; проведя затѣмъ черезъ точку B линію BM', параллельную касательной MT, проведенной къ графику PQ въ концѣ выбранной ординаты BM, замѣтимъ точку пересѣченія M' линіи BM' съ этою ординатою; въ такомъ случаѣ эта точка M' будетъ принадлежать графику производной.*



Черт. 3.

Дѣйствительно, изъ прямоугольнаго треугольника $(M'AB)$ мы имѣемъ:

$$\frac{AM'}{AB} = tg\,(M'BA),$$

но по построенію $AB = [l]$ и $\angle\,(M'BA) = \alpha$; слѣдовательно

$$\frac{AM'}{[l]} = tg\,\alpha,$$

т. е. отрѣзокъ AM' содержитъ въ себѣ столько масштабныхъ единицъ длины $[l]$, сколько въ $tg\,\alpha$ заключается отвлеченныхъ единицъ; но $tg\,\alpha = y'$, слѣдовательно отрѣзокъ AM' есть графическое изображеніе значенія производной y' для значенія x независимой перемѣнной, соотвѣтствующаго точкѣ A.

Предположивъ наконецъ такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ точекъ A оси OX, мы получимъ графикъ $P'Q'$ производной $y' = f'(x)$.

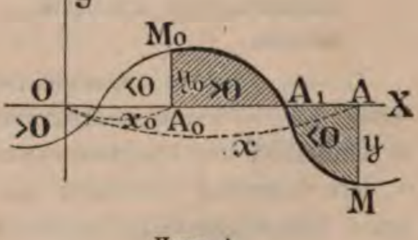
Примѣчаніе. *«Высшимъ» и «низшимъ»* точкамъ M_1, M_2 графика PQ (черт. 3), т. е. такимъ точкамъ, въ которыхъ касательныя M_1T_1, M_2T_2 параллельны оси OX, соотвѣтствуютъ *точки пересѣченія графика* $P'Q'$ съ этою осью, такъ какъ въ этихъ точкахъ $tg\,\alpha$ обращается въ нуль.

Точкамъ *«перегиба»* M_3, M_4, т. е. такимъ точкамъ, въ которыхъ графикъ PQ переходитъ съ одной стороны касательной на другую, соотвѣтствуютъ *высшая* и *низшая* точки M'_3, M'_4 графика $P'Q'$, такъ какъ касательная къ графику PQ до прохожденія ея точки касанія черезъ точки перегиба отклоняется въ одну сторону, а по прохожденіи черезъ эти точки — въ другую, слѣдовательно $tg\,\alpha_3$ и $tg\,\alpha_4$ будутъ соотвѣтственно наибольшимъ и наименьшимъ изъ рядомъ лежащихъ значеній $tg\,\alpha$, и потому соотвѣтствующія имъ ординаты $A_3M'_3$ и $A_4\,M'_4$ будутъ тоже наибольшею и наименьшею изъ рядомъ лежащихъ ординатъ графика $P'Q'$, т. е. точки M'_3 и M'_4 будутъ соотвѣтственно *«высшею»* и *«низшею»* точками графика $P'Q'$.

§ 3. Интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ отъ данной непрерывной функціи $y = f(x)$.

Положимъ, что данная функція $y = f(x)$ остается **непрерывною** въ предѣлахъ измѣненія независимой перемѣнной отъ нѣкотораго начальнаго значенія x_0 до перемѣннаго значенія x.

Проведя въ графикѣ этой функціи (черт. 4) начальную ординату $A_0M_0 = y_0$, соотвѣтствующую абсциссѣ x_0, условимся называть **алгебраическою площадью** $U_{x_0}^{x}$ **графика** *алгебраическую сумму площадокъ между дугою графика* $\widehat{M_0M}$, *осью абсциссъ и ординатами* y_0, y, *соотвѣтствующими абсциссамъ* x_0, x, *считая при этомъ площадки графика* (черт. 4):



Черт. 4.

1) **положительными**, *когда онѣ находятся* **вправо** *отъ начальной ординаты и* **надъ** *осью абсциссъ или* **влѣво** *отъ этой ординаты и* **подъ** *осью абсциссъ; наоборотъ,*

2) **отрицательными**, *когда онѣ находятся* **вправо** *отъ начальной ординаты* **подъ** *осью абсциссъ и* **влѣво—надъ** *этою осью.*

Напр. на нашемъ чертежѣ (4)

$$U_{x_0}^{x} = \text{пл. } (A_0 M_0 A_1) - \text{пл. } (A_1 A M).$$

Разбивъ основаніе $A_0 A$ алгебраической площади $U_{x_0}^{x}$ графика (черт. 5) функціи $y = f(x)$ на n ничтожно малыхъ элементовъ и проведя черезъ всѣ дѣленія соотвѣтствующія имъ ординаты y_1, y_2, ... y_{n-1}, мы можемъ представить эту площадь $U_{x_0}^{x}$, какъ алгебраическую сумму безконечно-большого числа безконечно-малыхъ площадокъ, т. е.

$$U_{x_0}^{x} = (u_0 + u_1 + u_2 + \ \ldots \ + u_{n-1});$$

но каждая элементарная площадка u_i, какъ мы знаемъ, по абсолютной величинѣ *эквивалентна* площадкѣ прямоугольника, построеннаго на ея основаніи $A_i A_{i+1}$ и ординатѣ y_i, т. е. эквивалентна абсолютной величинѣ произведенія $y_i\,(x_{i+1} - x_i)$; кромѣ того нетрудно убѣдиться, что и знакъ послѣдняго произведенія совпадаетъ съ *условнымъ* знакомъ площадки u_i, такъ какъ при $y_i < 0$ площадка эта лежитъ подъ осью абсциссъ, а при $(x_{i+1} - x_i) < 0$ она должна находиться влѣво отъ начальной ординаты.

Черт. 5.

Такъ на нашемъ чертежѣ (5) площадка u_i и произведеніе $y_i\,(x_{i+1} - x_i)$ *положительны*, а площадка u_k и произведеніе $y_k\,(x_{k+1} - x_k)$ *отрицательны*.

Итакъ, *каждая элементарная площадка u_i по величинѣ и по знаку эквивалентна произведенію* $y_i\,(x_{i+1} - x_i)$; принимая наконецъ во вниманіе, что предѣлъ суммы абсолютныхъ значеній площадокъ u_i есть *конечная* величина, мы, въ силу **основного принципа** *замѣны эквивалентныхъ безконечно-малыхъ величинъ*, приходимъ къ заключенію, что

$$U_{x_0}^{x} =$$

$$= \text{пред.}\,[y_0(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})]_{n=\infty} =$$

$$= \text{пред.}\ [f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + f(x_{n-1})(x - x_{n-1})]_{n=\infty} = \\ \text{пред.} \sum_{x_0}^{x} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

или, обозначивъ для краткости послѣдовательныя безконечно-малыя разности $(x_{i+1} - x_i)$ черезъ Δx_i, мы видимъ, что

$$\text{пред.} \sum_{x_0}^{x} f(x_i)\,\Delta x_i = U_{x_0}^{x};$$

т. е. если функція $y = f(x)$ въ предѣлахъ измѣненія независимой перемѣнной отъ x_0 до x остается **непрерывною**, *то предѣлъ суммы произведеній послѣдовательныхъ значеній $f(x_i)$ этой функціи на соотвѣтственныя безконечно-малыя приращенія Δx_i независимой перемѣнной, когда суммированіе это распространяется на всѣ промежуточныя значенія независимой перемѣнной въ предѣлахъ отъ x_0 до x, есть нѣкоторая* **конечная** *величина,* **геометрически** *выражающаяся* **алгебраическою площадью** $U_{x_0}^{x}$ *графика данной функціи, заключенною между соотвѣтственными начальною и конечною ординатами y_0, y.*

Но алгебраическая площадь $U_{x_0}^{x}$ обращается въ нуль при $x = x_0$ и вообще величина ея зависитъ отъ положенія перемѣнной ординаты y, т. е. площадь эта *есть нѣкоторая функція* отъ независимой перемѣнной x, обращающаяся въ нуль при $x = x_0$, слѣдовательно и *указанный предѣлъ*:

$$\text{пред.} \sum_{x_0}^{x} f(x_i)\,\Delta x_i$$

есть нѣкоторая **функція** *отъ независимой перемѣнной x, обращающаяся въ нуль при $x = x_0$; функція эта называется* **интеграломъ** *)

---

*) Терминъ **«интегралъ»** происходитъ отъ латинскаго слова *integer* — **весь**, *цѣлый*; такимъ образомъ корень этого термина указываетъ на второй пріемъ пользованія безконечно-малыми величинами, т. е. на то, что ***каждая величина есть сумма всѣхъ ея безконечно-малыхъ элементовъ***, или что ***цѣлое*** есть сумма ***всѣхъ*** его частей.

Функція называется **непрерывною**, *если при безконечно-маломъ измѣненіи независимой перемѣнной сама она измѣняется на величину безконечно-малую;* другими словами, если $y = f(x)$ есть непрерывная функція и мы дадимъ независимой перемѣнной безконечно-малое приращеніе Δx, то сама функція получитъ приращеніе

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

причемъ это приращеніе Δy *тоже будетъ безконечно-мало.*

Напримѣръ:

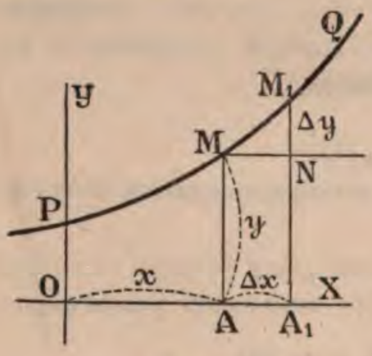
$y = x^2$ есть непрерывная функція отъ x; въ самомъ дѣлѣ, давая независимой перемѣнной безконечно-малое приращеніе Δx, мы видимъ, что функція наша получитъ приращеніе

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x\,(2x + \Delta x),$$

которое, при безконечной малости Δx, само будетъ безконечно мало.

Графикъ непрерывной функціи. Для большей наглядности каждую непрерывную функцію $y = f(x)$ можно представить **графически** въ видѣ нѣкоторой кривой.

Съ этою цѣлью проведемъ на плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя оси координатъ OX, OY (черт. 1) и будемъ по оси OX откладывать отъ начала координатъ O въ извѣстномъ масштабѣ вправо положительныя, а влѣво отрицательныя значенія независимой перемѣнной x; тогда каждому значенію x на оси OX, или ея продолженіи влѣво, будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная точка A; возставивъ въ этой точкѣ A перпендикуляръ къ оси OX и отложивъ на немъ въ данномъ масштабѣ въ ту или другую сторону, смотря по знаку, соотвѣтствующее значеніе функціи y (— въ сторону оси OY, если $y > 0$ и — въ противоположную сторону, если $y < 0$), мы получимъ нѣкоторую опредѣленную точку M. Предполагая такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ значеній независимой перемѣнной x, у насъ, въ силу непрерывности функціи



Черт. 1.

$y=f(x)$, получится нѣкоторая сплошная кривая PQ, называемая **графикомъ** *данной непрерывной функціи.* Отрѣзки OA и AM называются въ аналитической геометріи соотвѣтственно **абсциссою** и **ординатою** точки M; причемъ ясно, что абсцисса точки M есть графическое изображеніе значенія независимой перемѣнной x, а ордината — графическое изображеніе соотвѣтствующаго значенія функціи y.

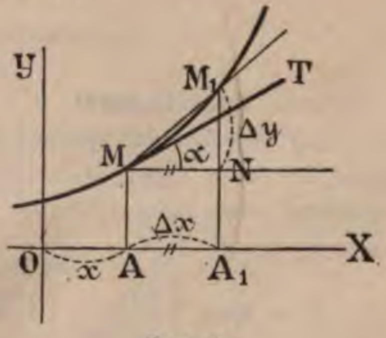
Такимъ образомъ *графикъ функціи $y=f(x)$ даетъ возможность вычислить при помощи масштаба значеніе функціи y для любого значенія независимой перемѣнной x,* для чего достаточно построить точку A, соотвѣтствующую данному значенію независимой перемѣнной x, и измѣрить проходящую черезъ нее ординату AM графика данной функціи.

Построивъ наконецъ точку A_1 (черт. 1), соотвѣтствующую новому значенію $(x+\Delta x)$ независимой перемѣнной и замѣтивъ точку пересѣченія N ординаты A_1M_1 съ прямою MN, проведенною черезъ точку M параллельно оси OX, мы видимъ, что *приращеніе функціи Δy графически выразится отрѣзкомъ NM_1.*

Соотвѣтственно двумъ пріемамъ пользованія безконечно-малыми величинами, графикъ каждой непрерывной функціи даетъ намъ геометрическія представленія **двухъ новыхъ функцій** *непосредственно связанныхъ съ данной функціей указанными пріемами.*

§ 2. Производная y' отъ данной непрерывной функціи $y=f(x)$.

Проведя въ нѣкоторой точкѣ M (черт. 2) графика данной функціи $y=f(x)$ касательную MT, условимся подразумѣвать подъ «**направленіемъ касательной къ графику**» *то ея направленіе, которое составляетъ* **острый** *уголъ съ осью OY*; въ такомъ случаѣ мы видимъ, что величина $tg\,\alpha = tg(TMN)$ угла между направленіями этой



Черт. 2.

касательной и оси абсциссъ зависитъ, вообще говоря, отъ положенія точки M на графикѣ, т. е. *этотъ $tg\,\alpha$ есть нѣкоторая функція*

отъ абсциссы x; но изъ опредѣленія касательной MT, какъ предѣльнаго положенія сѣкущей MM_1, когда точка M_1 безпредѣльно приближается къ точкѣ M, мы находимъ, что

$$tg\,\alpha = \text{пред.}\ tg\,(M_1MN) = \text{пред.}\ \frac{NM_1}{MN} = \text{пред.}\ \frac{NM_1}{AA_1} = \text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha,$$

т. е. *предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія* Δy *непрерывной функціи къ безконечно-малому приращенію* Δx *независимой перемѣнной, есть нѣкоторая новая функція отъ той же независимой перемѣнной, геометрически выражающаяся tg-омъ угла между направленіями касательной къ графику данной функціи и оси абсциссъ.*

Функція эта называется **производною** отъ данной функціи $y=f(x)$ и обозначается знаками y', или $f'(x)$.

Напримѣръ:

Если $y = x^2$, то

$$y' = \text{пред.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \text{пред.} \left(\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} =$$

$$= \text{пред.}\ (2x + \Delta x)_{\Delta x = 0} = 2x.$$

Опредѣленіе производной.

Итакъ, **производною** y' *отъ данной непрерывной функціи* $y = f(x)$ *называется предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія* Δy *этой функціи къ безконечно-малому приращенію* Δx *независимой перемѣнной, когда это послѣднее безпредѣльно уменьшается, т. е.*

$$y' = \text{пред.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \text{пред.} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0}.$$

Производная $y' = f'(x)$ *есть нѣкоторая* **функція** *отъ независимой перемѣнной* x, **геометрически** *выражающаяся tg-омъ угла между*

направленіями касательной въ соотвѣтственныхъ точкахъ графика данной функціи $y = f(x)$ и оси абсциссъ.

Примѣры:

1) Если $y = ax^m$, гдѣ a есть нѣкоторый коэффиціентъ, а m цѣлое и положительное число, то

$$y' = \text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{пред.}\ \frac{a(x+\Delta x)^m - ax^m}{\Delta x} =$$

$$= \text{пред.}\ a\left[mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^m\right]_{\Delta x = 0} = max^{m-1}.$$

Итакъ

$$(ax^m)' = max^{m-1}.$$

Напримѣръ:

$$(3x^2)' = 6x.\quad (2x^4)' = 8x^3 \text{ и т. д.}$$

2) $y = \sin x$; $y' = ?$.

$$y' = \text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{пред.}\ \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \text{пред.}\ \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \text{пред.}\ \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}};$$

подставивъ въ знаменателѣ послѣдняго выраженія вмѣсто $\frac{\Delta x}{2}$ эквивалентную ему величину $\sin\frac{\Delta x}{2}$ и сокративъ затѣмъ числителя и знаменателя на этотъ общій множитель, приходимъ къ заключенію, что

$$y' = (\sin x)' = \text{пред.}\ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

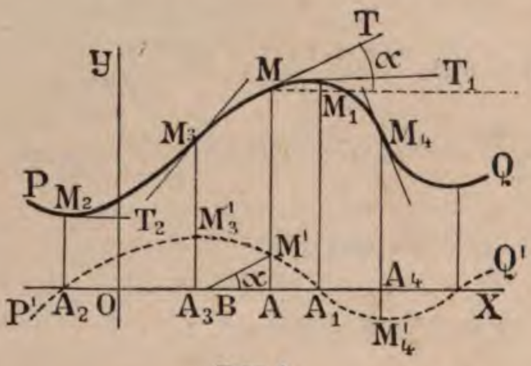
3) Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Построеніе графика производной.

Положимъ, кривая PQ (черт. 3) есть графикъ данной непрерывной функціи $y = f(x)$; для построенія графика $P'Q'$ производной $y' = f'(x)$ мы воспользуемся ея геометрическимъ значеніемъ. При-

нявъ во вниманіе, что значеніе производной при данномъ значеніи независимой перемѣнной x геометрически выражается $tg\,\alpha$ угла между направленіями касательной MT въ соотвѣтственной точкѣ графика PQ и оси абсциссъ, нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго построенія точекъ графика производной $y' = f'(x)$ по графику PQ данной функціи $y = f(x)$: *проведемъ въ нѣкоторой точкѣ A оси абсциссъ ординату AM даннаго графика PQ и отложимъ въ лѣвую сторону отъ точки A по этой оси отрѣзокъ AB, равный масштабной единицѣ длины $[l]$; проведя затѣмъ черезъ точку B линію BM', параллельную касательной MT, проведенной къ графику PQ въ концѣ выбранной ординаты BM, замѣтимъ точку пересѣченія M' линіи BM' съ этою ординатою; въ такомъ случаѣ эта точка M' будетъ принадлежать графику производной.*



Черт. 3.

Дѣйствительно, изъ прямоугольнаго треугольника $(M'AB)$ мы имѣемъ:

$$\frac{AM'}{AB} = tg\,(M'BA),$$

но по построенію $AB = [l]$ и $\angle(M'BA) = \alpha$; слѣдовательно

$$\frac{AM'}{[l]} = tg\,\alpha,$$

т. е. отрѣзокъ AM' содержитъ въ себѣ столько масштабныхъ единицъ длины $[l]$, сколько въ $tg\,\alpha$ заключается отвлеченныхъ единицъ; но $tg\,\alpha = y'$, слѣдовательно отрѣзокъ AM' есть графическое изображеніе значенія производной y' для значенія x независимой перемѣнной, соотвѣтствующаго точкѣ A.

Предположивъ наконецъ такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ точекъ A оси OX, мы получимъ графикъ $P'Q'$ производной $y' = f'(x)$.

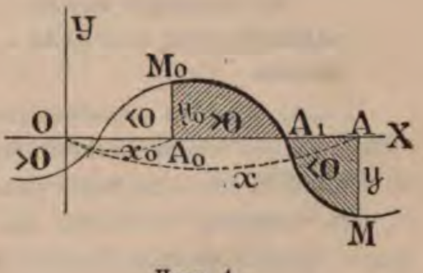
Примѣчаніе. «*Высшимъ*» *и* «*низшимъ*» точкамъ M_1, M_2 графика PQ (черт. 3), т. е. такимъ точкамъ, въ которыхъ касательныя M_1T_1, M_2T_2 параллельны оси OX, соотвѣтствуютъ *точки пересѣченія графика* $P'Q'$ съ этою осью, такъ какъ въ этихъ точкахъ $tg\,\alpha$ обращается въ нуль.

Точкамъ «*перегиба*» M_3, M_4, т. е. такимъ точкамъ, въ которыхъ графикъ PQ переходитъ съ одной стороны касательной на другую, соотвѣтствуютъ *высшая* и *низшая* точки M'_3, M'_4 графика $P'Q'$, такъ какъ касательная къ графику PQ до прохожденія ея точки касанія черезъ точки перегиба отклоняется въ одну сторону, а по прохожденіи черезъ эти точки— въ другую, слѣдовательно $tg\,\alpha_3$ и $tg\,\alpha_4$ будутъ соотвѣтственно наибольшимъ и наименьшимъ изъ рядомъ лежащихъ значеній $tg\,\alpha$, и потому соотвѣтствующія имъ ординаты $A_3M'_3$ и $A_4M'_4$ будутъ тоже наибольшею и наименьшею изъ рядомъ лежащихъ ординатъ графика $P'Q'$, т. е. точки M'_3 и M'_4 будутъ соотвѣтственно «*высшею*» и «*низшею*» точками графика $P'Q'$.

§ 3. Интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ отъ данной непрерывной функціи $y = f(x)$.

Положимъ, что данная функція $y = f(x)$ остается **непрерывною** въ предѣлахъ измѣненія независимой перемѣнной отъ нѣкотораго начальнаго значенія x_0 до перемѣннаго значенія x.

Проведя въ графикѣ этой функціи (черт. 4) начальную ординату $A_0M_0 = y_0$, соотвѣтствующую абсциссѣ x_0, условимся называть **алгебраическою площадью** $U_{x_0}^{x}$ **графика** *алгебраическую сумму площадокъ между дугою графика* $\widehat{M_0M}$, *осью абсциссъ и ординатами* y_0, y, *соотвѣтствующими абсциссамъ* x_0, x, *считая при этомъ площадки графика* (черт. 4):



Черт. 4.

1) **положительными**, *когда онѣ находятся* **вправо** *отъ начальной ординаты и* **надъ** *осью абсциссъ или* **влѣво** *отъ этой ординаты и* **подъ** *осью абсциссъ; наоборотъ,*

2) **отрицательными**, *когда онѣ находятся* **вправо** *отъ начальной ординаты* **подъ** *осью абсциссъ и* **влѣво—надъ** *этою осью.*

Напр. на нашемъ чертежѣ (4)

$$U_{x_0}^{x} = \text{пл. } (A_0 M_0 A_1) - \text{пл. } (A_1 A M).$$

Разбивъ основаніе A_0A алгебраической площади $U_{x_0}^{x}$ графика (черт. 5) функціи $y = f(x)$ на n ничтожно малыхъ элементовъ и проведя черезъ всѣ дѣленія соотвѣтствующія имъ ординаты y_1, y_2, ... y_{n-1}, мы можемъ представить эту площадь $U_{x_0}^{x}$, какъ алгебраическую сумму безконечно-большого числа безконечно-малыхъ площадокъ, т. е.

$$U_{x_0}^{x} = (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1});$$

но каждая элементарная площадка u_i, какъ мы знаемъ, по абсолютной величинѣ *эквивалентна* площадкѣ прямоугольника, построеннаго на ея основаніи $A_i A_{i+1}$ и ординатѣ y_i, т. е. эквивалентна абсолютной величинѣ произведенія $y_i\,(x_{i+1} - x_i)$; кромѣ того нетрудно убѣдиться, что и знакъ послѣдняго произведенія совпадаетъ съ *условнымъ* знакомъ площадки u_i, такъ какъ при $y_i < 0$ площадка эта лежитъ подъ осью абсциссъ, а при $(x_{i+1} - x_i) < 0$ она должна находиться влѣво отъ начальной ординаты.

Черт. 5.

Такъ на нашемъ чертежѣ (5) площадка u_i и произведеніе $y_i\,(x_{i+1} - x_i)$ *положительны*, а площадка u_k и произведеніе $y_k\,(x_{k+1} - x_k)$ *отрицательны*.

Итакъ, *каждая элементарная площадка u_i по величинѣ и по знаку эквивалентна произведенію $y_i\,(x_{i+1} - x_i)$*; принимая наконецъ во вниманіе, что предѣлъ суммы абсолютныхъ значеній площадокъ u_i есть *конечная* величина, мы, въ силу **основного принципа** *замѣны эквивалентныхъ безконечно-малыхъ величинъ*, приходимъ къ заключенію, что

$$U_{x_0}^{x} =$$

$$= \text{пред.}\left[y_0(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})\right]_{n=\infty} =$$

$$= \text{пред.} \left[f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \right.$$

$$\left. + f(x_{n-1})(x - x_{n-1}) \right]_{n=\infty} =$$

$$\text{пред.} \mathop{\text{S}}_{x_0}^{x} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

или, обозначивъ для краткости послѣдовательныя безконечно-малыя разности $(x_{i+1} - x_i)$ черезъ Δx_i, мы видимъ, что

$$\text{пред.} \mathop{\text{S}}_{x_0}^{x} f(x_i) \Delta x_i = U_{x_0}^{x};$$

т. е. если функція $y = f(x)$ въ предѣлахъ измѣненія независимой перемѣнной отъ x_0 до x остается **непрерывною**, *то предѣлъ суммы произведеній послѣдовательныхъ значеній $f(x_i)$ этой функціи на соотвѣтственныя безконечно-малыя приращенія Δx_i независимой перемѣнной, когда суммированіе это распространяется на всѣ промежуточныя значенія независимой перемѣнной въ предѣлахъ отъ x_0 до x, есть нѣкоторая* **конечная** *величина,* **геометрически** *выражающаяся* **алгебраическою площадью** $U_{x_0}^{x}$ *графика данной функціи, заключенною между соотвѣтственными начальною и конечною ординатами y_0, y.*

Но алгебраическая площадь $U_{x_0}^{x}$ обращается въ нуль при $x = x_0$ и вообще величина ея зависитъ отъ положенія перемѣнной ординаты y, т. е. площадь эта *есть нѣкоторая функція* отъ независимой перемѣнной x, обращающаяся въ нуль при $x = x_0$, слѣдовательно и *указанный предѣлъ*:

$$\text{пред.} \mathop{\text{S}}_{x_0}^{x} f(x_i) \Delta x_i$$

есть нѣкоторая **функція** *отъ независимой перемѣнной x, обращающаяся въ нуль при $x = x_0$; функція эта называется* **интеграломъ** *)

---

*) Терминъ **«интегралъ»** происходитъ отъ латинскаго слова *integer* — *весь, цѣлый*; такимъ образомъ корень этого термина указываетъ на второй пріемъ пользованія безконечно-малыми величинами, т. е. на то, что *каждая величина есть сумма всѣхъ ея безконечно-малыхъ элементовъ*, или что *цѣлое* есть сумма *всѣхъ* его частей.

отъ данной непрерывной функціи $f(x)$, *въ предѣлахъ отъ* x_0 *до* x, и обозначается знакомъ

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx,$$

причемъ:

1) знакъ **интеграла** $\int$, происшедшій отъ буквы S, указываетъ на извѣстное суммированіе безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ;

2) значки x_0, x, называемые соотвѣтственно **нижнимъ** и **верхнимъ предѣлами** интеграла, устанавливаютъ границы, въ которыхъ производится указанное суммированіе;

3) черезъ dx обозначенъ безконечно-малый элементъ Δx_i независимой перемѣнной, который въ такомъ случаѣ называютъ ея **дифференціаломъ**;

4) наконецъ произведеніе $f(x)\, dx$ даетъ намъ видъ безконечно-малыхъ слагаемыхъ.

Опредѣленіе интеграла.

Итакъ, **интеграломъ** $\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ *отъ данной непрерывной и конечной функціи* $y = f(x)$, *взятымъ въ предѣлахъ отъ* x_0 *до* x, *называется предѣлъ суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ вида* $f(x)\, dx$, *распространенной на всѣ значенія* x *между предѣлами интеграла, причемъ дифференціалъ* dx *обозначаетъ безконечно-малую разность между двумя смежными значеніями* x, *т. е.*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \text{пред.} \; \underset{x_0}{\overset{x}{S}} \; f(x_i)\, \Delta x_i.$$

Интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ *есть нѣкоторая* **функція** *отъ независимой перемѣнной* x, *обращающаяся въ нуль при* $x = x_0$; **геометрически** *интегралъ* $\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ *выражается* **«алгебраическою площадью»** *графика данной непрерывной функціи* $y = f(x)$, *заключенною между*

ординатами y_0, y, соотвѣтствующими нижнему и верхнему предѣламъ x_0, x разсматриваемаго интеграла *).

Примѣчаніе. При опредѣленіи интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x} f(x_i)\,\Delta x_i$$

какъ предѣла суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ у насъ остался вполнѣ произвольнымъ законъ дѣленія разности предѣловъ интеграла $(x - x_0)$ на безконечно-малые элементы Δx_i; другими словами, *предѣлъ указанной суммы нисколько не зависитъ отъ закона, по которому элементы Δx_i будутъ безпредѣльно уменьшаться.* Во многихъ случаяхъ дѣлятъ разность $(x - x_0)$ на равные безконечно-малые элементы

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{n},$$

тогда

$$x_1 = x_0 + \Delta x,\ x_2 = x_0 + 2\Delta x\ldots\ldots$$

и вообще

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x;$$

слѣдовательно

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x} f(x_0 + i\,\Delta x)\,\Delta x,$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ значенія i отъ нуля до $(n - 1)$, и n безпредѣльно возрастаетъ. Такое опредѣленіе интеграла бываетъ иногда удобно при непосредственномъ его вычисленіи.

Примѣръ. Положимъ требуется найти $\int_{x_0}^{x} 2x\,dx$; обозначивъ черезъ

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{n},$$

---

*) Въ систематическихъ курсахъ интегральнаго исчисленія **существованіе** предѣла такой суммы:

$$\text{пред.} \sum_{x_0}^{x} f(x_i)\,\Delta x_i$$

или—интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

для всякой непрерывной функціи $f(x)$ доказывается **независимо** отъ его геометрическаго значенія, какъ алгебраической площади графика подъинтегральной функціи.

мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\int_{x_0}^{x} 2x\,dx = \text{пред.} \mathop{S}_{x_0}^{x} 2\,(x_0 + i\Delta x)\,\Delta x =$$

$$= \text{пред.} \left\{2x_0\Delta x + 2\,(x_0 + \Delta x)\,\Delta x + 2\,(x_0 + 2\Delta x)\,\Delta x + \ldots + \right.$$

$$\left. + 2\,[x_0 + (n-1)\,\Delta x]\right\}_{n=\infty} =$$

$$= \text{пред.}\ 2\Delta x\ \left\{nx_0 + \Delta x\,[1 + 2 + \ldots + (n-1)]\right\}_{n=\infty},$$

но

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{n}, \text{ и } 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n\,(n-1)}{2},$$

слѣдовательно

$$\int_{x_0}^{x} 2x dx = \text{пред.}\ 2\,(x - x_0)\left\{x_0 + \frac{x - x_0}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=\infty} =$$

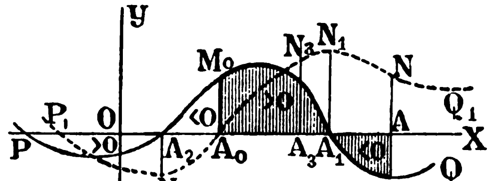
$$= 2\,(x - x_0)\left\{x_0 + \frac{x - x_0}{2}\right\} = x^2 - x_0^2,$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x} 2\,x dx = x^2 - x_0^2.$$

Построеніе графика интеграла.

Мы знаемъ, что $\int_{x_0}^{x} f\,(x)\,dx$ есть функція, обращающаяся въ нуль при $x = x_0$, слѣдовательно (черт. 6) *точка A_0 оси абсциссъ соотвѣтствующая нижнему предѣлу интеграла принадлежитъ его графику*. Для построенія остальныхъ точекъ искомаго графика мы воспользуемся геометрическимъ значеніемъ интеграла



Черт. 6.

$$\int_{x_0}^{x} f\,(x)\,dx = U_{x_0}^{x},$$

т. е. значеніемъ интеграла, какъ *«алгебраической площади»* графика данной функціи. Изъ этого геометрическаго значенія инте-

грала ясно, что для построенія точки N искомаго графика, соотвѣтствующей точкѣ A оси абсциссъ, нужно отложить вверхъ или внизъ по перпендикуляру къ этой оси, смотря по знаку алгебраической площади $U_{x_0}^x$, столько масштабныхъ единицъ длины $[l]$, сколько въ этой площади заключается соотвѣтственныхъ единицъ площади, такъ напр. на нашемъ чертежѣ (6) отрѣзокъ AN численно равенъ алгебраической площади

$$U_{x_0}^x = \text{пл.}\,(A_0 M_0 A_1) - \text{пл.}\,(A_1 M A).$$

Предположивъ теперь указанное построеніе выполненнымъ для всѣхъ точекъ оси OX, мы получимъ искомый графикъ P_1Q_1 интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Примѣчаніе. Точкамъ пересѣченія (черт. 6) A_1, A_2 даннаго графика PQ съ осью абсциссъ соотвѣтствуютъ «*высшая*» или «*низшая*» точки графика P_1Q_1. Дѣйствительно, въ этихъ точкахъ пересѣченія согласно условію отдѣльныя площадки графика мѣняютъ свои знаки, слѣдовательно алгебраическая площадь $U_{x_0}^x$ графика PQ, какъ алгебраическая сумма отдѣльныхъ площадокъ графика, при прохожденіи x черезъ значенія x_1 или x_2 соотвѣтствующія точкамъ A_1, A_2 начнетъ убывать, если она раньше возростала или возростать, если убывала, т. е. будетъ либо больше, либо меньше всѣхъ рядомъ лежащихъ значеній, а потому и ординаты A_1N_1 и A_2N_2 будутъ соотвѣтственно наибольшею и наименьшею изъ всѣхъ рядомъ лежащихъ ординатъ графика P_1Q_1, т. е. точки N_1 и N_2 будутъ «*высшею*» и «*низшею*» точками того же графика P_1Q_1.

§ 4. Дифференціалъ функціи.

Мы знаемъ, что

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

слѣдовательно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon \quad \text{или} \quad \Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая безконечно-малая величина.

Безконечно-малое приращеніе Δx независимой перемѣнной, какъ мы замѣтили, называютъ еще **дифференціаломъ независимой пе-**

ремѣнной и обозначаютъ его въ такомъ случаѣ знакомъ dx, такъ что предыдущее равенство мы можемъ написать подъ видомъ

$$\Delta y = y' dx + \varepsilon dx.$$

Вникая въ смыслъ этого равенства, мы видимъ, что безконечно-малое приращеніе Δy функціи y можетъ быть разбито на двѣ части: одна изъ нихъ $y'dx$ будетъ **перваго порядка** малости относительно dx, другая же εdx будетъ **высшаго порядка;** слѣдовательно *произведеніе* $y'dx$ **эквивалентно** *полному безконечно-малому приращенію* Δy *функціи* y, т. е. въ двухъ пріемахъ пользованія безконечно-малыми величинами его можно подставлять вмѣсто самого безконечно-малаго приращенія функціи Δy, а потому произведеніе это называютъ **дифференціаломъ функціи** и обозначаютъ знакомъ dy, т. е.

$$dy = y' dx.$$

Итакъ **дифференціаломъ независимой перемѣнной** dx *называется само безконечно-малое приращеніе* Δx *независимой перемѣнной т. е.* $dx = \Delta x$, **дифференціаломъ же функціи** dy *называется произведеніе изъ ея производной* y' *на дифференціалъ независимой перемѣнной, т. е.* $dy = y'dx$, *причемъ дифференціалъ функціи* **эквивалентенъ** *полному безконечно-малому приращенію функціи.*

Изъ выраженія $dy = y'dx$ мы видимъ, что производная y' можетъ быть представлена какъ отношеніе дифференціала функціи къ дифференціалу независимой перемѣнной; поэтому для обозначенія производной отъ функціи $y = f(x)$, вмѣсто знаковъ y', $f'(x)$, обыкновенно пользуются выраженіями

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{d\,f(x)}{dx}.$$

Напримѣръ:

$$\frac{dx^2}{dx} = (x^2)' = 2x, \text{ или } dx^2 = 2x\,dx,$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = (\sin x)' = \cos x, \text{ или } d\sin x = \cos x\,dx.$$

§ 5. Зависимость между функціей и интеграломъ отъ ея производной.

Положимъ, мы имѣемъ непрерывную функцію $y = f(x)$; при непрерывномъ измѣненіи независимой перемѣнной отъ начальнаго значенія x_0 до нѣкотораго значенія x, функція y будетъ принимать рядъ значеній:

$$y_0,\ y_1,\ y_2 \cdots y_i,\ y_{i+1} \cdots y_{n-1},\ y,$$

причемъ послѣдовательныя разности:

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$
$$y_2 - y_1 = \Delta y_1,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$$

двухъ рядомъ лежащихъ значеній этой функціи, въ силу ея непрерывности, могутъ быть сдѣланы менѣе какой угодно малой величины.

Сложивъ отдѣльно правыя и лѣвыя части написанныхъ выраженій, мы приходимъ къ **очевидному** равенству

$$y - y_0 = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_i \ldots + \Delta y_{n-1},$$

выражающему, что *разность двухъ значеній функціи* y, *или ея приращеніе* $y - y_0$, *равна алгебраической суммѣ всѣхъ послѣдовательныхъ приращеній* Δy_i *этой функціи* при измѣненіи независимой перемѣнной отъ начальнаго значенія x_0 до соотвѣтственнаго значенія x.

Станемъ теперь безпредѣльно увеличивать число промежуточныхъ значеній функціи между y_0 и y, притомъ такъ, чтобы каждая изъ разностей Δy_i безпредѣльно уменьшалась; въ такомъ случаѣ предыдущее равенство короче можно написать подъ видомъ:

$$y - y_0 = \mathop{\mathrm{S}}_{x_0}^{x} \Delta y_i\,;$$

но мы знаемъ, что Δy_i эквивалентно dy_i, причемъ

$$dy_i = y'_i \, \Delta x_i = f'(x_i) \, \Delta x_i,$$

слѣдовательно

$$y - y_0 =$$

$$= \mathop{S}_{x_0}^{x} \Delta y_i = \text{пред.} \mathop{S}_{x_0}^{x} y'_i \, \Delta x_i = \text{пред.} \mathop{S}_{x_0}^{x} f'(x_i) \, \Delta x_i =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f'(x) \, dx,$$

или

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(x) \, dx, \text{ т. е.}$$

Теорема. *Разность двухъ значеній $f(x) - f(x_0)$ непрерывной функціи равна интегралу отъ ея производной, взятому въ тѣхъ же предѣлахъ, т. е. отъ начальнаго значенія x_0 до даннаго значенія x.*

Изъ этой теоремы вытекаетъ слѣдующій *пріемъ для вычисленія интеграловъ*.

§ 6. Пріемъ для вычисленія интеграловъ.

Вмѣсто того, чтобы вычислять интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x) \, dx$ **непосредственно**, т. е. исходя изъ его опредѣленія, какъ предѣла суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ, **достаточно** *лишь найти такую функцію $F(x)$, отъ которой производная равна подъинтегральной функціи $f(x)$*, ибо въ такомъ случаѣ на основаніи предыдущей теоремы

$$\int_{x_0}^{x} f(x) \, dx = F(x) - F(x_0),$$

такъ какъ разность двухъ значеній функціи $F(x)$ равна интегралу отъ ея производной, взятому въ тѣхъ же предѣлахъ, *если только $F(x)$ и ея производная $f(x)$ въ разсматриваемыхъ предѣлахъ* **непрерывны**.

Разность $F(x) - F(x_0)$ двухъ значеній одной и той же функ-

ціи $F(x)$ при двухъ значеніяхъ независимой перемѣнной для краткости обозначаютъ обыкновенно знакомъ

$$\Big| F(x) \Big|_{x_0}^{x}.$$

Такимъ образомъ, *если* $F'(x) = f(x)$ *и функціи* $f(x)$ *и* $F(x)$ *въ предѣлахъ отъ* x_0 *до* x **непрерывны,** *то*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_{x_0}^{x},$$

т. е. $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ *равенъ разности значеній указанной функціи* $F(x)$ *при верхнемъ и нижнемъ предѣлахъ.*

Примѣры:

1) $\int_{x_0}^{x} 3dx = \Big| 3x \Big|_{x_0}^{x} = 3(x - x_0)$, ибо $(3x)' = 3$.

2) $\int_{x_0}^{x} 2x\,dx = \Big| x^2 \Big|_{x_0}^{x} = x^2 - x_0^2$, ибо $(x^2)' = 2x$.

3) $\int_{0}^{1} x^3\,dx = \Big| \frac{x^4}{4} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$, ибо $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big| \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$, ибо $(\sin x)' = \cos x$.

5) $\int_{x}^{x_0} x^m\,dx = \Big| \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_{x_0}^{x} = \frac{x^{m+1} - x_0^{m+1}}{m+1}$, ибо $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = x^m$.

§ 7. Первообразныя функціи и ихъ неопредѣленность.

Функкія $F(x)$, отъ которой производная $F'(x)$ равна данной функціи $f(x)$, называется по отношенію къ этой послѣдней **ея первообразною функціей.**

Напримѣръ:

1) Первообр. отъ $2x$ есть x^2, ибо $(x^2)' = 2x$;
2) » » $\cos x$ » $\sin x$ » $(\sin x)' = \cos x$;
3) » » $\sin x$ » $-\cos x$ » $(-\cos x)' = \sin x$.

Неопредѣленность *первообразныхъ функцій*. Если $F'(x) = f(x)$, то прибавивъ къ $F(x)$ произвольную постоянную C, мы получимъ новую функцію $F(x) + C$, производная отъ которой тоже равна данной функціи $f(x)$.

Дѣйствительно,

$$[F(x) + C]' = \text{пред.} \frac{[F(x + \Delta x) + C] - [F(x) + C]}{\Delta x} =$$

$$= \text{пред.} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x),$$

другими словами, *производная отъ данной функціи не зависитъ отъ прибавленія къ этой послѣдней произвольной постоянной*

Напримѣръ:

1) $(x^2)' = (x^2 + 3)' = (x^2 + 4)' = ... = 2x,$

2) $(\sin x + 5)' = (\sin x)' = \cos x;$

слѣдовательно, если $F(x)$ есть первообразная функція отъ $f(x)$, то и $F(x) + C$, гдѣ C есть **произвольная постоянная**, будетъ тоже первообразною функціею отъ той же функціи $f(x)$, причемъ *другихъ первообразныхъ функцій отъ одной и той же функціи $f(x)$, кромѣ отличающихся между собою лишь на постоянныя величины, не существуетъ;* въ самомъ дѣлѣ, если $F_1(x)$ есть новая первообразная функція отъ $f(x)$, то по доказанной теоремѣ

$$F_1(x) - F_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0);$$

слѣдовательно

$$F_1(x) - F(x) = F_1(x_0) - F(x_0) = const = C,$$

или

$$F_1(x) = F(x) + C,$$

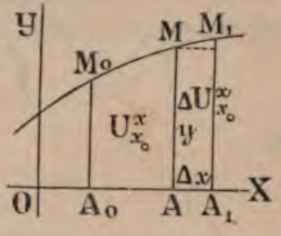
т. е. *всѣ первообразныя функціи отъ данной функціи $f(x)$ будутъ вида $F(x) + C$, гдѣ $F(x)$ есть одна изъ первообразныхъ функцій, а C есть* **произвольная постоянная**.

Понятіе о первообразныхъ функціяхъ приводитъ насъ къ новому опредѣленію интеграла.

§ 8. Второе опредѣленіе интеграла.

Всякій интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ *отъ нѣкоторой непрерывной въ предѣлахъ интегрированія функціи* $f(x)$ *есть* **первообразная функція** *отъ подъинтегральной функціи* $f(x)$, **обращающаяся въ нуль при** $x = x_0$.

Въ справедливости этого опредѣленія можно легко убѣдиться при помощи геометрическаго значенія интеграла. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что геометрически (черт. 7) всякій интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ выражается алгебраическою площадью $U_{x_0}^{x}$ графика подъинтегральной функціи, заключенною между ординатами y_0, y, соотвѣтствующими нижнему и верхнему предѣламъ интеграла.



Черт. 7.

Дадимъ независимой перемѣнной x безконечно малое приращеніе Δx; въ такомъ случаѣ площадь $U_{x_0}^{x}$ получитъ нѣкоторое безконечно-малое приращеніе $\Delta U_{x_0}^{x}$, эквивалентное, какъ мы знаемъ, произведенію $y\Delta x$, слѣдовательно

$$(U_{x_0}^{x})' = \text{пред.}\ \frac{\Delta U_{x_0}^{x}}{\Delta x} = \text{пред.}\ \frac{y\Delta x}{\Delta x} = y = f(x),$$

т. е. производная $(U_{x_0}^{x})'$ отъ алгебраической площади графика непрерывной функціи $y = f(x)$ выражается его ординатою y, соотвѣтствующею данному значенію независимой перемѣнной x, другими словами эта производная численно равна самой функціи $f(x)$; такимъ образомъ величина указанной алгебраической площади $U_{x_0}^{x}$ есть первообразная функція отъ $f(x)$; кромѣ того площадь эта обращается въ нуль при $x = x_0$ и численно равна $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, слѣдовательно $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ *есть первообразная функція отъ* $f(x)$, *обращающаяся въ нуль при* $x = x_0$.

§ 9. Неопредѣленный интегралъ.

Въ виду указанной связи между интеграломъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ и первообразными функціями $F(x) + C$ отъ подъинтегральной функціи $f(x)$, выраженіе $F(x) + C$ называютъ **неопредѣленнымъ интеграломъ** отъ данной функціи $f(x)$ и обозначаютъ знакомъ интеграла

$$\int f(x)\,dx$$

безъ нижняго и верхняго предѣловъ.

Итакъ, **неопредѣленнымъ интеграломъ** *отъ данной функціи* $f(x)$ *называется общій видъ* $F(x) + C$ *всѣхъ ея первообразныхъ функцій, т. е.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

гдѣ

$$F'(x) = f(x);$$

другими словами, неопредѣленный интегралъ $\int f(x)\,dx$ *есть общій видъ функцій, отъ которыхъ производныя равны подъинтегральной функціи* $f(x)$ *или, что все равно, дифференціалы которыхъ равны подъинтегральному выраженію* $f(x)\,dx$, *т. е.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

или

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Изъ послѣдняго равенства мы видимъ, что *символы дифференціала* d *и неопредѣленнаго интеграла* $\int$ *суть символы* **обратныхъ** *дѣйствій, ибо*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int d\,f(x) = f(x) + C.$$

Примѣры:

1) $\int dx = x + C$, ибо $d\,(x + C) = dx$.

2) $\int a\,dx = ax + C$, ибо $(ax + C)' = a$.

3) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, ибо $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + C\right)' = x^m$.

4) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, ибо $(\sin x + C)' = \cos x$.

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, ибо $(-\cos x + C)' = \sin x$.

§ 10. Заключеніе.

Такимъ образомъ **два пріема** пользованія безконечно-малыми величинами, въ связи съ **основнымъ принципомъ** замѣны эквивалентныхъ безконечно-малыхъ величинъ, *въ примѣненіи къ каждой непрерывной функціи* $y = f(x)$ *даютъ представленіе о двухъ новыхъ функціяхъ:*

a) производной

$$y' = \text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{и}$$

b) интегралѣ

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \text{пред.}\ \mathop{S}_{x_0}^{x} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Мы видѣли какую роль игралъ основной принципъ замѣны эквивалентныхъ безконечно-малыхъ величинъ въ установленіи и развитіи этихъ понятій; съ тѣмъ же принципомъ связано понятіе о дифференціалѣ функціи $dy = y'\,dx$, такъ какъ **дифференціалъ функціи эквивалентенъ** *ея полному безконечно-малому приращенію* Δy.

Обратимъ наконецъ вниманіе на двойное опредѣленіе интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx:$$

1) *съ одной стороны это есть предѣлъ суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ;*

2) *съ другой стороны это есть первообразная функція отъ подъинтегральной функціи* $f(x)$, *обращающаяся въ нуль при* $x = x_0$.

На указанныхъ двухъ значеніяхъ интеграла основаны приложенія этого понятія къ вычисленію многихъ величинъ: площадей, объемовъ, статическихъ моментовъ, моментовъ инерціи и т. д. Дѣйствительно, черезъ интегралъ, какъ предѣлъ суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ слагаемыхъ, могутъ быть выражены всѣ конечныя величины, если мы представимъ ихъ разбитыми на безконечно-малые элементы; интегралъ же, какъ извѣстная первообразная функція, даетъ намъ возможность во многихъ случаяхъ свести отысканіе предѣловъ такихъ суммъ къ нахожденію неопредѣленнаго интеграла, или первообразной функціи отъ подъинтегральной функціи.

Установленіе правилъ для нахожденія производныхъ или, что все равно, дифференціаловъ отъ всевозможныхъ функцій составляетъ задачу первой части анализа безконечно-малыхъ величинъ, носящей потому названіе **дифференціальнаго исчисленія**, а нахожденіе неопредѣленныхъ интеграловъ или первообразныхъ функцій отъ различныхъ функцій составляетъ отдѣлъ второй части анализа безконечно малыхъ величинъ, называемой **интегральнымъ исчисленіемъ**; причемъ дѣйствія эти, какъ мы видѣли, обратны другъ другу, т. е.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \quad \text{и} \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Пояснимъ все изложенное нѣсколькими примѣрами.

§ 11. Примѣры на построеніе графиковъ производныхъ и интеграловъ.

Возьмемъ такъ называемую «цѣлую раціональную функцію» отъ независимой перемѣнной x, т. е. положимъ, что

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n,$$

гдѣ $a, a_1, \ldots\ldots a_n$ суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, а показатели при x суть нѣкоторыя цѣлыя и положительныя числа.

При безконечно-маломъ приращеніи Δx независимой перемѣнной, функція эта получитъ приращеніе Δy, причемъ

$$\Delta y = \left[a + a_1 (x + \Delta x) + a_2 (x + \Delta x)^2 + \ldots\ldots a_n (x + \Delta x)^n\right]$$
$$- \left[a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n\right].$$

Разложимъ всѣ члены правой части этого равенства, пользуясь формулою Ньютона, по возрастающимъ степенямъ безконечно-малаго приращенія Δx независимой перемѣнной; въ такомъ случаѣ нетрудно непосредственно убѣдиться, что члены несодержащіе множителя Δx взаимно сократятся, члены содержащіе этотъ множитель въ первой степени, по выносѣ Δx за скобку, будутъ имѣть своимъ коэффиціентомъ выраженіе $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}$, остальные же члены будутъ содержать множители Δx въ высшихъ степеняхъ, т. е. будутъ безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ, слѣдовательно производная

$$y' = \text{пред.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots na_n x^{n-1},$$

т. е. *для нахожденія производной отъ цѣлой раціональной функціи надо въ каждомъ членѣ ея перенести показателя при независимой перемѣнной множителемъ въ коэффиціентъ и уменьшить показателя на единицу*, при этомъ членъ несодержащій буквы x можетъ быть откинутъ; такъ какъ производная отъ данной функціи не зависитъ отъ прибавле́нія къ этой послѣдней произвольной постоянной.

Напримѣръ:

$$(x^5 + 1)' = 5x^4;\ (2x^2 + 5)' = 4x;$$

$$\left(\frac{1}{4}\ x^4 - 2x^3 + x\right)' = x^3 - 6x^2 + 1 \ \text{и т. д.}$$

Наоборотъ, *для нахожденія неопредѣленнаго интеграла или первообразной функціи отъ той же функціи*

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

надо показателей при независимой перемѣнной увеличить на единицу и, раздѣливъ каждый членъ на соотвѣтствующій ему увеличенный показатель, прибавить къ алгебраической суммѣ этихъ членовъ произвольную постоянную C, т. е.

$$\int (a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\, dx =$$

$$= ax + a_1\ \frac{x^2}{2} + a_2\ \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\ \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

такъ какъ не трудно непосредственно убѣдиться, что производная отъ правой части этого равенства равна подъинтегральной функціи, стоящей въ лѣвой его части.

Напримѣръ:

$$\int(2+3x)\,dx = 2x + 3\,\frac{x^2}{2} + C\,;$$

$$\int(1-x^3)\,dx = x - \frac{x^4}{4} + C\,;$$

$$\int(5x^4 - 3x^2 - 1)\,dx = x^5 - x^3 - x + C \text{ и т. д.}$$

Графикъ цѣлой раціональной функціи n-ой степени

$$y = a + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

будетъ, вообще говоря, нѣкоторая кривая, носящая названіе **параболы** n-го **порядка**; поэтому графикъ производной отъ такой функціи

$$y' = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$$

будетъ нѣкоторая парабола $(n-1)$-го порядка и графикъ интеграла

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \left| ax + a_1\,\frac{x^2}{2} + a_2\,\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{a_n\,x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x}$$

будетъ нѣкоторая парабола $(n+1)$-го порядка.

Укажемъ построенія этихъ графиковъ въ простѣйшихъ случаяхъ.

1) $y = a$. На постоянную величину a можно смотрѣть какъ на такую функцію отъ независимой перемѣнной x, которая при всѣхъ измѣненіяхъ этой послѣдней сохраняетъ постоянное значеніе.

Графикъ такой функціи $y = a$ есть прямая линія PQ (черт. 8), параллельная оси абсциссъ и проведенная въ разстояніи a масштабныхъ единицъ отъ этой оси; при $a > 0$ — надъ осью OX, при $a < 0$ — подъ этою осью.

Производная отъ постоянной величины равна нулю.

Дѣйствительно, если $y = a$, то $\Delta y = 0$ и потому $y' = \text{пред.}\,\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, слѣдовательно графикъ производной отъ постоянной величины есть

сама ось абсциссъ. Неопредѣленный интегралъ отъ постоянной величины

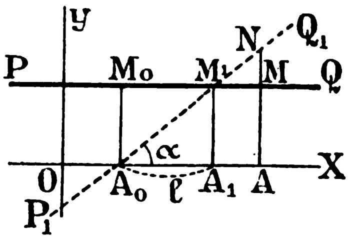
$$\int a dx = ax + C,$$

такъ какъ

$$(ax + C)' = a,$$

слѣдовательно

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \Big| ax \Big|_{x_0}^{x} = a\,(x - x_0);$$



Черт. 8.

для построенія графика послѣдняго интеграла надо отложить отъ точки A_0 по направленію оси OX отрѣзокъ A_0A_1, равный масштабной единицѣ длины $[l]$ и, построивъ въ точкѣ A_1 ординату A_1M_1 даннаго графика PQ, провести черезъ точки A_0, M_1 прямую P_1Q_1; *эта прямая и будетъ искомымъ графикомъ.*

Дѣйствительно, проведя произвольную ея ординату AN, мы видимъ, что

$$\frac{AN}{A_1M_1} = \frac{A_0A}{A_0A_1},$$

но

$$A_0A_1 = [l]$$

и

$$A_1M_1 = A_0M_0,$$

слѣдовательно

$$AN = \frac{A_0M_0 \,.\, A_0A}{[l]} = \frac{\text{пл. } (A_0M_0\;MA)}{[l^2]}\,[l],$$

т. е. каждая ордината AN прямой P_1Q_1 содержитъ въ себѣ столько масштабныхъ единицъ $[l]$, сколько въ соотвѣтствующей ей площади прямоугольника (A_0M_0MA) заключается квадратныхъ единицъ $[l^2]$, но указанная площадь (A_0M_0MA) взятая съ условнымъ знакомъ есть алгебраическая площадь графика PQ, численно равная $\int_{x_0}^{x} adx$, слѣдовательно прямая P_1Q_1 есть графикъ написаннаго интеграла.

2) $y = a + bx$. Графикъ этой функціи, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, есть прямая линія PQ, пересѣкающая ось OY (черт. 9) въ разстояніи a масштабныхъ единицъ отъ точки O надъ

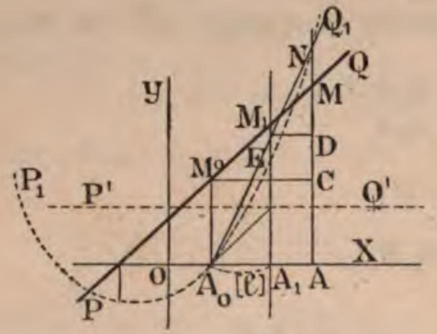
или подъ ось OX, смотря по знаку a; прямая эта наклонена къ оси OX подъ угломъ α, причемъ $tg\,\alpha = b$, такъ какъ $tg\,\alpha = y' = b$. Изъ послѣдняго равенства ясно, что графикъ производной $P'Q'$ этой функціи есть прямая линія параллельная оси OX, проведенная въ разстояніи b масштабныхъ единицъ отъ этой оси.

$$\int y\,dx = \int (a + bx)\,dx = ax + b\,\frac{x^2}{2} + C,$$

слѣдовательно

$$\int_{x_0}^{x} (a + bx)\,dx = \left| ax + b\,\frac{x^2}{2} \right|_{x_0}^{x} = a\,(x - x_0) + \frac{b}{2}\,(x^2 - x_0^2).$$

Графикъ этого интеграла можетъ быть построенъ слѣдующимъ образомъ по графику PQ данной функціи $y = a + bx$. Отложимъ по направленію оси OX (черт. 9) отъ точки A_0, соотвѣтствующей нижнему предѣлу даннаго интеграла, масштабную единицу длины $[l] = A_0A_1$ и проведемъ черезъ точку A_1 линію A_1M_1 перпендикулярную къ оси OX, а черезъ точку M_0 линію M_0C параллельную той же оси. Выбравъ затѣмъ произвольную ординату AM даннаго графика PQ, раздѣлимъ отрѣзокъ ея MC, отсѣкаемый линіей M_0C, пополамъ и, проведя черезъ точку дѣленія D линію DE параллельную оси OX, замѣтимъ точку пересѣченія E этой линіи съ перпендикуляромъ A_1M_1; въ такомъ случаѣ *точка пересѣченія N прямой A_0E съ выбранною ординатою AM есть точка искомаго графика.* Дѣйствительно, изъ чертежа (9) по построенію мы заключаемъ, что



Черт. 9.

$$\frac{AN}{A_0A} = \frac{A_1E}{A_0A_1},$$

но

$$A_1E = AD = AC + \frac{1}{2}\,CM = \frac{1}{2}\,(2AC + CM) =$$

$$= \frac{1}{2}(AC + AM) = \frac{1}{2}(A_0M_0 + AM)$$

и

$$A_0A_1 = [l],$$

слѣдовательно

$$AN = \frac{A_0A\,\dfrac{A_0M_0 + AM}{2}}{[l]} = \frac{\text{пл. трп. } (A_0M_0MA)}{[l]} =$$

$$= \frac{\text{пл. трп. } (A_0M_0MA)}{[l^2]}\,[l].$$

Такимъ образомъ отрѣзокъ AN содержитъ въ себѣ столько масштабныхъ единицъ, сколько въ площади трапеціи (A_0M_0MA) содержится соотвѣтственныхъ квадратныхъ единицъ; но указанная площадь есть вмѣстѣ съ тѣмъ площадь графика PQ нашей функціи $y = a + bx$, т. е. численно равна $\int\limits_{x_0}^{x}(a + bx)\,dx$, слѣдовательно точка N принадлежитъ искомому графику этого интеграла.

Подобнымъ же образомъ нетрудно убѣдиться въ справедливости указаннаго построенія при всевозможныхъ положеніяхъ ординаты AM; геометрическое мѣсто всѣхъ такихъ точекъ N и будетъ графикомъ нашего интеграла; графикъ этотъ есть нѣкоторая парабола второго порядка, такъ какъ разсматриваемый интегралъ есть цѣлая раціональная функція 2-ой степени отъ независимой перемѣнной x.

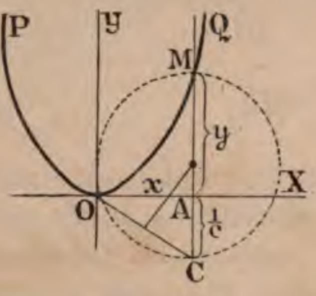
Укажемъ другой пріемъ построенія графиковъ такихъ функцій.

3) $y = cx^2$. Графикъ этой функціи есть парабола 2-го порядка, проходящая черезъ начало координатъ O (черт. 10), такъ какъ при $x = 0$ ордината y тоже обращается въ нуль; кромѣ того, въ каждой точкѣ этого графика

$$x = \sqrt{y \cdot \frac{1}{c}},$$

т. е. абсцисса x есть средняя пропорціональная между соотвѣтствующею ординатою y и величиною $\frac{1}{c}$, откуда приходимъ къ слѣдующему построенію точекъ этого графика. Взявъ на оси OX точку A,

соотвѣтствующую данному значенію независимой перемѣнной x, отложимъ отъ нея по перпендикуляру къ этой оси отрѣзокъ AC, содержащій въ себѣ $\frac{1}{c}$ масштабныхъ единицъ $[l]$, причемъ отрѣзокъ этотъ будемъ откладывать внизъ при $c > 0$ и вверхъ при $c < 0$; въ такомъ случаѣ окружность, имѣющая свой центръ на продолженіи линіи CA и проходящая черезъ точки O, C пересѣчетъ продолженіе прямой AC въ нѣкоторой точкѣ M, принадлежащей искомому графику, такъ какъ по извѣстной теоремѣ элементарной геометріи



Черт. 10.

$$OA^2 = AM \, . \, AC,$$

слѣдовательно

$$AM = \frac{OA^2}{AC} = cx^2.$$

Предположивъ такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ точекъ A оси OX, мы получимъ нѣкоторую параболу 2-го порядка PQ, которая и будетъ графикомъ данной функціи $y = cx^2$.

4) $y = a + bx + cx^2$.

Для построенія графика этой функціи мы можемъ воспользоваться предыдущими пріемами; въ самомъ дѣлѣ, замѣтивъ, что данная функція y разбивается на сумму двухъ функцій:

$$a + bx \text{ и } cx^2,$$

построенія графиковъ которыхъ намъ уже извѣстны, остается лишь выполнить эти построенія и откладывать отъ каждой точки A оси OX по перпендикуляру къ этой послѣдней алгебраическую сумму соотвѣтствующихъ ей ординатъ графиковъ слагаемыхъ функцій.

Полученная такимъ построеніемъ парабола 2-го порядка будетъ графикомъ данной функціи $y = a + bx + cx^2$.

Производная этой функціи:

$$y' = (a + bx + cx^2)' = b + 2cx,$$

слѣдовательно графикъ этой производной есть нѣкоторая прямая линія.

Неопредѣленный интегралъ

$$\int y dx = \int (a + bx + cx^2) dx = ax + \frac{bx^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + C$$

и потому

$$\int_{x_0}^{x} (a + bx + cx^2) = \left| ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} \right|_{x_0}^{x} =$$

$$a(x - x_0) + \frac{b}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{c}{3}(x^3 - x_0^3) =$$

$$\frac{x - x_0}{6}\left\{ 6a + 3b(x + x_0) + 2c(x^2 + xx_0 + x_0^2) \right\}.$$

Послѣдній интегралъ даетъ намъ выраженіе алгебраической площади $U_{x_0}^{x}$ графика функціи $y = a + bx + cx^2$, т. е. алгебраическую площадь, ограниченную дугою нѣкоторой параболы 2-го порядка, осью абсциссъ и ординатами y_0, y.

Величина этой площади можетъ быть весьма просто выражена черезъ ея основаніе $A_0A = x - x_0$, двѣ крайнія ординаты y_0, y и среднюю ординату y_1, дѣлящую пополамъ основаніе A_0A.

Дѣйствительно (черт. 11), абсцисса x_1 точки A_1, какъ точки, дѣлящей пополамъ разстояніе между точками A_0, A, опредѣлится изъ равенства:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{2} = \frac{x + x_0}{2},$$

слѣдовательно

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 = a + \frac{b}{2}(x + x_0) + \frac{c}{4}(x + x_0)^2$$

Написавъ теперь выраженія:

$$y_0 = a + bx_0 + cx_0^2,$$

$$4y_1 = 4a + 2b(x + x_0) + c(x^2 + 2xx_0 + x_0^2),$$

$$y = a + bx + cx^2$$

и сложивъ ихъ почленно, мы приходимъ къ равенству:

$$y_0 + 4y_1 + y = 6a + 3b(x + x_0) + 2c(x^2 + xx_0 + x_0^2),$$

правая часть котораго стоитъ множителемъ въ выше написанномъ выраженіи алгебраической площади $U_{x_0}^x$, слѣдовательно

$$U_{x_0}^x = \frac{x - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y),$$

т. е. *алгебраическая площадь, ограниченная дугою нѣкоторой параболы 2-го порядка осью, абсциссъ и двумя ординатами* y_0, y, *равна площади прямоугольника, построеннаго на томъ же основаніи и на высотѣ, равной* $\frac{1}{6}$ *алгебраической суммы двухъ крайнихъ ординатъ и учетверенной средней ординаты этой дуги.*

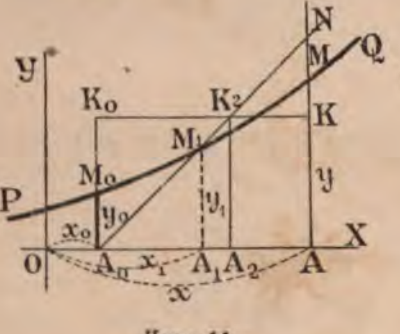
Представивъ такимъ образомъ алгебраическую площадь $U_{x_0}^x$ графика пароболы $y = a + bx + cx^2$ подъ видомъ (черт. 11) указаннаго прямоугольника (A_0K_0KA), въ которомъ высота

$$A_0K_0 = \frac{1}{6}(y_0 + 4y_1 + y)$$

мы можемъ выполнить построеніе графика расматриваемаго интеграла

$$\int_{x_0}^{x}(a + bx + cx^2)\,dx = U_{x_0}^x = \text{пл.}\,(A_0K_0KA),$$

пріемомъ, указаннымъ въ первомъ изъ разобранныхъ нами примѣровъ, т. е. отложивъ отъ точки A_0 по направленію оси абсциссъ отрѣзокъ A_0A_2 равный масштабной единицѣ длины $[l]$ и проведя черезъ точку A_2 перпендикуляръ A_2K_2 къ той же оси OX до пересѣченія съ линіей K_0K въ точкѣ K_2, найдемъ точку пересѣченія N прямой A_0K_2 съ ординатою AM или ея продолженіемъ; въ такомъ случаѣ эта точка N будетъ принадлежать искомому графику, ибо



Черт. 11.

$$\frac{AN}{A_2K_2} = \frac{A_0A}{A_0A_2} \text{ но } A_2K_2 = A_0K_0 \text{ и } A_0A_2 = [l],$$

слѣдовательно

$$AN = \frac{A_0A \cdot A_0K_0}{[l]} = \frac{\text{пл.}\ (A_0K_0KA)}{[l^2]}[l] = \frac{U_{x_0}^x}{[l^2]}[l],$$

т. е. ордината AN содержитъ въ себѣ столько масштабныхъ единицъ длины $[l]$, сколько площадь $U_{x_0}^x$ содержитъ въ себѣ единицъ площади $[l^2]$.

Въ разобранныхъ примѣрахъ мы указали геометрическія построенія отдѣльныхъ точекъ графиковъ нѣкоторыхъ интеграловъ; но существуютъ приборы, называемые **интеграфами**, которые даютъ возможность по графику данной функціи прямо **вычертить** графикъ ея интеграла.

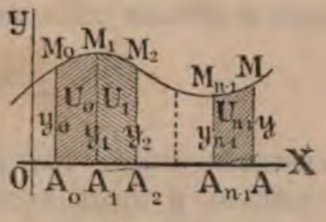
Замѣтимъ наконецъ, что въ виду геометрическаго значенія интеграла какъ алгебраической площади подъинтегральной функціи, интегралъ отъ функціи называютъ еще ея **квадратурою** и если какая-нибудь конечная величина выражена черезъ интегралъ, то говорятъ, что вычисленіе этой величины **приведено къ квадратурѣ**, т. е. *къ вычисленію нѣкоторой площади.*

§ 12. Формулы для приближеннаго вычисленія интеграловъ.

Съ геометрическимъ значеніемъ интеграловъ какъ алгебраическихъ площадей графиковъ подъинтегральныхъ функцій связаны нѣкоторые пріемы и формулы для приближеннаго вычисленія интеграловъ.

I. Формула трапецій.

Разбивъ основаніе A_0A алгебраической площади $U_{x_0}^x$ (черт. 12) графика данной функціи на n равныхъ частей $\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$ и проведя черезъ всѣ дѣленія соотвѣтствующія имъ ординаты $y_0, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, y$,



Черт. 12.

соединимъ концы этихъ ординатъ $M_0, M_1, \ldots. M_{n-1}, M$ послѣдовательно прямыми линіями; въ такомъ случаѣ на площадь $U_{x_0}^x$

приближенно можно смотрѣть какъ на сумму полученныхъ такимъ построеніемъ n трапецій:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1};$$

принявъ наконецъ во вниманіе, что площадь каждой трапеціи равна полусуммѣ ея параллельныхъ сторонъ умноженной на высоту, мы приходимъ къ ряду очевидныхъ равенствъ:

$$u_0 = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1);\ u_1 = \frac{\Delta x}{2}(y_1 + y_2);\ \ldots\ u_{n-1} = \frac{\Delta x}{2}(y_{n-1} + y);$$

слѣдовательно

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{\Delta x}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y\}$$

$$= \Delta x\left\{\frac{y_0 + y}{2} + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right\},$$

т. е. *алгебраическая площадь* $U^x_{x_0}$ *графика данной функціи* $y = f(x)$ *или интегралъ* $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ **приближенно** *равны одному дѣленію* $\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$ *основанія графика, умноженному на полусумму крайнихъ ординатъ, сложенную съ суммою всѣхъ промежуточныхъ ординатъ.*

Формула эта носитъ названіе *формулы трапецій.*

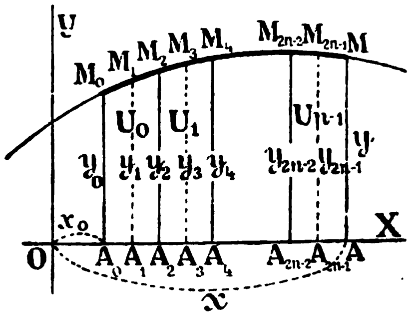
II. Формула Симпсона.

Раздѣливъ основаніе A_0A алгебраической площади $U^x_{x_0}$ графика данной функціи на четное число $2n$ равныхъ частей

$$\Delta x = \frac{A_0A}{2n} = \frac{x - x_0}{2n},$$

проведемъ (черт. 13) черезъ всѣ дѣленія соотвѣтствующія имъ ординаты и предположимъ, что черезъ каждыя три послѣдовательныя точки нашего графика M_0, M_1, M_2: M_2, M_3, M_4: .... M_{2n-2}, M_{2n-1}, M, соотвѣтствующія этимъ ординатамъ, проведены дуги параболъ 2-го порядка $\overset{\frown}{M_0M_1M_2}$, $\overset{\frown}{M_2M_3M_4}$ .... $\overset{\frown}{M_{2n-2}M_{2n-1}M}$,

т. е. дуги, координаты точекъ которыхъ удовлетворяютъ уравненіямъ вида $y = a + bx + cx^2$ *); въ такомъ случаѣ на данную алгебраическую площадь $U_{x_0}^x$ **приближенно**, при достаточно большомъ n, можно смотрѣть, какъ на сумму n площадокъ:



Черт. 13.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

изъ которыхъ каждая ограничена съ одной стороны дугою нѣкоторой параболы 2-го порядка, а съ остальныхъ сторонъ — осью абсциссъ и двумя ординатами даннаго графика, имѣющими четные значки; но, по выше доказанной теоремѣ,

$$u_0 = \frac{2\Delta x}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$u_1 = \frac{2\Delta x}{6}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \frac{2\Delta x}{6}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y),$$

слѣдовательно

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\{(y_0 + y) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\},$$

*) Коэффиціенты a, b, c всегда можно такъ подобрать, что соотвѣтствующая имъ парабола пройдетъ черезъ три заданныя точки; напр. для дуги параболы проходящей черезъ точки M_0, M_1, M_2 коэффиціенты a, b, c опредѣлятся изъ трехъ уравненій:

$$y_0 = a + bx_0 + cx_0^2,\quad y_1 = a + bx_1 + cx_1^2,\quad y_2 = a + bx_2 + cx_2^2:$$

подобнымъ же образомъ опредѣлятся коэффиціенты въ уравненіяхъ всѣхъ остальныхъ параболъ.

т. е. *алгебраическая площадь* $U_{x_0}^{x}$ *графика данной функціи* $y = f(x)$ *или интегралъ* $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ **приближенно** *равны* $\frac{1}{3}$ *дѣленія*

$$\Delta x = \frac{A_0 A}{2n} = \frac{x - x_0}{2n}$$

основанія графика на четное число 2n равныхъ частей, умноженной на сумму крайнихъ ординатъ, сложенную съ удвоенною суммою четныхъ ординатъ и учетверенною суммою нечетныхъ ординатъ. Формула эта, служащая для приближеннаго вычисленія площадей или интеграловъ, носитъ названіе *формулы Симпсона.*

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Ар. Домогаровъ,

(магистръ прикладной математики).

Выпускъ II,

КИНЕМАТИКА.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.

1899.

Печатано по распоряженію Института инженеровъ путей сообщенія Императора АЛЕКСАНДРА I.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВЫПУСКЪ II.

КИНЕМАТИКА.

ГЛАВА I.

Движеніе точки.

стр.

I. Скорость точки. . . . . 1—20

§ 1. Траекторія точки.—§ 2. Графикъ разстоянія.—§ 3. Перемѣщеніе точки по ея траекторіи и путь пройденный только за данный промежутокъ времени. — § 4. Средняя скорость перемѣщенія точки по ея траекторіи. — § 5. Равномѣрное движеніе точки. — § 6. Величина и направленіе скорости точки въ данный моментъ.— § 7. Графическое значеніе средней скорости и величины скорости точки въ данный моментъ. — § 8. Второе опредѣленіе величины и направленія скорости точки въ данный моментъ. — § 9. Значеніе скорости точки въ данный моментъ.—§ 10. Скорость точки, какъ геометрическая производная радіуса вектора точки.—§ 11. Скорость проектированныхъ движеній точки на неподвижную плоскость и неподвижную прямую.—§ 12. Аналитическое выраженіе проекціи скорости точки на неподвижную ось.—§ 13. Аналитическія выраженія величины и направленія скорости точки въ прямоугольной, прямолинейной системѣ координатъ.—§ 14. Опредѣленіе движенія точки по ея скорости и начальному положенію.

II. Ускореніе точки 21 48

§ 1. Среднее ускореніе въ прямолинейномъ движеніи точки.— § 2. Равноперемѣнное прямолинейное движеніе точки.—§ 3. Величина и направленіе ускоренія точки въ данный моментъ въ прямолинейномъ движеніи.—§ 4. Ускореніе точки въ данный моментъ въ общемъ случаѣ ея движенія. — § 5. Нѣкоторыя геометрическія понятія.—§ 6. Касательное и нормальное ускоренія точки.—§ 7. Ускореніе проектированныхъ движеній точки на неподвижную плоскость и неподвижную прямую. — § 8. Аналитическое выраженіе проекціи ускоренія точки на неподвижную ось. — § 9. Аналитическія выраженія величины и направленія ускоренія точки въ прямоугольной, прямолинейной системѣ координатъ.—§ 10. Опредѣленіе движенія точки по ея ускоренію и начальнымъ обстоятельствамъ движенія.

ГЛАВА II.

Движеніе твердаго тѣла.

стр.

I. Поступательное движеніе твердаго тѣла . . . . 47—48

§ 1. Опредѣленіе поступательнато движенія твердаго тѣла.— § 2. Перемѣщеніе, скорость и ускореніе твердаго тѣла при поступательномъ его движеніи.

II. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси. . 49—58

§ 1. Опредѣленіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.—§ 2. Средняя угловая скорость и угловая скорость твердаго тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси.—§ 3. Выраженіе величины и направленія скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси.— § 4. Среднее угловое ускореніе и ускореніе твердаго тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси.— § 5. Выраженіе величины и направленія ускореній точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси.

III. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки . . . . 58—76

§ 1. Теорема о перемѣщеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.—§ 2. Средняя угловая скорость и средняя ось вращенія твердаго тѣла, движущагося вокругъ неподвижной точки.— § 3. Воспроизведеніе движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.—§ 4. Угловая скорость твердаго тѣла въ данный моментъ и ея значеніе при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.—§ 5. Выраженіе величины и направленія скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.—§ 6. Построеніе мгновенной оси и угловой скорости твердаго тѣла въ данный моментъ при движеніи тѣла вокругъ неподвижной точки.— § 7. Подвижной и неподвижный годографы угловой скорости при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.—§ 8. Угловое ускореніе твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.—§ 9. Выраженіе величины и направленія ускореній точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

IV. Движеніе твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости, или движеніе плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости . . . . 76—100

§ 1. Приведеніе разсмотрѣнія движенія твердаго тѣла, совершающагося параллельно неподвижной плоскости, къ разсмотрѣнію движенія плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.—§ 2. Пер-

стр.

вая теорема о перемѣщеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости. — § 3. Вторая теорема о перемѣщеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.— § 4. Средняя угловая скорость и средній центръ перемѣщенія плоской неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.—§ 5. Воспроизведеніе движенія плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.—§ 6. Угловая скорость и угловое ускореніе въ данный моментъ плоской, неизмѣняемяй фигуры, движущейся въ ея плоскости. — § 7. Значеніе мгновеннаго центра и угловой скорости въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.—§ 8. Первое выраженіе скоростей точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.—§ 9. Второе выраженіе скоростей точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.— § 10. Построеніе мгновеннаго центра и угловой скорости въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.—§ 11. Выраженіе ускореній точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.—§ 12. Мгновенный центръ ускореній точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

V. Общій случай движенія твердаго тѣла. . . . . 101—128

§ 1. Первая теорема о перемѣщеніи твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія. — § 2. Вторая теорема о перемѣщеніи твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.—§ 3. Средняя винтовая ось, средняя угловая скорость и средняя скорость скольженія твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.—§ 4. Мгновенная винтовая ось, угловая скорость и скорость скольженія движущагося твердаго тѣла въ данный моментъ. Значеніе этихъ понятій—§ 5. Воспроизведеніе общаго случая движенія твердаго тѣла.— § 6. Выраженіе скоростей точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія. — § 7. Свойства скоростей точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія. — § 8. Построеніе угловой скорости и мгновенной винтовой оси движущагося твердаго тѣла въ данный моментъ. — § 9. Угловое ускореніе твердаго тѣла въ данный моментъ въ общемъ случаѣ его движенія.— § 10. Выраженіе ускореній точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

ГЛАВА III.

Соединеніе и разложеніе движеній точекъ и твердыхъ тѣлъ.

I. Соединеніе и разложеніе движеній точки. . . . . . . 129—148

§ 1. Относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу. Скорость и ускореніе относительнаго движенія точки. — § 2. Зависимость между скоростями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки, совер-

стр.

шающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу. — § 3. Зависимость между ускореніями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки, совершающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу. Добавочное ускореніе такой точки.—§ 4. Движеніе точки составное изъ движеній *n* другихъ точекъ.

II. Соединеніе и разложеніе движеній твердаго тѣла. 148—208

§ 1. Относительное движеніе твердаго тѣла по отношенію къ другому твердому тѣлу. Относительная угловая скорость и относительное угловое ускореніе твердаго тѣла. — § 2. Зависимость между угловыми скоростями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла. — § 3. Зависимость между угловыми ускореніями абсолютнаго и относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла. — § 4. Зависимость между положеніями мгновенныхъ винтовыхъ осей и между скоростями скольженій абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла. — § 5. Частные случаи соединеній двухъ вращеній твердаго тѣла. — § 6. Опредѣленіе относительнаго движенія двухъ твердыхъ тѣлъ по ихъ абсолютнымъ движеніямъ. — § 7. Движеніе твердаго тѣла составное изъ *n* составляющихъ его движеній.—§ 8. Частные случаи составныхъ движеній твердаго тѣла.—§ 9. Аналитическія выраженія проекцій угловой скорости и углового ускоренія твердаго тѣла на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ въ зависимости отъ *Эйлеровыхъ* угловъ и ихъ производныхъ.

Выпускъ II.

КИНЕМАТИКА.

Кинематика *есть наука о движеніи тѣлъ* **независимо** *отъ причинъ, вызывающихъ эти движенія, или наука о движеніи* **геометрическихъ** *точекъ и тѣлъ.*

ГЛАВА I.

Движеніе точки.

I. Скорость точки.

§ 1. Траекторія точки.

При движеніи точки M геометрическое мѣсто всѣхъ ея послѣдовательныхъ положеній, или линія описываемая движущеюся точкою называется ея **траекторіею**. Траекторія точки можетъ быть прямою линіею или нѣкоторою кривою и потому по виду траекторій движенія точки раздѣляются на **прямолинейныя** и **криволинейныя.**

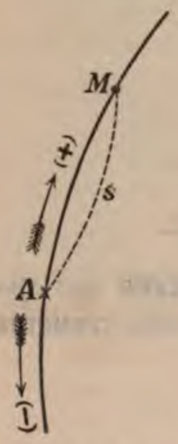
Взявъ на траекторіи движущейся точки нѣкоторую неподвижную точку A (черт. 1), условимся отсчитывать отъ нея дуги $\overset{\frown}{AM}$, описываемыя движущеюся точкою, приписывая имъ тотъ или другой знакъ, смотря по какую сторону на траекторіи находится движущаяся точка M относительно неподвижной точки A.

Дугу $\overset{\frown}{AM}$ взятую съ тѣмъ или другимъ знакомъ мы будемъ называть **разстояніемъ** *точки M по ея траекторіи* и будемъ обозначать его черезъ s.

При движеніи точки M ея разстояніе s съ теченіемъ времени

будетъ непрерывно измѣняться, такимъ образомъ мы можемъ сказать, что *разстояніе s есть нѣкоторая непрерывная функція времени t, т. е.*

$$s = f(t),$$



Черт. 1.

гдѣ подъ t мы подразумѣваемъ промежутокъ времени, протекшій отъ нѣкотораго начальнаго момента до разсматриваемаго момента.

Движеніе точки вполнѣ опредѣлено, если мы знаемъ ея положеніе для каждаго момента времени, для чего достаточно:

1) *знать видъ и положеніе траекторіи точки;*

2) *указать на траекторіи ту точку, отъ которой отсчитываются разстоянія движущейся точки и условиться относительно направленія положительныхъ разстояній;*

3) *задать законъ измѣненія разстоянія s въ зависимости отъ времени t, или*—**уравненіе движенія.**

Напримѣръ:

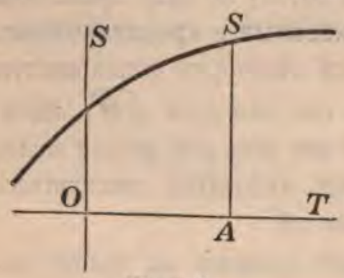
$$s = a + bt;$$

$$s = a + bt + ct^2;$$

$$s = a \sin \omega t;$$

§ 2. Графикъ разстоянія.

Законъ измѣненія разстоянія s въ зависимости отъ времени t можетъ быть еще представленъ графически, для чего обыкновенно берутъ (черт. 2) двѣ взаимно-перпендикулярныя оси OT и OS, изъ которыхъ первую называютъ **осью временъ**, а вторую **осью разстояній**. Отложивъ по оси временъ отрѣзокъ OA, заключающій въ себѣ столько **масштабныхъ** единицъ $[l]$, сколько въ промежуткѣ t заключается единицъ времени $[T]$ и возставивъ въ точкѣ A перпендикуляръ къ оси временъ, откладываютъ на немъ въ ту или другую сторону, смотря по знаку s, отрѣзокъ AS, заклю-



Черт. 2.

чающій въ себѣ столько масштабныхъ единицъ [l], сколько въ соотвѣтствующемъ данному моменту времени разстояніи s заключается единицъ длины [L]. Предположивъ такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ моментовъ времени, мы получимъ нѣкоторую сплошную линію, называемую **графикомъ разстоянія** или **графикомъ движенія точки.**

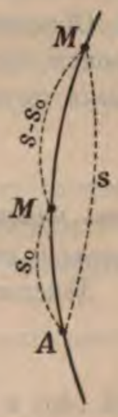
Очевидно, что *графикъ движенія нисколько не зависитъ отъ вида траекторіи точки.*

Напримѣръ:

При $s = a + bt$ графикъ разстоянія будетъ **прямою линіею,** а при $s = a + bt + ct^2$ графикъ разстоянія будетъ нѣкоторою **параболою,** независимо отъ вида траекторій движущихся точекъ.

§ 3. Перемѣщеніе точки по ея траекторіи и путь пройденный точкою за данный промежутокъ времени.

Положимъ, что въ моментъ t_0 (черт. 3) разстояніе точки M по ея траекторіи отъ нѣкоторой точки A есть s_0, а въ нѣкоторый слѣдующій моментъ t оно равно s, въ такомъ случаѣ разность $s - s_0$ называется **перемѣщеніемъ** точки M по ея траекторіи за данный промежутокъ времени $t - t_0$.



Черт. 3.

Перемѣщеніе *точки по ея траекторіи за данный промежутокъ времени надо вообще отличать отъ* **пути**, *пройденнаго точкою за тотъ же промежутокъ времени*:

1) если движеніе точки по ея траекторіи въ теченіе даннаго промежутка времени $t - t_0$ совершается въ одну и ту же сторону, то путь пройденный точкою за этотъ промежутокъ времени равенъ абсолютной величинѣ $\pm(s - s_0)$ перемѣщенія точки по ея траекторіи за тотъ же промежутокъ времени, гдѣ верхній знакъ надо брать при $(s - s_0) > 0$, т. е. при движеніи точки въ сторону положительныхъ разстояній и нижній знакъ при $(s - s_0) < 0$, т. е. при движеніи точки въ сторону отрицательныхъ разстояній;

2) если же движеніе точки въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени совершается то въ ту, то въ другую сторону по ея

траекторіи, то всегда можно разбить этотъ промежутокъ времени на такіе новые промежутки, въ теченіе которыхъ движеніе точки совершается въ одну и ту же сторону и путь пройденный точкою за данный промежутокъ времени равенъ суммѣ путей, пройденныхъ ею въ теченіи каждаго изъ этихъ новыхъ промежутковъ.

Итакъ *перемѣщеніе точки по ея траекторіи за данный промежутокъ времени можетъ быть величиною положительною, отрицательною или нулемъ, путь же пройденный точкою за тотъ же промежутокъ времени есть всегда величина положительная.*

§ 4. Средняя скорость перемѣщенія точки по ея траекторіи.

Отношеніе

$$\frac{s - s_0}{t - t_0}$$

перемѣщенія точки $s - s_0$ *по ея траекторіи за данный промежутокъ времени* $t - t_0$ *къ самому этому промежутку времени называется* **среднею скоростью перемѣщенія** *точки по ея траекторіи за этотъ промежутокъ времени.*

Обозначивъ для краткости черезъ Δs перемѣщеніе точки за данный промежутокъ времени Δt, мы видимъ, что *средняя скорость перемѣщенія точки за данный промежутокъ времени, т. е. отношеніе*

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

есть нѣкоторая сложная величина, заразъ зависящая отъ единицы длины и единицы времени.

Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$\Delta s = (\Delta s)\ [L] \quad \text{и} \quad \Delta t = (\Delta t)\ [T],$$

гдѣ (Δs) и (Δt) суть отвлеченныя числа, измѣряющія соотвѣтствующія имъ величины Δs и Δt при выбранныхъ единицахъ длины $[L]$ и времени $[T]$; слѣдовательно

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(\Delta s)}{(\Delta t)} \cdot [LT^{-1}].$$

Такимъ образомъ **символъ единицы** *или* **измѣреніе** *средней скорости перемѣщенія точки есть* $[LT^{-1}]$; этотъ символъ указываетъ

единицы $[L]$ и $[T]$, выбранныя при вычисленіи средней скорости перемѣщенія движущейся точки и служитъ для перехода отъ выраженія данной средней скорости въ однихъ единицахъ къ выраженію той же скорости въ другихъ единицахъ.

Примѣръ. Положимъ, что при вычисленіи средней скорости перемѣщенія точки за единицу длины была взята сажень, а за единицу времени минута, причемъ въ этихъ единицахъ скорость точки выразилась числомъ 30; въ такомъ случаѣ эту скорость символически можно написать подъ видомъ 30 [саж. мин.$^{-1}$], причемъ для вычисленія той же скорости въ верстахъ и секундахъ достаточно лишь подставить въ символъ единицы средней скорости выраженія старыхъ единицъ черезъ новыя и вынести числовыхъ множителей за знакъ символа, т. е.

$$30\ [\text{саж. мин.}^{-1}] = 30\left[\frac{1}{500}\ \text{верст.}\ (60\ \text{сек.})^{-1}\right] = \frac{30}{500.60}\ [\text{верст. сек.}^{-1}] = 0{,}001\ [\text{верст. сек.}^{-1}].$$

§ 5. Равномѣрное движеніе точки.

Если средняя скорость перемѣщенія точки по ея траекторіи сохраняетъ постоянную величину для всѣхъ промежутковъ времени, т. е.

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = const = C,$$

то такое движеніе точки независимо отъ вида ея траекторіи называется **равномѣрнымъ** *и* **абсолютную** *величину средней скорости перемѣщенія такого движенія точки называютъ просто* **скоростью** *даннаго равномѣрнаго движенія точки.*

Такимъ образомъ обозначивъ черезъ v_0 скорость даннаго равномѣрнаго движенія точки мы приходимъ къ равенствамъ:

$$v_0 = \pm\frac{(s - s_0)}{t - t_0} = \pm\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Изъ равенства

$$s - s_0 = C\,(t - t_0)$$

ясно, что всякое *равномѣрное движеніе точки совершается въ одну и ту же сторону по ея траекторіи*, а именно при $C > 0$ въ сто-

рону положительныхъ разстояній и при $C<0$ въ сторону отрицательныхъ разстояній, поэтому *при равномѣрномъ движеніи точки абсолютная величина* $\pm(s-s_0)$ *ея перемѣщенія за промежутокъ времени* $t-t_0$ *равна пути, пройденному точкою за тотъ же промежутокъ времени, и скорость равномѣрнаго движенія точки есть отношеніе пути пройденнаго точкою за нѣкоторый промежутокъ времени къ самому этому промежутку времени.*

Если мы возьмемъ промежутокъ времени равный выбранной единицѣ времени $[T]$, т. е. положимъ $t-t_0=1.[T]$, то мы видимъ, что

$$v_0=\pm\frac{(s-s_0)}{t-t_0}=\pm\frac{(s-s_0)}{1.[T]}=\pm(s-s_0)[T^{-1}]$$

т. е. *скорость равномѣрнаго движенія точки численно равна пути проходимому ею въ выбранную единицу времени*; другими словами, для вычисленія скорости равномѣрнаго движенія точки достаточно измѣрить разстояніе, проходимое ею въ единицу времени.

Еслибы при этомъ путь $\pm(s-s_0)$ пройденный точкою былъ равенъ выбранной единицѣ длины $[L]$, т. е. $\pm(s-s_0)=1.[L]$, то

$$v_0=1.[LT^{-1}];$$

другими словами, скорость такого равномѣрнаго движенія точки въ выбранныхъ единицахъ $[L]$ и $[T]$ выразится **единицею.**

Такимъ образомъ **единица скорости** *равномѣрнаго движенія точки есть скорость такого равномѣрнаго движенія, при которомъ точка въ единицу времени проходитъ единицу пути.*

Въ виду предъидущаго равенства единицу скорости точки при выбранныхъ единицахъ длины $[L]$ и времени $[T]$ выражаютъ символомъ $[LT^{-1}]$, и говорятъ, что *единица скорости прямо пропорціональна единицѣ длины и обратно пропорціональна единицѣ времени.*

Замѣтимъ наконецъ, что изъ равенствъ

$$\frac{s-s_0}{t-t_0}=C \text{ или } s-s_0=C(t-t_0)$$

ясно, что *уравненіе всякаго равномѣрнаго движенія точки будетъ вида*

$$s=a+bt,$$

гдѣ a и b суть нѣкоторыя постоянныя величины, причемъ a есть

разстояніе точки при $t=0$, а абсолютная величина b, т. е. $\pm b$ есть скорость даннаго равномѣрнаго движенія.

§ 6. Величина и направленіе скорости точки въ данный моментъ.

Величиною *скорости точки* **въ данный моментъ** *называется предѣлъ отношенія пути, пройденнаго точкою за безконечно малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту, къ самому этому промежутку времени* Δt.

Въ общемъ случаѣ движеніе точки можетъ совершаться то въ ту, то въ другую сторону по ея траекторіи, но при достаточно маломъ промежуткѣ времени Δt движеніе точки всегда совершается въ одну и ту же сторону, поэтому, обозначивъ черезъ Δs перемѣщеніе точки по ея траекторіи за такой промежутокъ времени Δt, мы знаемъ, что путь пройденный точкою за тотъ же промежутокъ времени будетъ равенъ абсолютной величинѣ $\pm \Delta s$ этого перемѣщенія, и потому величина скорости точки въ данный моментъ, которую мы будемъ обозначать черезъ v, опредѣлится изъ равенствъ:

$$v = \text{пред.}\ \frac{\pm \Delta s}{\Delta t} = \pm\ \text{пред.}\ \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

т. е. *величина скорости точки въ данный моментъ равна абсолютной величинѣ предѣла средней скорости перемѣщенія точки за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta s}{\Delta t} = s' = \frac{ds}{dt},$$

мы приходимъ къ заключенію, что *величина скорости точки въ данный моментъ* **аналитически** *выражается* **абсолютнымъ** *значеніемъ производной отъ разстоянія точки, взятой по времени, т. е.*

$$v = \pm s' = \pm \frac{ds}{dt}.$$

Напримѣръ:

1) если $s = a + bt$, то $v = \pm s' = \pm b$;

2) если $s = a + bt + ct^2$, то $v = \pm s' = \pm(b + 2ct)$;

3) если $s = a \sin \omega t$, то $v = \pm s' = \pm a\omega \cos(\omega t)$.

Изъ перваго примѣра ясно, что *при равномѣрномъ движеніи точки ея скорость во всѣ моменты сохраняетъ постоянную величину, равную скорости даннаго равномѣрнаго движенія.* Наоборотъ, *если скорость точки во всѣ моменты сохраняетъ постоянную величину, т. е.*

$$v = const = v_0,$$

то такое движеніе точки будетъ равномѣрнымъ.

Дѣйствительно, изъ равенства $v = \pm s'$ мы видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$s' = \pm v_0;$$

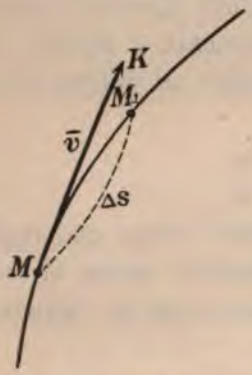
слѣдовательно

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} s' dt = \pm \int_{t_0}^{t} v_0 \, dt = \pm v_0 \, (t - t_0),$$

т. е.

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \pm v_0 = const;$$

другими словами разсматриваемое движеніе точки будетъ равномѣрнымъ.



Черт. 4.

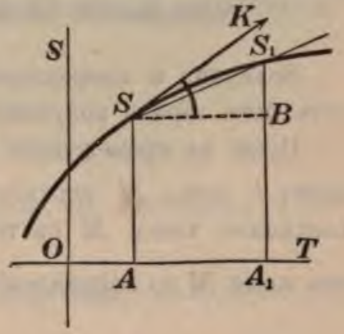
Скорости *точки въ* **данный моментъ** *кромѣ* **величины** *приписываютъ еще нѣкоторое* **направленіе**, *а именно ее изображаютъ векторомъ* $\overline{MK}$, *отложеннымъ отъ движущейся точки по касательной, проведенной къ траекторіи точки въ сторону ея движенія, причемъ векторъ этотъ содержитъ въ себѣ столько единицъ длины* $[L]$, *сколько въ скорости точки въ данный моментъ заключается единицъ скорости* $[LT^{-1}]$.

Величину и направленіе скорости точки въ данный моментъ мы будемъ обозначать знакомъ $\bar{v}$.

§ 7. Графическое значеніе средней скорости и величины скорости точки въ данный моментъ.

Положимъ мы имѣемъ (черт. 5) графикъ $\widehat{SS_1}$ движенія точки M, и пусть въ моментъ t разстояніе s точки M по ея траекторіи гра-

фически выражается ординатою AS, а въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ ея разстояніе S_1 изображается ординатою A_1S_1; въ такомъ случаѣ, мы знаемъ, что $\Delta s = s_1 - s$ графически выразится разностью ординатъ $A_1S_1 - AS = BS_1$, а Δt разностью абсциссъ $OA_1 - OA = AA_1 = SB$, т. е. обозначивъ черезъ $[l]$ выбранную при построеніи графика движенія масштабную единицу длины, а черезъ $[L]$ и $[T]$ выбранныя единицы длины и времени, мы приходимъ къ равенствамъ:



Черт. 5.

$$\frac{BS_1}{[l]} = \frac{\Delta S}{[L]} \quad \text{и} \quad \frac{SB}{[l]} = \frac{\Delta t}{[T]},$$

или

$$\Delta s = \frac{BS_1}{[l]} [L] \quad \text{и} \quad \Delta t = \frac{SB}{[l]} [T];$$

слѣдовательно

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{BS_1}{SB} [LT^{-1}] = tg\,(S_1SB)\,[LT^{-1}],$$

поэтому *средняя скорость перемѣщенія точки за промежутокъ времени* Δt *равная* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *графически выражается* tg*'омъ угла* **наклоненія** *направленія сѣкущей* $\overline{SS_1}$, *проходящей черезъ соотвѣтственныя точки графика движенія, къ направленію оси временъ* OT.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$v = \pm \text{пред.} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{пред.}\; tg\,(SS_1, OT)\,[LT^{-1}] = $$
$$= tg\,(SK, OT)\,[LT^{-1}],$$

мы приходимъ къ заключенію, что *величина скорости точки въ данный моментъ графически выражается* tg*'омъ угла между* **направленіемъ** *касательной* SK, *проведенной въ соотвѣтственной точкѣ графика движенія въ сторону оси временъ и* **направленіемъ** *оси временъ* OT.

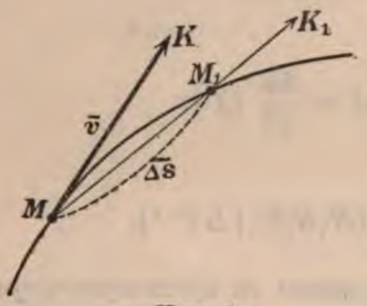
Примѣчаніе. Приведенное здѣсь графическое значеніе величины скорости точки въ данный моментъ становится очевиднымъ, если принять во вниманіе, что

$v = \pm s'$, т. е. что величина скорости точки въ данный моментъ выражается абсолютною величиною производной отъ разстоянія точки, взятою по времени.

§ 8. Второе опредѣленіе величины и направленія скорости точки въ данный моментъ.

Величина и направленіе скорости точки въ данный моментъ могутъ быть заразъ получены еще слѣдующимъ образомъ.

Пусть за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, точка M перемѣстилась по ея траекторіи на дугу $\widehat{MM_1}$; соединимъ точку M съ точкою M_1 векторомъ $\overline{MM_1}$ и отложимъ отъ точки M по направленію $\overline{MM_1}$ векторъ $\overline{MK_1} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$, т. е. векторъ во столько разъ большій $\overline{MM_1}$, во сколько разъ выбранная единица времени $[T]$ больше Δt; въ такомъ случаѣ *предѣломъ вектора $\overline{MK_1}$ при $\Delta t = 0$ по величинѣ и направленію будетъ векторъ $\overline{MK}$, совпадающій со скоростью $\bar{v}$ точки въ данный моментъ*. Дѣйствительно, принявъ во вниманіе, что хорда $\overline{MM_1}$ эквивалентна дугѣ $\widehat{MM_1}$, мы приходимъ къ равенствамъ



Черт. 6.

$$\text{пред. } MK_1 = \text{пред. } \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \text{пред. } \frac{\widehat{MM_1}}{\Delta t} = v,$$

т. е. величина вектора $\overline{MK_1}$ имѣетъ своимъ предѣломъ v; что же касается до направленія вектора $\overline{MK_1}$, то очевидно, что въ предѣлѣ оно совпадетъ съ направленіемъ касательной MK, проведенной къ траекторіи въ точкѣ M въ сторону перемѣщенія этой послѣдней.

Такимъ образомъ, обозначивъ для краткости безконечно-малый векторъ перемѣщенія точки $\overline{MM_1}$ черезъ $\overline{\Delta s}$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\bar{v} = \text{пред. } \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \text{пред. } \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t},$$

т. е. **величина** *и* **направленіе** *скорости точки въ данный моментъ* за-

разъ *выражаются предѣломъ отношенія вектора перемѣщенія точки $\overline{\Delta s}$ за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, къ самому этому промежутку Δt.*

§ 9. Значеніе скорости точки въ данный моментъ.

Итакъ мы убѣдились, что

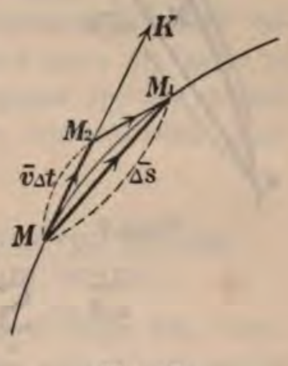
$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \overline{v};$$

переписавъ это равенство безъ знака предѣла, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \overline{v} + \overline{\varepsilon},\ \text{или}\ \overline{\Delta s} = \overline{v}\Delta t + \overline{\varepsilon}\,\Delta t,$$

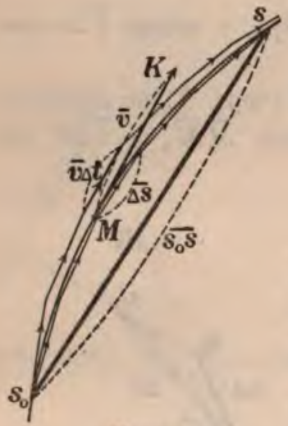
гдѣ $\overline{\varepsilon}$ есть нѣкоторый безконечно-малый векторъ, и потому $\overline{\varepsilon}\,\Delta t$ *есть безконечо-малый векторъ* **высшаго** *порядка.*

Такимъ образомъ, отложивъ отъ точки M (черт. 7) по направленію ея скорости $\overline{v}$ безконечно-малый векторъ $\overline{MM_2} = \overline{v}\,\Delta t$, изъ предъидущаго равенства мы видимъ, что этотъ векторъ $\overline{MM_2}$ равный $\overline{v}\,\Delta t$ будетъ отличаться отъ безконечно-малаго вектора перемѣщенія точки $\overline{MM_1} = \overline{\Delta s}$ на безконечно-малый векторъ $\overline{M_2M_1} = \overline{\varepsilon}\,\Delta t$, **высшаго** порядка малости; такіе безконечномалые векторы мы будемъ называть **геометрически эквивалентными**. На произведеніе $\overline{v}\,\Delta t$ можно смотрѣть, какъ на перемѣщеніе точки за промежутокъ времени Δt при прямолинейномъ равномѣрномъ движеніи точки со скоростью $\overline{v}$; слѣдовательно *при замѣнѣ дѣйствительнаго движенія точки въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, прямолинейнымъ равномѣрнымъ движеніемъ точки со скоростью $\overline{v}$, геометрически равною скорости точки* **въ данный моментъ** *въ ея дѣйствительномъ движеніи, безконечно-малый векторъ перемѣщенія точки $\overline{v}\,\Delta t$ въ этомъ воображаемомъ движеніи* **геометрически**



Черт. 7.

эквивалентенъ *безконечно-малому вектору перемѣщенія точки* $\overline{\Delta s}$ *за тотъ-же промежутокъ времени въ ея дѣйствительномъ движеніи*, причемъ нетрудно непосредственно убѣдиться, что **геометрическая эквивалентность** безконечно-малыхъ векторовъ играетъ роль подобную алгебраической эквивалентности безконечно-малыхъ величинъ, а именно *при отъисканіи предѣла отношенія безконечно-малаго вектора* $\overline{\Delta s}$ *къ безконечно-малой величинѣ* Δt *и при отъисканіи пред.* $\mathop{S}\limits_{t_0}^{t} \overline{\Delta s}$, *т. е. предѣла геометрической суммы безконечно-большого числа безконечно-малыхъ векторовъ* $\overline{\Delta s}$ *можно, не измѣняя искомыхъ предѣловъ,* **подставить** *вмѣсто векторовъ* $\overline{\Delta s}$ **эквивалентные** *имъ верторы* $\overline{v}\,\Delta t$, *т. е.*



Черт. 8.

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}\,\Delta t}{\Delta t} = \overline{v}$$

и

$$\text{пред.} \mathop{S}\limits_{t_0}^{t} \overline{\Delta s} = \text{пред.} \mathop{S}\limits_{t_0}^{t} \overline{v}\,\Delta t.$$

При движеніи точки M въ пространствѣ (черт. 8) ея векторъ перемѣщенія $\overline{s_0 s}$ за промежутокъ времени $t - t_0$ очевидно равенъ геометрической суммѣ всѣхъ ея послѣдовательныхъ векторовъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}$, если мы раздѣлимъ промежутокъ времени $t - t_0$ на безконечно-малые элементы Δt; слѣдовательно

$$\overline{s_0 s} = \mathop{S}\limits_{t_0}^{t} \overline{\Delta s} = \text{пред.} \mathop{S}\limits_{t_0}^{t} \overline{v}\,\Delta t = \int_{t_0}^{t} \overline{v}\,dt$$

Такимъ образомъ *на всякое движеніе точки можно смотрѣть, какъ на предѣлъ ряда послѣдовательныхъ* **прямолинейныхъ** *и* **равномѣрныхъ** *движеній*, если мы мысленно раздѣлимъ промежутокъ времени $t - t_0$ на безконечно-малые элементы Δt, и въ каждый такой элементъ времени замѣнимъ дѣйствительное движеніе точки прямолинейнымъ и равномѣрнымъ движеніемъ со скоростью, равною скорости точки въ начальный моментъ разсматриваемаго элемента времени.

Примѣчаніе. *Вообще два безконечно-малыхъ вектора* $\overline{v}_1$ *и* $\overline{v}_2$ *бу-*

дутъ **геометрически эквивалентны**, *когда они эквивалентны* **по величинѣ**, *т. е. величины ихъ отличаются на безконечно-малую величину высшаго порядка и* **направленія** *ихъ составляютъ безконечно-малый уголъ* α.

Дѣйствительно, проведя изъ общей точки M векторы (черт. 9)

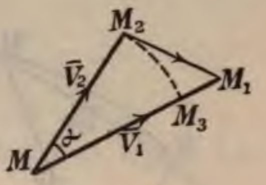
$$\overline{MM}_1 = \overline{\mathrm{v}}_1 \text{ и } \overline{MM}_2 = \overline{\mathrm{v}}_2$$

мы видимъ, что

$$\overline{MM}_1 = \overline{MM}_2 + \overline{M_2M}_1,$$

т. е.

$$\overline{\mathrm{v}}_1 - \overline{\mathrm{v}}_2 = \overline{M_2M}_1.$$



Черт. 9.

Описавъ затѣмъ изъ той же точки M радіусомъ равнымъ меньшому вектору $\overline{\mathrm{v}}_2$ дугу окружности $\widehat{M_2M_3}$ до пересѣченія съ векторомъ $\overline{\mathrm{v}}_1$, мы знаемъ, что

$$\overline{M_2M}_1 < \widehat{M_2M_3} + \overline{M_3M}_1 = \mathrm{v}_2\,\alpha + (\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2);$$

слѣдовательно, если уголъ α безконечно-малъ и безконечно-малые векторы $\overline{\mathrm{v}}_1$, $\overline{\mathrm{v}}_2$ по величинѣ эквивалентны, то правая часть послѣдняго выраженія будетъ безконечно-малою величиною высшаго порядка, т. е. векторы $\overline{\mathrm{v}}_1$ и $\overline{\mathrm{v}}_2$ будутъ отличаться другъ отъ друга на безконечно-малый векторъ $\overline{M_2M}_1$ высшаго порядка; другими словами такіе безконечно-малые векторы $\overline{\mathrm{v}}_1$, $\overline{\mathrm{v}}_2$ будутъ геометрически эквивалентны.

§ 10. Скорость точки, какъ геометрическая производная радіуса вектора точки.

Взявъ въ пространствѣ неподвижную точку O (черт. 10), соединимъ ее съ движущеюся точкою M; въ такомъ случаѣ векторъ OM мы будемъ называть **радіусомъ векторомъ** движущейся точки относительно неподвижной точки O; при движеніи точки M ея радіусъ-векторъ будетъ вообще измѣнять свою величину и направленіе. Обозначивъ величину и направленіе радіуса-вектора въ моментъ t черезъ $\overline{r}$, а въ моментъ t_1 черезъ $\overline{r}_1$, мы видимъ, что

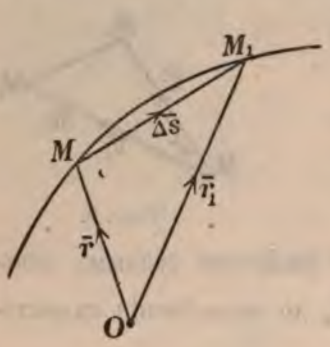
$$\overline{r}_1 - \overline{r} = \overline{OM}_1 - \overline{OM} = \overline{MM}_1 = \overline{\Delta s},$$

т. е.

$$\overline{\Delta s} = \overline{r}_1 - \overline{r} = \overline{\Delta r}.$$

Раздѣливъ предъидущее равенство на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \overline{v},$$



Черт. 10.

т. е. скорость точки въ данный моментъ по величинѣ и направленію можетъ быть представлена, какъ предѣлъ отношенія геометрическаго приращенія $\overline{\Delta r} = \overline{r}_1 - \overline{r}$ радіуса-вектора точки за безконечно-малый промежутокъ времени Δt къ самому этому промежутку времени.

Такой предѣлъ отношенія называютъ **геометрической производной** *радіуса-вектора движущейся точки.*

Такимъ образомъ можно сказать, что *скорость точки въ данный моментъ по величинѣ и направленію выражается* **геометрической производной** *отъ ея радіуса-вектора, т. е.*

$$v = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}.$$

§ 11. Скорость проектированныхъ движеній точки на неподвижную плоскость и неподвижную прямую.

При движеніи точки M въ пространствѣ ея проекція m на нѣкоторую неподвижную плоскость P (черт. 11), вообще говоря, совершаетъ нѣкоторое движеніе въ этой плоскости.

Обозначивъ черезъ $\overline{V}$ скорость данной точки M, а черезъ $\overline{v}$ скорость ея проекціи m, мы знаемъ, что

$$\overline{V} = \overline{MK} = \text{пред.}\ \overline{MK_1} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

и

$$\overline{v} = \overline{mk} = \text{пред.}\ \overline{mk_1} = \text{пред.}\ \frac{\overline{mm_1}}{\Delta t},$$

гдѣ m и m_1 суть проекціи точки M въ моменты t и $t_1 = t + \Delta t$ на плоскость P.

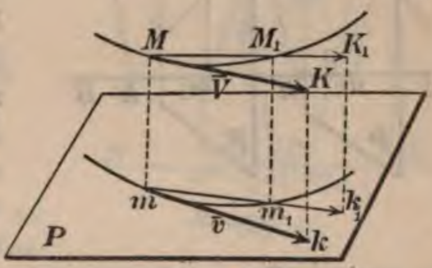
Принявъ во вниманіе, что по построенію

$$\frac{MM_1}{\Delta t} = MK_1 \text{ и } \frac{mm_1}{\Delta t} = mk_1$$

мы получаемъ равенство

$$\frac{MM_1}{MK_1} = \frac{mm_1}{mk_1};$$

замѣтивъ наконецъ, что линіи MK_1 и mk_1 лежатъ въ одной плоскости, мы приходимъ къ заключенію, что линія K_1k_1 параллельна линіямъ Mm и M_1m_1, и потому линія K_1k_1 будетъ перпендикулярна къ плоскости P, т. е. точка k_1 будетъ проекціей точки K_1 на плоскость P и векторъ $\overline{mk_1}$ будетъ проекціей на ту же плоскость вектора $\overline{MK_1}$, какъ бы не былъ малъ промежутокъ времени Δt; слѣдовательно и



Черт. 11.

въ предѣлѣ при $\Delta t = 0$ векторъ $\overline{mk_1}$ будетъ проекціей вектора $\overline{MK_1}$ на плоскость P; принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$\text{пред. } \overline{MK_1} = \overline{MK} = \overline{V}$$

и

$$\text{пред. } \overline{mk_1} = \overline{mk} = \overline{v}$$

мы приходимъ къ заключенію, что *скорость проекціи точки на любой неподвижной плоскости во всякій моментъ есть проекція скорости самой точки на ту же плоскость.*

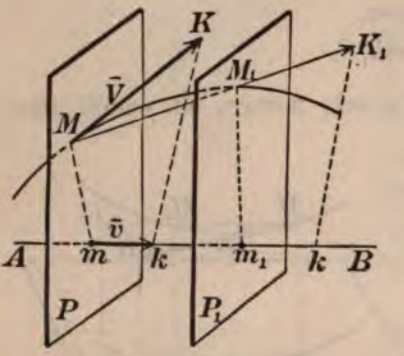
Подобнымъ же образомъ при движеніи точки M въ пространствѣ ея проекція m на произвольной неподвижной прямой AB (черт. 12) совершаетъ, вообще говоря, нѣкоторое движеніе по этой прямой.

Обозначивъ черезъ $\overline{V} = \overline{MK}$ скорость точки M, а черезъ $\overline{v} = \overline{mk}$ скорость ея проекціи m на прямой AB, подобно предъидущему мы

придемъ къ равенству

$$\frac{MM_1}{MK_1} = \frac{mm_1}{mk_1};$$

слѣдовательно линіи Mm, M_1m_1 и K_1k_1 должны лежать въ параллельныхъ плоскостяхъ. Принявъ наконецъ во вниманіе, что линіи Mm и M_1m_1 лежатъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ данной линіи AB, мы приходимъ къ заключенію, что линія K_1k_1 тоже лежитъ въ плоскости перпендикулярной къ линіи AB; т. е. точка k_1 будетъ проекціей точки K_1 на линіи AB и векторъ $\overline{mk}_1$ будетъ проекціей на той же линіи вектора $\overline{MK}_1$, какъ бы не былъ малъ промежутокъ времени Δt, слѣдовательно и пред. $\overline{mk}_1 = \overline{mk} = \overline{v}$ будетъ проекціей пред. $\overline{MK}_1 = \overline{MK} = \overline{V}$ на линію AB, т. е. *скорость проекціи точки на любой неподвижной линіи во всякій моментъ совпадаетъ съ проекціей скорости самой точки на той же линіи.*



Черт. 12.

§ 12. Аналитическое выраженіе проекціи скорости точки на неподвижную ось.

Положимъ намъ дана (черт. 13) нѣкоторая ось AX; проведя изъ произвольной точки O радіусы-векторы движущейся точки, мы видимъ, что

$$\overline{OM}_1 = \overline{OM} + \overline{MM}_1$$

или

$$\overline{MM}_1 = \overline{OM}_1 - \overline{OM} = \overline{r}_1 - \overline{r}.$$

Спроектировавъ обѣ части этого равенства на ось OX, мы приходимъ къ равенству

$$MM_1 . \cos(\overline{MM}_1, X) = r_{1,x} - r_x - \Delta r_x,$$

гдѣ Δr_x есть приращенiе проекцiи на оси OX радiуса-вектора точки за промежутокъ времени Δt.

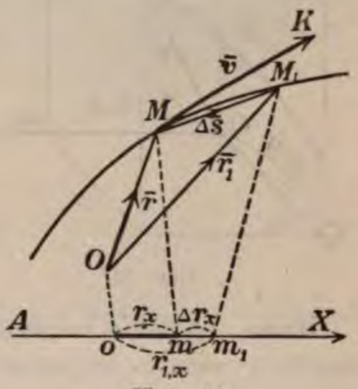
Раздѣливъ наконецъ обѣ части предъидущаго равенства на Δt и замѣтивъ, что

$$\text{пред.}\frac{\overline{MM}_1 \cdot \cos(MM_1, X)}{\Delta t} = \text{пред.}\frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} \cdot \text{пред.}\cos(MM_1, X)$$

$$= v\cos(v, X) = v_x$$

и

$$\text{пред.}\frac{\Delta r_x}{\Delta t} = r'_x,$$



Черт. 13.

мы приходимъ къ заключенiю, что

$$v_x = v\cos(v, X) = r'_x,$$

т. е. *проекцiя скорости точки на неподвижную ось* **аналитически** *выражается производною отъ проекцiи радiуса-вектора точки на той же оси.*

§ 13. Аналитическiя выраженiя величины и направленiя скорости точки въ прямоугольной прямолинейной системѣ координатъ.

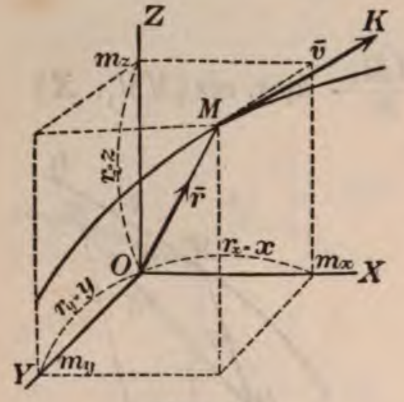
При движенiи точки M въ пространствѣ (черт. 14) ея прямоугольныя координаты (x, y, z) съ теченiемъ времени будутъ измѣняться, т. е. онѣ будутъ нѣкоторыми функцiями времени. Положимъ, что намъ извѣстны эти функцiи:

$$x = F_1(t),\ y = F_2(t),\ z = F_3(t);$$

тогда движенiе точки будетъ вполнѣ опредѣлено, такъ какъ мы будемъ знать ея положенiе для каждаго момента времени; спрашивается, какъ опредѣлить величину и направленiе скорости $\overline{v}$ движущейся точки въ данный моментъ?

Чтобы найти величину и направленiе скорости $\overline{v}$, намъ достаточно опредѣлить ея проекцiи v_x, v_y, v_z на оси $(O;\ X,\ Y,\ Z)$. Со-

единивъ съ этою цѣлью начало координатъ O съ движущеюся точкою M радіусомъ векторомъ $\overline{OM}=\bar{r}$, мы знаемъ, что



Черт. 14.

$$r_x=x,\ r_y=y,\ r_z=z,$$

гдѣ подъ r_x, r_y, r_z мы подразумѣваемъ проекціи радіуса вектора $\bar{r}$ движущейся точки M на соотвѣтственныя оси координатъ, и потому, воспользовавшись предъидущею теоремою, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = r_x' = x', \\ v_y = r_y' = y', \\ v_z = r_z' = z'. \end{array}\right.$$

Итакъ, *проекціи скорости точки на оси прямоугольной прямолинейной системы координатъ аналитически выражаются первыми производными отъ координатъ точки, т. е.*

$$v_x = x',\quad v_y = y',\quad v_z = z'$$

и потому *величина и направленіе скорости точки въ данный моментъ опредѣляются изъ равенствъ:*

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(v,\ X)=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{x'}{+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ \cos(v,\ Y)=\dfrac{v_y}{v}=\dfrac{y'}{+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ \cos(v,\ Z)=\dfrac{v_z}{v}=\dfrac{z'}{+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{array}\right.$$

Примѣръ. Изслѣдовать движеніе точки, заданное въ прямоугольной прямолинейной системѣ координатъ уравненіями:

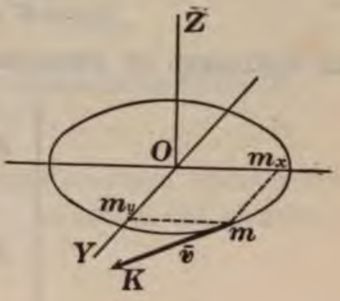
$$x = r\cos\omega t,\quad y = r\sin\omega t,\quad z = 0,$$

гдѣ ω есть нѣкоторое постоянное количество.

Такъ какъ z постоянно равно нулю, то движенiе точки совершается (черт. 15) въ плоскости XOY. Исключивъ изъ первыхъ двухъ равенствъ t, мы приходимъ къ уравненiю траекторiи

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

изъ котораго видно, что траекторiя даннаго движенiя есть окружность, описанная въ плоскости XOY радiусомъ r около начала координатъ.



Черт. 15.

Найдемъ скорость этого движенiя точки

$$\left.\begin{aligned} v_x &= x' = -r\omega \sin \omega t; \\ v_y &= y' = r\omega \cos \omega t; \\ v_z &= z' = 0; \end{aligned}\right\} \text{ слѣдовательно } v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r\omega,$$

т. е. движенiе точки совершается по указанной окружности равномѣрно, со скоростью равною $r\omega$.

Примѣчанiе При равномѣрномъ движенiи точки M по окружности ея проекцiи m_x и m_y на соотвѣтственныя оси OX, OY совершаютъ по этимъ осямъ нѣкоторыя колебательныя движенiя, называемыя **гармоническими** движенiями.

§ 14. Опредѣленiе движенiя точки по ея скорости и начальному положенiю точки.

Движенiе точки вполнѣ опредѣляется, если извѣстны:

1) **величина** *и* **направленiе** *скорости точки въ каждый моментъ времени, и*

2) **положенiе** *точки въ нѣкоторый* **начальный** *моментъ* t_0.

Дѣйствительно, если извѣстны величина и направленiе скорости $\bar{v}$ движущейся точки въ каждый моментъ, то будутъ извѣстны и три ея проекцiи v_x, v_y, v_z на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ, заданiе же положенiя точки въ начальный моментъ t_0 опредѣлитъ три ея координаты въ этотъ моментъ.

Итакъ положимъ, что

$$v_x = f_1(t); \quad v_y = f_2(t); \quad v_z = f_3(t),$$

и при $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

Принявъ во вниманіе, что

$$v_x = x', \quad v_y = y', \quad v_z = z',$$

мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x dt; \\ y &= y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y dt; \\ z &= z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z dt; \end{aligned}\right.$$

такъ какъ разность двухъ значеній каждой функціи выражается интеграломъ отъ ея производной, взятымъ въ тѣхъ же предѣлахъ. При помощи предъидущихъ формулъ мы можемъ вычислить координаты (x, y, z) движущейся точки для каждаго момента времени t.

Такимъ образомъ *движеніе точки вполнѣ опредѣляется, если извѣстны величина и направленіе ея скорости* $\overline{v}$ *для каждаго момента времени и положеніе точки въ нѣкоторый начальный моментъ* t_0.

Примѣръ. Опредѣлить движеніе точки, когда извѣстно, что проекціи ея скорости на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ выражаются равенствами:

$$v_x = \alpha, \quad v_y = \beta t, \quad v_z = \gamma t^2$$

и при $t = 0$ $\qquad x = a, \quad y = b, \quad z = c.$

Въ такомъ случаѣ

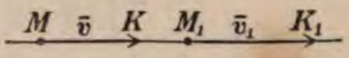
$$\left\{\begin{aligned} x &= a + \int_0^t \alpha\, dt = a + \alpha t \\ y &= b + \int_0^t \beta t\, dt = b + \left|\frac{\beta t^2}{2}\right|_0^t = b + \frac{\beta t^2}{2} \\ z &= c + \int_0^t \gamma t^2\, dt = c + \left|\frac{\gamma t^3}{3}\right|_0^t = c + \frac{\gamma t^3}{3} \end{aligned}\right.$$

II. Ускореніе точки.

§ 1. Среднее ускореніе въ прямолинейномъ движеніи точки.

Пусть въ нѣкоторый моментъ t величина скорости прямолинейнаго движенія точки (черт. 16) равна v, а въ слѣдующій моментъ t_1 она равна v_1; въ такомъ случаѣ отношеніе

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t},$$



Черт. 16.

т. е. *отношеніе алгебраическаго приращенія скорости точки за нѣкоторый промежутокъ времени къ самому этому промежутку называется* **среднимъ ускореніемъ** *прямолинейнаго движенія точки за данный промежутокъ времени* $t_1 - t$.

Обозначивъ для краткости черезъ Δv алгебрическое приращеніе скорости въ прямолинейномъ движеніи точки за промежутокъ времени Δt, мы знаемъ, что

$$\Delta v = (\Delta v)\,[LT^{-1}]$$

и

$$\Delta t = (\Delta t)\,[T],$$

гдѣ (Δv) и (Δt) суть отвлеченныя числа, измѣряющія соотвѣтствующія имъ величины Δv и Δt при выбранныхъ единицахъ длины и времени $[L]$ и $[T]$; слѣдовательно

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(\Delta v)}{(\Delta t)}\,[LT^{-2}].$$

Итакъ **символъ единицы** *или* **измѣреніе средняго** *ускоренія точки есть* $[LT^{-2}]$; символъ этотъ указываетъ единицы $[L]$ и $[T]$, выбранныя при вычисленіи средняго ускоренія точки, и служитъ для перехода отъ выраженія даннаго средняго ускоренія въ однихъ единицахъ къ выраженію того же ускоренія въ другихъ единицахъ.

Примѣръ. Если при вычисленіи средняго ускоренія точки за единицу длины былъ принятъ футъ, а за единицу времени секунда и въ этихъ еди-

ницахъ оно выразилось числомъ 35, то такое ускореніе символически можно написать подъ видомъ:

$$35\ [\text{фут. сек.}^{-2}],$$

причемъ

$$35\ [\text{фут. сек.}^{-2}] = 35\left[\frac{1}{7}\ \text{саж. сек.}^{-2}\right] = 5\ [\text{саж. сек.}^{-2}] =$$

$$= 5.60^2\ [\text{саж. мин.}^{-2}].$$

§ 2. Равноперемѣнное прямолинейное движеніе точки.

Если среднее ускореніе прямолинейнаго движенія точки сохраняетъ постоянную величину для всѣхъ промежутковъ времени, т. е.

$$\frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = const = C,$$

то такое движеніе точки называется **прямолинейнымъ равноперемѣннымъ** *движеніемъ, а среднее ускореніе точки въ такомъ движеніи называютъ просто* **ускореніемъ** *даннаго равноперемѣннаго движенія точки.*

Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ u_0 ускореніе даннаго равноперемѣннаго движенія, мы приходимъ къ равенству

$$u_0 = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Если ускореніе даннаго равноперемѣннаго движенія точки положительно, то такое движеніе называется **равноускореннымъ**, въ противномъ же случаѣ **равнозамедленнымъ.**

Примѣромъ равноускореннаго движенія точки можетъ служить вертикальное паденіе тѣла малыхъ размѣровъ въ пустотѣ; ускореніе этого равноускореннаго движенія приблизительно равно

$$32{,}2\ [\text{фут. сек.}^{-2}],\ \text{или}\ 9{,}8\ [\text{метр. сек.}^{-2}].$$

Примѣромъ равнозамедленнаго движенія точки можетъ служить движеніе вертикально подброшеннаго тѣла малыхъ размѣровъ въ пустотѣ; ускореніе этого равнозамедленнаго движенія приблизительно равно

$$-\ 32{,}2\ [\text{фут. сек.}^{-2}],\ \text{или}\ -\ 9{,}8\ [\text{метр. сек.}^{-2}].$$

Изъ равенства

$$v - v_0 = C\,(t - t_0)$$

ясно, что *при равноперемѣнномъ прямолинейномъ движеніи точки ея скорость возрастаетъ пропорціонально промежуткамъ времени* $(t - t_0)$, *протекшимъ отъ начальнаго момента* t_0 *до разсматриваемаго момента* t.

Если мы возьмемъ промежутокъ времени равный выбранной единицѣ времени $[T]$, т. е. положимъ $t - t_0 = 1\,.[T]$, то

$$u_0 = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{1\,.[T]} = (v - v_0)\,[T^{-1}],$$

т. е. *ускореніе прямолинейнаго равноперемѣннаго движенія точки численно равно приращенію скорости точки въ выбранную единицу времени;* еслибы при этомъ приращеніе скорости точки $(v - v_0)$ было равно единицѣ скорости, т. е. $v - v_0 = 1\,.[LT^{-1}]$, то

$$u_0 = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{1\,[LT^{-1}]}{1\,.[T]} = 1\,[LT^{-2}],$$

т. е. **единица ускоренія** *равноперемѣннаго прямолинейнаго движенія точки есть ускореніе такого равноускореннаго прямолинейнаго движенія, при которомъ скорость точки въ единицу времени возрастаетъ на единицу скорости.*

Въ виду послѣдняго равенства единицу ускоренія точки при выбранныхъ единицахъ длины $[L]$ и времени $[T]$ выражаютъ символомъ $[LT^{-2}]$ и говорятъ, что *единица ускоренія прямо пропорціональна единицѣ длины и обратно пропорціональна квадрату единицы времени.*

§ 3. Величина и направленіе ускоренія точки въ данный моментъ въ прямолинейномъ движеніи.

Величиною *ускоренія точки* **въ данный моментъ** *въ прямолинейномъ движеніи называется* **абсолютная** *величина предѣла средняго ускоренія точки за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t.

Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ v и v_1 величины скорости точки въ моменты t и $t_1 = t + \Delta t$, а черезъ u ея ускореніе въ мо-

ментъ t, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$u = \pm \text{пред.} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \pm \text{пред.} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \pm v'.$$

Принявъ наконецъ во вниманіе, равенство

$$v = \pm s',$$

мы приходимъ къ заключенію, что

$$u = \pm v' = \pm s'' = \pm \frac{d^2 s}{dt^2},$$

т. е. *въ прямолинейномъ движеніи величина ускоренія точки въ данный моментъ* **аналитически** *выражается* **абсолютнымъ** *значеніемъ* $\pm v'$ *первой производной отъ скорости точки, или* **абсолютнымъ** *значеніемъ* $\pm s''$ *второй производной отъ ея разстоянія.*

Примѣръ: Если при прямолинейномъ движеніи точки

$$s = a + bt, \text{ то } u = 0;$$

$$\text{если } s = a + bt + ct^2, \text{ то } u = \pm 2c.$$

Нетрудно убѣдиться, что *при равноперемѣнномъ прямолинейномъ движеніи точки ея ускореніе и во всѣ моменты времени сохраняетъ постоянную величину, равную абсолютной величинѣ ускоренія даннаго равноперемѣннаго движенія.* Дѣйствительно прямолинейное равноперемѣнное движеніе точки, какъ мы знаемъ, опредѣляется равенствами:

$$\frac{v - v_0}{t - t_0} = const = C, \text{ или } v = v_0 + C\,(t - t_0);$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ

$$u = \pm v' = \pm C = const,$$

гдѣ C, по опредѣленію, есть ускореніе u_0 даннаго равноперемѣннаго движенія.

Наоборотъ, *если при прямолинейномъ движеніи точки ея ускореніе во всѣ моменты времени сохраняетъ постоянную величину, т. е. $u = u_0$, то такое движеніе будетъ равноперемѣннымъ прямолинейнымъ движеніемъ.* Дѣйствительно, мы знаемъ, что при прямолинейномъ движеніи точки $u = \pm v'$; слѣдовательно въ разсматри-

ваемомъ случаѣ $v' = const = \pm u_0$, и

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} v'\,dt = \pm \int_{t_0}^{t} u_0 dt = \pm u_0 (t - t_0),$$

т. е.

$$\frac{v - v_0}{t - t_0} = \pm u_0 = const;$$

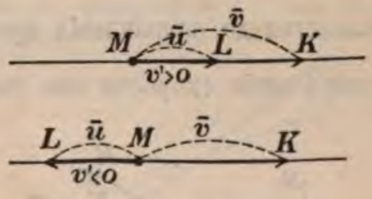
другими словами разсматриваемое прямолинейное движеніе точки будетъ равноперемѣннымъ, и потому **уравненіе** *всякаго равноперемѣннаго прямолинейнаго движенія точки будетъ вида*:

$$s = a + bt + ct^2, \text{ гдѣ } c \gtrless 0;$$

ибо въ такомъ случаѣ

$$u = \pm s'' = \pm 2c = const.$$

Ускоренію точки въ **данный моментъ** *въ прямолинейномъ движеніи кромѣ* **величины** *приписываютъ еще нѣкоторое* **направленіе**, *а именно его изображаютъ векторомъ* $\overline{u} = \overline{ML}$, *отложеннымъ отъ движущей точки M (черт. 17) по направленію ея скорости* $\overline{v} = \overline{MK}$, *если* $v' > 0$ *и противоположно этому направленію, если* $v' < 0$, *причемъ векторъ* $\overline{ML}$ *содержитъ въ себѣ столько выбранныхъ единицъ длины [L], сколько въ ускореніи точки въ данный моментъ содержится единицъ ускоренія.*



Черт. 17.

Примѣръ. При вертикальномъ паденіи тяжелой точки въ пустотѣ ея скорость возрастаетъ, поэтому ускореніе точки g отложится по ея скорости, т. е. пойдетъ *по вертикали внизъ*.

При вертикальномъ поднятіи подброшенной тяжелой точки въ пустотѣ движеніе точки будетъ равнозамедленнымъ и потому ускореніе ея, оставаясь равнымъ g, направится противоположно скорости точки, т. е. тоже *по вертикали внизъ*.

Итакъ при вертикальномъ движеніи тяжелой точки въ пустотѣ ускореніе точки *всегда направлено по вертикали внизъ*; замѣтимъ кстати, что величина g этого ускоренія, называемаго **ускореніемъ силы тяжести**, зави-

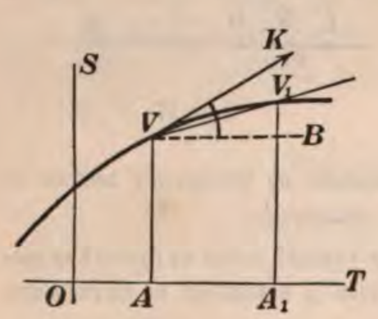
ситъ отъ широты мѣста φ **и высоты его** h **надъ уровнемъ моря, а именно:**

$$g = (980,6056 - 2,5028 \cos 2\varphi - 0,000002\, h) \; [\text{сант. сек.}^{-2}]$$

Изъ вышеприведенныхъ опредѣленій ясно, что *въ прямолинейномъ движеніи точки ея ускореніе въ данный моментъ* $\overline{u}$ **по величинѣ и направленію** *можетъ быть опредѣлено, какъ предѣлъ отношенія* **геометрическаго** *приращенія* $\overline{\Delta v}$ *скорости точки за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt; *т. е.*

$$\overline{u} = \text{пред.}\, \frac{\overline{v_1} - \overline{v}}{\Delta t} = \text{пред.}\, \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t},$$

Дѣйствительно, такъ какъ въ прямолинейномъ движеніи точки ея скорость во всѣ моменты откладывается по траекторіи точки, т. е. по нѣкоторой прямой, то величина геометрическаго приращенія скорости $\overline{\Delta v}$ равна абсолютной величинѣ $\pm\,\Delta v$ алгебраическаго приращенія скорости точки за тотъ же промежутокъ времени; слѣдовательно величина пред. $\dfrac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \pm$ пред. $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \pm\, v = u$; что же касается до направленія пред. $\dfrac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$, то ясно, что при $v' > 0$, т. е. при возрастаніи скорости оно пойдетъ по направленію скорости точки $\overline{v}$, а при $v' < 0$, т. е. при убываніи скорости оно пойдетъ противоположно этому направленію.



Черт. 18.

Послѣднее опредѣленіе величины и направленія ускоренія точки въ данный моментъ въ прямолинейномъ движеніи распространяется, какъ мы увидимъ, и на общій случай движенія точки, но предварительно замѣтимъ, что при прямолинейномъ движеніи точки величина ея ускоренія въ данный моментъ $u = \pm\, v'$ выражается черезъ скорость точки въ данный моментъ такъ же, какъ эта послѣдняя $v = \pm\, s'$ выражается черезъ разстояніе точки по ея траекторіи; поэтому, построивъ графикъ $\widehat{VV_1}$ скорости прямолинейнаго движенія точки (черт. 18), мы приходимъ къ заключенію, что *въ прямолиней-*

номъ движеніи величина ускоренія точки въ данный моментъ графически выразится tg'омъ угла между направленіемъ касательной $\overline{VK}$ проведенной въ сторону оси временъ OT въ соотвѣтственной точкѣ графика скорости точки и направленіемъ оси временъ, т. е.

$$u = tg\,(VK,\ OT)\ [LT^{-2}].$$

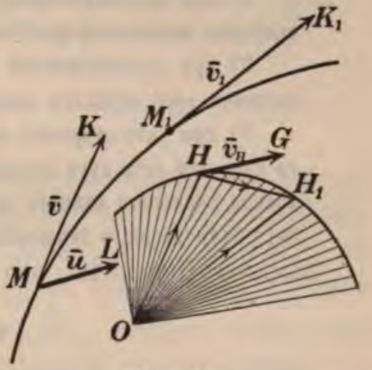
§ 4. Ускореніе точки въ данный моментъ въ общемъ случаѣ ея движенія.

При движеніи точки въ пространствѣ ея скорость, вообще говоря, измѣняетъ свою величину и направленіе.

Ускореніемъ точки въ данный моментъ *въ общемъ случаѣ ея движенія называется предѣлъ отношенія* **геометрическаго** *приращенія скорости точки за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту, къ самому этому промежутку времени* Δt.

Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ $\overline{v} = \overline{MK}$ (черт. 19) скорость точки M въ моментъ t, черезъ $\overline{u}$ ея ускореніе въ тотъ же моментъ, а черезъ $\overline{v}_1 = \overline{M_1K_1}$ ея скорость въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{t_1 - t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}.$$



Черт. 19.

Ускореніе точки въ данный моментъ есть нѣкоторый векторъ $\overline{u} = \overline{ML}$ (черт. 19), отложенный отъ движущейся точки; для выясненія величины и направленія ускоренія точки въ данный моментъ англійскій математикъ Гамильтонъ предложилъ слѣдующій пріемъ.

Взявъ въ пространствѣ произвольную точку O, отложимъ отъ нея векоръ $\overline{OH} = \overline{v}$, т. е. векторъ равный и параллельный скорости точки въ данный моментъ; предположивъ такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ моментовъ времени, мы получимъ нѣкоторую

сплошную кривую, называемую **годографомъ** *) **скорости** даннаго движенія.

При движеніи точки M въ пространствѣ ея скорость, вообще говоря, измѣняетъ свою величину и направленіе, поэтому точка H будетъ совершать нѣкоторое движеніе.

Принявъ во вниманіе, что по построенію

$$\overline{OH} = \overline{v} \text{ и } OH_1 = \overline{v}_1,$$

мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{u} = \text{пред.} \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t} = \text{пред.} \frac{\overline{OH}_1 - \overline{OH}}{\Delta t} = \text{пред.} \frac{\overline{HH}_1}{\Delta t};$$

но пред. $\frac{\overline{HH_1}}{\Delta t}$ есть скорость $\overline{v}_H$ точки H; такимъ образомъ *ускореніе точки въ данный моментъ* **геометрически** *равно скорости въ тотъ же моментъ точки, чертящей годографъ скорости даннаго движенія, т. е.*

$$\overline{u} = \overline{v}_H.$$

Упражненіе. Предлагаемъ убѣдиться, что

1) при прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи точки годографъ ея скорости обращается въ точку;

2) при произвольномъ прямолинейномъ движеніи точки годографъ ея скорости есть отрѣзокъ прямой, параллельный траекторіи точки;

3) при равномѣрномъ движеніи точки въ нѣкоторой плоскости годографъ ея скорости есть дуга окружности, плоскость которой совпадаетъ или параллельна плоскости даннаго движенія и радіусъ которой равенъ скорости даннаго равномѣрнаго движенія.

Замѣтивъ наконецъ, что равенство

$$\text{пред.} \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \overline{u}$$

безъ знака предѣла можетъ быть написано подъ видомъ:

$$\overline{\Delta v} = \overline{u}\Delta t + \overline{\varepsilon}\Delta t,$$

гдѣ $\overline{\varepsilon}\Delta t$ есть нѣкоторый безконечно-малый векторъ высшаго порядка, мы приходимъ къ заключенію, что *геометрическое приращеніе* $\overline{\Delta v}$ *скорости точки за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилe-*

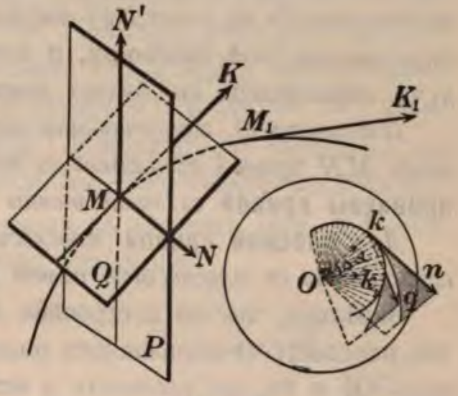
*) Отъ греческихъ словъ ὁδός—путь и γράφω—пишу.

гающій къ данному моменту t, **геометрически эквивалентно** *произведенію $\bar{u}\Delta t$ изъ ускоренія $\bar{u}$ точки въ данный моментъ на этотъ безконечно-малый промежутокъ времени Δt.*

§ 5. Нѣкоторыя геометрическія понятія.

Прежде чѣмъ перейти къ изученію свойствъ ускоренія точки, необходимо установить нѣкоторыя геометрическія понятія.

Мы знаемъ, что **касательною** MK (черт. 20) *къ данной кривой въ данной ея точкѣ M называется предѣльное положеніе сѣкущей MM_1, когда точка M_1 стремится совмѣститься съ данною точкою M.*



Черт. 20.

Плоскость P, проходящая черезъ точку M данной кривой и перпендикулярная къ касательной MK, проведенной къ кривой въ этой точкѣ, называется **нормальною плоскостью кривой** *въ данной ея точкѣ M.*

Взявъ въ пространствѣ произвольную точку O и описавъ около этой точки радіусомъ равнымъ единицѣ длины сферическую поверхность, станемъ проводить изъ точки O до пересѣченія съ этой шаровою поверхностью направленія Ok, Ok_1 ...., параллельныя послѣдовательнымъ касательнымъ MK, M_1K_1 ...., проведеннымъ къ данной кривой въ одну и ту же сторону; въ такомъ случаѣ у насъ получится нѣкоторая сферическая кривая $\widehat{kk_1}$, которую можно назвать **годографомъ касательныхъ направленій данной кривой.**

Для **плоской кривой** годографъ касательныхъ направленій обращается въ дугу большого круга, плоскость котораго параллельна плоскости данной кривой.

Прямая MN, проходящая черезъ точку M данной кривой и параллельная кесательной kn, проведенной въ соотвѣтственной точкѣ k годографа касательныхъ направленій данной кривой, называется **первою** *или* **главною нормалью кривой** *въ данной ея точкѣ M.*

Главная нормаль *MN и* **касательная** *MK, проведенныя черезъ одну и ту же точку M данной кривой* **перпендикулярны** *другъ къ другу.*

Дѣйствительно, по построенію $MN \parallel kn$ и $MK \parallel ok$, но $kn \perp ok$; слѣдовательно $MN \perp MK$, и потому *главная нормаль MN кривой въ данной ея точкѣ M лежитъ въ нормальной плоскости P, проведенной къ кривой въ той же ея точкѣ M.*

Главныя нормали **плоской кривой** *во всѣхъ ея точкахъ лежатъ въ плоскости самой кривой.* Дѣйствительно, такъ какъ годографъ касательныхъ направленій для плоской кривой есть дуга большого круга, плоскость которой параллельна плоскости самой кривой, то касательная kn къ годографу касательныхъ направленій будетъ тоже параллельна этой плоскости, и потому главная нормаль MN, будучи параллельна kn, будетъ лежать въ плоскости данной кривой.

Плоскость Q, заключающая касательную MK и главную нормаль MN кривой въ данной ея точкѣ M, называется **плоскостью кривизны кривой** *въ этой точкѣ M.*

Для **плоской кривой** *плоскости кривизны во всѣхъ ея точкахъ совпадаютъ съ плоскостью самой кривой.*

Замѣтивъ, что по построенію $MK \parallel ok$ и $MN \parallel kn$, мы видимъ, что плоскость Q параллельна плоскости q, построенной на отрѣзкахъ Ok и kn; но плоскость q есть предѣльное положеніе сѣкущей плоскости kOk_1 проходящей черезъ образующія Ok и Ok_1 конической поверхности $\widehat{Okk}_1$, причемъ по построенію $Ok \parallel MK$ и $Ok_1 \parallel M_1K_1$; слѣдовательно можно сказать, что **плоскость Q кривизны кривой** *въ данной ея точкѣ M есть предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ касательную MK кривой въ разсматриваемой точкѣ M и параллельной касательной M_1K_1, проведенной къ кривой въ точкѣ M_1 безконечно-близкой къ данной точкѣ M.*

Опредѣливъ такимъ образомъ плоскость кривизны кривой въ данной ея точкѣ M независимо отъ понятія о годографѣ касательныхъ направленій данной кривой, можно сказать, что **главная нормаль** *кривой въ данной ея точкѣ M есть пересѣченіе плоскости кривизны Q и нормальной плоскости P, проведенныхъ къ данной кривой въ разсматриваемой точкѣ M.*

Прямая MN', проходящая черезъ точку M данной кривой и перпендикулярная къ плоскости кривизны кривой въ этой точкѣ,

называется **второю нормалью кривой** *въ разсматриваемой ея точкѣ* M.

Итакъ въ каждой точкѣ M *данной кривой* (черт. 20) *надо отличать три взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ:*

1) **касательную** MK,
2) **первую** или **главную нормаль** MN,
3) **вторую нормаль** MN'

и двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости:

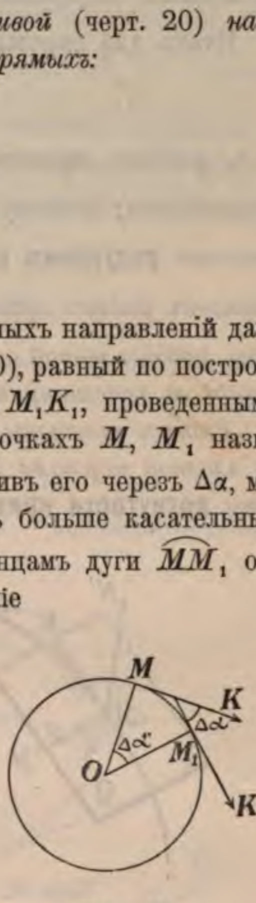
1) **нормальную плоскость** P, и
2) **плоскость кривизны** Q.

Возвращаясь снова къ годографу касательныхъ направленій данной кривой, замѣтимъ, что уголъ kOk_1 (черт. 20), равный по построенію острому углу между касательными MK и M_1K_1, проведенными къ кривой въ двухъ ея безконечно-близкихъ точкахъ M, M_1 называется **угломъ смежности дуги** $\widehat{MM}_1$; обозначивъ его черезъ $\Delta\alpha$, мы видимъ, что чѣмъ больше этотъ уголъ $\Delta\alpha$, тѣмъ больше касательныя проведенныя въ одну и ту же сторону къ концамъ дуги $\widehat{MM}_1$ отклоняются одна отъ другой, поэтому отношеніе

$$\frac{\angle kOk_1}{\widehat{MM}_1} = \frac{\Delta\alpha}{\widehat{\Delta s}},$$

т. е. **отношеніе** *угла смежности дуги къ самой дугѣ называется* **среднею кривизною** *этой дуги, а предѣлъ этого отношенія*

$$k = \text{пред.}\ \frac{\Delta\alpha}{\widehat{\Delta s}},$$



Черт. 21.

когда точка M_1 *безпредѣльно приближается къ точкѣ* M *носитъ названіе* **кривизны кривой въ данной ея точкѣ** M.

Примѣнивъ эти опредѣленія къ окружности, мы видимъ, что для дуги окружности $\widehat{MM}_1$ (черт. 21) уголъ смежности $\Delta\alpha$ равенъ углу между радіусами, проведенными къ концамъ этой дуги и потому $\widehat{MM}_1 = \widehat{\Delta s} = r\Delta\alpha$, гдѣ r есть радіусъ данной окружности; слѣдовательно

$$k = \text{пред.}\ \frac{\Delta\alpha}{\widehat{\Delta s}} = \frac{1}{r},$$

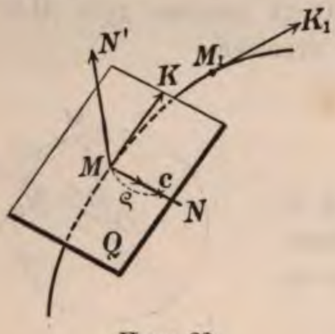
т. е. *окружность есть такая кривая, кривизна которой во всѣхъ ея точкахъ сохраняетъ* **постоянную** *величину, равную* $\frac{1}{r}$.

Итакъ для окружности

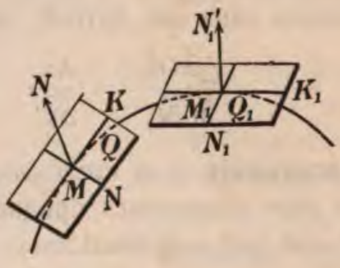
$$k = \frac{1}{r}, \text{ или } r = \frac{1}{k},$$

т. е. *радіусъ окружности равенъ единицѣ, дѣленной на кривизну окружности;* поэтому и въ общемъ случаѣ *отношеніе* $\frac{1}{k} = \rho$ *называютъ* **радіусомъ кривизны кривой въ данной ея точкѣ;** такимъ образомъ *радіусъ кривизны кривой* $\rho = \frac{1}{k}$ *въ данной ея точкѣ* M *есть радіусъ такой окружности, кривизна которой равна кривизнѣ кривой въ разсматриваемой точкѣ* M.

Радіусъ кривизны кривой въ данной ея точкѣ M *откладываютъ по главной нормали* MN *кривой въ разсматриваемой точкѣ въ сторону* **вогнутости кривой** *въ этой точкѣ*, т. е. въ ту сторону, чтобы



Черт. 22.



Черт. 23.

ставъ въ точкѣ M (черт. 22) на плоскость кривизны Q кривой въ этой точкѣ и обратившись лицомъ по направленію касательной MK, мы имѣли бы радіусъ кривизны кривой $\rho = MC$ и безконечно-близкую касательную M_1K_1 по одну и ту же сторону.

Конецъ C радіуса кривизны кривой $\rho = MC$ называютъ **центромъ кривизны** кривой въ данной ея точкѣ M, а окружность, описанная вокругъ этой точки C радіусомъ равнымъ ρ въ плоскости кривизны кривой Q, носитъ названіе **соприкасающейся окружности** къ данной кривой въ данной ея точкѣ M.

Если кривая не плоская, то плоскости кривизны Q и Q_1 (черт. 23)

въ двухъ безконечно-близкихъ ея точкахъ M и M_1 составляютъ между собою нѣкоторый уголъ $\Delta\beta$, равный углу между вторыми нормалями MN' и M_1N_1' данной кривой въ разсматриваемыхъ точкахъ M, M_1.

Предѣлъ отношенія $\dfrac{\Delta\beta}{\widehat{MM_1}} = \dfrac{\Delta\beta}{\widehat{\Delta s}}$ этого угла $\Delta\beta$ къ соотвѣтствующей ему дугѣ $\widehat{MM_1}$, когда точка M_1 стремится совмѣститься съ точкою M, носитъ названіе **второй кривизны кривой въ данной ея точкѣ** M, и потому неплоскія кривыя называются еще кривыми **двоякой кривизны**.

§ 6. Касательное и нормальное ускоренія точки.

Если $\widehat{HH_1}$ есть годографъ скорости даннаго движенія точки M, то, какъ мы знаемъ (черт. 24):

$$\bar{u} = \bar{v}_H = \text{пред.}\ \frac{\overline{HH_1}}{\Delta t}.$$

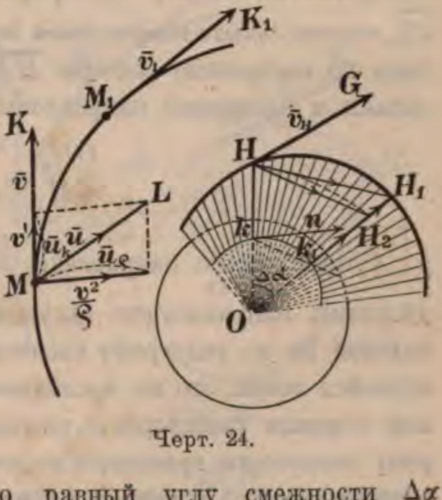
Проведя изъ точки O въ плоскости HOH_1 радіусомъ $OH = v$ дугу окружности HH_2, мы видимъ, что

$$\overline{HH_1} = \overline{HH_2} + \overline{H_2H_1};$$

слѣдовательно

$$\bar{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{HH_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{HH_2}}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t}.$$

Разсмотримъ отдѣльно величину и направленіе каждаго изъ слагаемыхъ предѣловъ:



Черт. 24.

a) пред. $\dfrac{\overline{HH_2}}{\Delta t}$ по величинѣ равенъ пред. $\dfrac{\widehat{HH_2}}{\Delta t}$, такъ какъ дуга $\widehat{HH_2}$ эквивалентна хордѣ $\overline{HH_1}$; но

$$\widehat{HH_2} = \overline{OH}\,.\,\Delta\alpha = v\,\Delta\alpha,$$

гдѣ подъ $\Delta\alpha$ мы подразумѣваемъ уголъ $\angle HOH_1$, по построенію равный углу смежности $\Delta\alpha$

дуги $\widehat{MM_1}$; слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\widehat{HH_2}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{v\,\Delta\alpha}{\Delta t} = v\ \text{пред.}\ \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\,.$$

Послѣдній предѣлъ мы можемъ переписать подъ видомъ:

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\Delta\alpha\,.\,\widehat{\Delta s}}{\Delta t\,.\,\widehat{\Delta s}} = \text{пред.}\ \frac{\widehat{\Delta s}}{\Delta t}\,.\ \text{пред.}\ \frac{\Delta\alpha}{\widehat{\Delta s}},$$

но

$$\text{пред.}\ \frac{\widehat{\Delta s}}{\Delta t} = v \ \text{ и пред.}\ \frac{\Delta\alpha}{\widehat{\Delta s}} = k = \frac{1}{\rho},$$

гдѣ подъ ρ мы подразумѣваемъ радіусъ кривизны траекторіи движущейся точки въ точкѣ M; слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\widehat{HH_2}}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho},$$

т. е. величина искомаго предѣла $\frac{\overline{HH_2}}{\Delta t}$ равна $\frac{v^2}{\rho}$.

Что касается до направленія этого предѣла, то, вообразивъ около точки O шаровую поверхность радіуса равнаго единицѣ длины, ясно, что въ пересѣченіи этой шаровой поверхности съ коническою поверхностью $O\widehat{HH_1}$ годографа скорости мы получимъ *годографъ* $\widehat{kk_1}$ *касательныхъ направленій траекторіи движущейся точки*, причемъ по построенію векторы $\overline{HH_2}$ и $\overline{kk_1}$ очевидно будутъ параллельны и одинаково направлены, такъ какъ

$$\frac{OH_2}{OH} = \frac{Ok_1}{Ok} = 1.$$

Слѣдовательно направленіе пред. $\frac{\overline{HH_2}}{\Delta t}$ будетъ одинаково съ предѣльнымъ направленіемъ сѣкущей kk_1, т. е. съ направленіемъ касательной kn къ годографу касательныхъ направленій траекторіи движущейся точки, это же послѣднее, какъ извѣстно, параллельно главной нормали траекторіи въ разсматриваемой точкѣ M и идетъ въ сторону вогнутости траекторіи въ этой точкѣ, т. е. одинаково съ направленіемъ радіуса кривизны ρ траекторіи въ разсматриваемой точкѣ M.

Итакъ, **величина** *пред.* $\frac{\overline{HH_2}}{\Delta t}$ *равна* $\frac{v^2}{\rho}$, *т. е. имѣетъ измѣреніе ускоренія, такъ какъ*

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{(v)^2\,[LT^{-1}]^2}{(\rho)\,[L]} = \frac{(v)^2}{(\rho)}\,[LT^{-2}],$$

направленіе *же этого предѣла одинаково съ направленіемъ радіуса кривизны траекторіи въ точкѣ ея M, совпадающей съ положеніемъ движущейся точки въ разсматриваемый моментъ*, поэтому, отложивъ отъ движущейся точки M по направленію радіуса кривизны ρ траекторіи въ этой точкѣ векторъ $\overline{u_\rho}$ по величинѣ равный $\frac{v^2}{\rho}$, мы приходимъ къ равенству

$$\text{пред. } \frac{\overline{HH_2}}{\Delta t} = \overline{u_\rho}\,,$$

причемъ *этотъ векторъ* $\overline{u_\rho}$ *называютъ* **нормальнымъ** *или* **центростремительнымъ ускореніемъ точки въ данный моментъ.**

b) Принявъ во вниманіе, что (черт. 24)

$$H_2H_1 = \pm(OH_1 - OH) = \pm(v_1 - v) = \pm\Delta v;$$

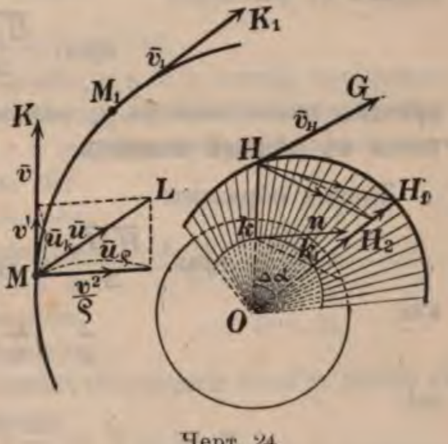
гдѣ знакъ + надо брать при $\Delta v > 0$, а знакъ — при $\Delta v < 0$, мы приходимъ къ равенствамъ:

пред. $\frac{H_2H_1}{\Delta t} = \pm$ пред. $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \pm v'$, т. е. величина искомаго предѣла $\frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t}$ равна абсолютному значенію $\pm v'$ производной отъ величины скорости точки; припомнивъ же, что

$$v = \pm s',$$

мы видимъ, что

$$v' = (\pm s')' = \pm s'',$$



Черт. 24.

и потому можно сказать еще, что величина предѣла $\frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t}$ равна абсо-

лютному значенію второй производной $\pm s''$ отъ разстоянія точки по ея траекторіи.

Что касается до направленія предѣла $\frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t}$, то, принявъ во вниманіе, что векторъ $\overline{H_2H_1}$ откладывается по направленію OH_1, если $\Delta v > 0$ и противоположно этому направленію, если $\Delta v < 0$, причемъ направленіе OH_1 въ предѣлѣ совпадаетъ съ направленіемъ $\overline{OH} = \overline{v}$, мы приходимъ къ заключенію, что направленіе искомаго пред. $\frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t}$ совпадаетъ съ направленіемъ $\overline{OH}$, т. е. одинаково съ направленіемъ $\overline{v}$, если $v' > 0$; и противоположно ему, если $v' < 0$.

Итакъ, **величина** *пред.* $\frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t}$ *равна* $\pm v'$, *т. е. имѣетъ измѣреніе ускоренія, такъ какъ*

$$v' = \text{пред.}\ \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{(\Delta v)\,[LT^{-1}]}{(\Delta t)\,[T]} = (v')\ [LT^{-2}],$$

направленіе *же этого предѣла одинаково съ направленіемъ* $\overline{v}$, *если* $v' > 0$ *и противоположно ему, если* $v' < 0$; отложивъ поэтому отъ движущейся точки M векторъ $\overline{u_k}$ по величинѣ равный $\pm v'$ и направленный по $\overline{v}$, если $v' > 0$ и противоположно $\overline{v}$, если $v' < 0$, мы приходимъ къ равенству

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t} = \overline{u_k},$$

причемъ *этотъ векторъ* $\overline{u_k}$ *называютъ* **касательнымъ ускореніемъ точки въ данный моментъ.**

Такимъ образомъ:

$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{HH_2}}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{H_2H_1}}{\Delta t} = \overline{u_\rho} + \overline{u_k},$$

или

$$\overline{u} = \overline{u_k} + \overline{u_\rho},$$

гдѣ

$$u_k = \pm v' = \pm s'' \quad \text{и} \quad u_\rho = \frac{v^2}{\rho},$$

Итакъ **ускореніе точки въ данный моментъ**, *вообще говоря, есть геометрическая сумма* **двухъ** *ускореній:*

1) **касательнаго ускоренія** $\overline{u}_k$ *численно равнаго абсолютной величинѣ производной* v', *или абсолютной величинѣ второй производной* s'' *и направленнаго по скорости точки* $\overline{v}$, *если* $v'>0$ *и противоположно* $\overline{v}$, *если* $v'<0$, *и*

2) **нормальнаго** *или* **центростремительнаго ускоренія** $\overline{u}_\rho$, *численно равнаго* $\frac{v^2}{\rho}$ *и направленнаго по радіусу кривизны траекторіи въ разсматриваемой точкѣ, т. е.*

$$\overline{u} = \overline{u}_k + \overline{u}_\rho .$$

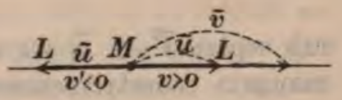
Касательное и нормальное ускоренія точки $\overline{u}_k$ и $\overline{u}_\rho$ перпендикулярны другъ къ другу, поэтому **величина** *ускоренія точки въ общемъ случаѣ выражается діагональю прямоугольника, построеннаго на ея касательномъ и нормальномъ ускореніяхъ, т. е.*

$$u = \sqrt{u_k{}^2 + u_\rho{}^2} = \sqrt{(v')^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

Кромѣ того, такъ какъ касательное и нормальное ускоренія точки лежатъ въ плоскости кривизны ея траекторіи въ точкѣ M, то и полное *ускореніе точки* $\overline{u} = \overline{u}_k + \overline{u}_\rho$ *лежитъ въ* **плоскости кривизны** *траекторіи въ разсматриваемой точкѣ.*

Разсмотримъ нѣкоторые отдѣльные случаи:

1) Если движеніе точки прямолинейно, то $\rho = \infty$ и потому при прямолинейномъ движеніи точки ея нормальное ускореніе обращается въ нуль, слѣдовательно въ этомъ случаѣ $\overline{u} = \overline{u}_k$, т. е. *въ* **прямолинейномъ** *движеніи точки ея ускореніе равно абсолютному значенію производной* v' *отъ величины скорости точки и направлено по скорости* (черт. 25), *если* $v'>0$ *и противоположно этому направленію, если* $v'<0$, **что вполнѣ согласуется съ установленнымъ нами раньше понятіемъ объ ускореніи точки въ данный моментъ въ прямолинейномъ ея движеніи.**



Черт. 25.

2) Если движеніе точки совершается по нѣкоторой кривой равномѣрно, т. е. $v = const$, то $v' = 0$ и потому касательное ускореніе точки обращается въ нуль; слѣдовательно *при* **равномѣрномъ** *движеніи точки по кривой*

$\bar{u}=\bar{u}_n$, т. е. въ этомъ случаѣ ускореніе точки равно $\frac{v^2}{\rho}$ и направлено по радіусу кривизны ея траекторіи въ разсматриваемой точкѣ.

Черт. 26.

Примѣръ. При равномѣрномъ движеніи точки по окружности радіуса r (черт. 26) со скоростью v_0 ускореніе точки равно $\frac{v_0^2}{r}$ и направлено къ центру окружности.

3) *При* **равномѣрномъ** *и* **прямолинейномъ** *движеніи точки ея ускореніе во всѣ моменты равно нулю*, ибо въ этомъ случаѣ касательное и нормальное ускоренія точки заразъ обращаются въ нуль.

§ 7. Ускореніе проектированныхъ движеній точки на неподвижную плоскость и неподвижную прямую.

При движеніи точки M въ пространствѣ ея проекція m (черт. 27) на нѣкоторой плоскости P совершаетъ тоже нѣкоторое движеніе въ этой плоскости.

Обозначивъ соотвѣтственно черезъ $\bar{U}$ и $\bar{u}$ ускоренія точки M и ея проекціи m въ данный моментъ, найдемъ зависимость между этими ускореніями.

Выбравъ въ плоскости P произвольную точку O, построимъ около этой точки годографы $\widehat{HH_1}$ и $\widehat{hh_1}$ скоростей точекъ M и m; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что

$$\bar{U}=\bar{V}_H \quad \text{и} \quad \bar{u}=\bar{v}_h,$$

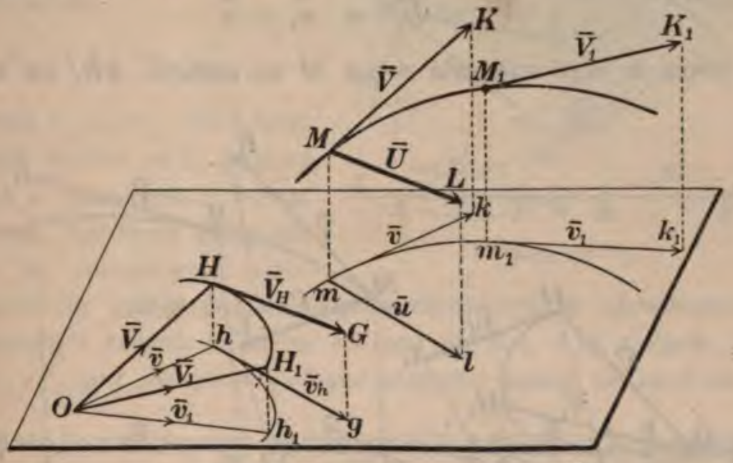
гдѣ черезъ $\bar{V}_H$ и $\bar{v}_h$ мы обозначили скорости точекъ H и h, описывающихъ соотвѣтственные годографы.

Но точка h очевидно есть проекція точки H на плоскость P, такъ какъ по построенію $\overline{OH}=\bar{V}$, $\overline{Oh}=\bar{v}$ и скорость $\bar{v}$ проекціи m точки M на плоскость P есть, какъ мы знаемъ, проекція скорости $\bar{V}$ точки M на ту же плоскость P; если же точка h есть проекція точки H на плоскость P, то по той же теоремѣ скорость $\bar{v}_h$ есть проекція скорости $\bar{V}_H$ на ту же плоскость.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$\overline{V}_H = \overline{U} \quad \text{и} \quad \overline{v}_h = \overline{u}$$

и что точка m есть проекція точки M на плоскость P, мы приходимъ къ заключенію, что ускореніе $\overline{u}$ по величинѣ и направленію есть проекція ускоренія $\overline{U}$ на плоскость P.



Черт. 27.

Итакъ, *ускореніе проекціи движущейся точки на любой неподвижной плоскости во всякій моментъ есть проекція ускоренія самой точки на ту же плоскость.*

Подобнымъ же образомъ при движеніи точки M въ пространствѣ ея проекція m (черт. 28) на произвольную неподвижную прямую AB совершаетъ нѣкоторое движеніе вдоль этой прямой.

Обозначивъ ускоренія точки M и ея проекціи m въ данный моментъ соотвѣтственно черезъ $\overline{U}$ и $\overline{u}$, построимъ около нѣкоторой точки O этой прямой годографы $\widehat{HH_1}$ и $\widehat{hh_1}$ скоростей точекъ M и m; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что

$$\overline{U} = \overline{V}_H \quad \text{и} \quad \overline{u} = \overline{v}_h,$$

гдѣ черезъ V_H и v_h мы обозначили скорости точекъ H и h, описывающихъ соотвѣтственные годографы.

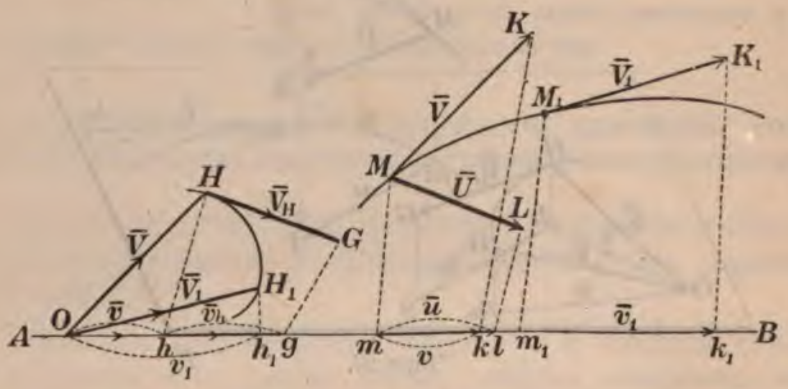
Но точка h очевидно есть проекція точки H на прямую AB,

такъ какъ по построенію $\overline{OH}=\overline{V}$ и $\overline{Oh}=\overline{v}$, причемъ скорость $\overline{v}$ проекціи m точки M на прямую AB есть, какъ мы знаемъ, проекція скорости $\overline{V}$ на ту же прямую AB; если же точка h есть проекція точки H на прямую AB, то по той же теоремѣ скорость $\overline{v}_h$ есть проекція скорости $\overline{V}_H$ на ту же прямую.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$\overline{V}_H=\overline{U} \quad \text{и} \quad \overline{v}_h=\overline{u}$$

и что точка m есть проекція точки M на прямую AB, мы прихо-



Черт. 28.

димъ къ заключенію, что ускореніе $\overline{u}$ по величинѣ и направленію есть проекція ускоренія $\overline{U}$ на прямую AB.

Итакъ, *ускореніе проекціи движущейся точки на любой неподвижной прямой во всякій моментъ есть проекція ускоренія самой точки на ту же прямую.*

§ 8. Аналитическое выраженіе проекціи ускоренія точки на неподвижную ось.

Положимъ, намъ дана нѣкоторая ось AX, построивъ около произвольной точки O (черт. 29) годографъ $\widehat{HH_1}$ скорости движущейся точки M, мы знаемъ, что

$$\overline{u}=\overline{v}_H$$

и потому

$$u\cos(u,\ X)=u_x=v_H\cos(v_H,\ X);$$

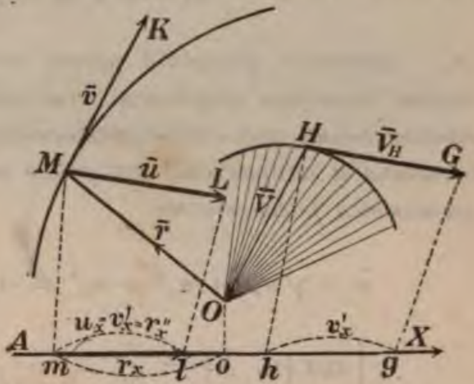
но проекція скорости $\bar{v}_H$ точки H на ось AX аналитически выражается, какъ извѣстно, производною отъ проекціи ея радіуса вектора $\overline{OH} = \bar{v}$ точки H на ту же ось, т. е.

$$\bar{v}_H \cos(\bar{v}_H, X) = v_x';$$

слѣдовательно

$$u_x = v_x' = r_x'',$$

такъ какъ $v_x = r'_x$, гдѣ r_x есть проекція на ось AX радіуса вектора $\bar{r}$ движущейся точки.



Черт. 29 *).

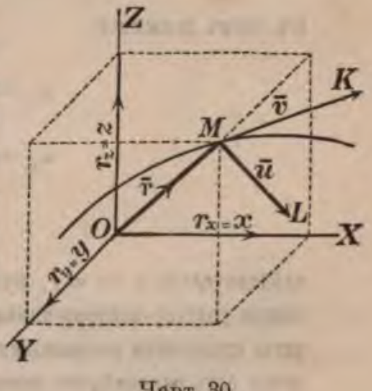
Итакъ, *проекція ускоренія точки на нѣкоторую неподвижную ось* **аналитически** *выражается первою производною v_x отъ проекціи скорости точки на той же оси, или второю производною r_x'' отъ проекціи радіуса вектора точки на той же оси.*

§ 9. Аналитическія выраженія величины и направленія ускоренія точки въ прямоугольной, прямолинейной системѣ координатъ.

Если движеніе точки въ прямоугольной, прямолинейной системѣ координатъ задано равенствами:

$$x = F_1(t),\ y = F_2(t),\ z = F_3(t),$$

то для опредѣленія величины и направленія ускоренія точки въ данный моментъ достаточно найти лишь три его проекціи u_x, u_y, u_z на эти оси. Соединивъ съ этою цѣлью движущуюся точку M съ началомъ координатъ O (черт. 30) радіусомъ-векторомъ $\overline{OM} = \bar{r}$, мы знаемъ, что



Черт. 30.

$$r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z;$$

*) На этомъ чертежѣ $\bar{V}$ и $\bar{V}_H$ надо замѣнить соотвѣтственно черезъ $\bar{v}$ и $\bar{v}_H$.

слѣдовательно по предъидущей теоремѣ

$$u_x = x'', \; u_y = y'', \; u_z = z'',$$

т. е. проекціи ускоренія точки на оси прямоугольной, прямолинейной системы координатъ аналитически выражаются вторыми производными отъ соотвѣтственныхъ координатъ точки, и потому величина и направленіе ускоренія точки въ данный моментъ выражаются равенствами:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = +\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$$

$$\begin{cases} \cos(u, X) = \dfrac{u_x}{u} = \dfrac{x''}{+\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}}, \\ \cos(u, Y) = \dfrac{u_y}{u} = \dfrac{y''}{+\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}}, \\ \cos(u, Z) = \dfrac{u_z}{u} = \dfrac{z''}{+\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}}. \end{cases}$$

Примѣръ. Найти величину и направленіе ускоренія точки въ движеніи, опредѣляемомъ равенствами:

$$x = r\cos\omega t, \; y = r\sin\omega t, \; z = 0.$$

Въ этомъ движеніи:

$$u_x = x'' = -r\omega^2 \cos\omega t = -\omega^2 x;$$

$$u_y = y'' = -r\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 y;$$

$$u_z = 0;$$

слѣдовательно $u = \omega^2 r$, причемъ направленіе ускоренія прямо противоположно радіусу-вектору точки, идущему изъ начала координатъ; эти результаты становятся очевидными, если принять во вниманіе, что заданное движеніе есть равномѣрное движеніе точки со скоростью $v = \omega r$ по окружнсоти описанной радіусомъ r около начала координатъ.

§ 10. Опредѣленіе движенія точки по ея ускоренію и начальнымъ обстоятельствамъ движенія.

Движеніе точки вполнѣ опредѣляется, если извѣстны:

1) **величина** *и* **направленіе** *ея ускоренія въ каждый моментъ, и*

2) **начальныя обстоятельства движенія**, *т. е. положеніе точки и величина и направленіе ея скорости въ нѣкоторый моментъ* t_0.

Дѣйствительно, положимъ, что

$$u_x = f_1(t),\ u_y = f_2(t),\ u_z = f_3(t)$$

и при $t = t_0$

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v_x = x'_0, \\ v_y = y'_0, \\ v_z = z'_0, \end{cases}$$

гдѣ черезъ x'_0, y'_0, z'_0 мы обозначили значенія производныхъ x', y', z' при $t = t_0$.

Въ такомъ случаѣ, принявъ во вниманіе, что

$$u_x = x'',\ u_y = y'',\ u_z = z'',$$

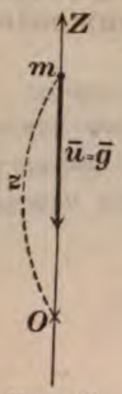
мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} x' = x'_0 + \int\limits_{t_0}^{t} u_x dt, \\ y' = y'_0 + \int\limits_{t_0}^{t} u_y dt, \\ z' = z'_0 + \int\limits_{t_0}^{t} u_z dt, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} x' dt \\ y = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} y' dt, \\ z = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} z' dt, \end{cases}$$

изъ которыхъ первыя три опредѣляютъ величину и направленіе скорости точки въ каждый моментъ, а вторыя три—координаты точки для каждаго момента времени.

Примѣры. 1) *Вывести общія формулы вертикальнаго движенія тяжелой точки въ пустотѣ.*

При вертикальномъ движеніи тяжелой точки въ пустотѣ ея ускореніе, какъ извѣстно, сохраняетъ постоянную величину g и направлено по вертикали внизъ.



Черт. 31.

Условившись отсчитывать положительныя разстоянія точки m отъ нѣкоторой точки O (черт. 31) по вертикали вверхъ и принявъ это направленіе за направленіе оси OZ, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$u_z = z'' = -g;$$

слѣдовательно

$$z' = z'_0 - \int_{t_0}^{t} g\,dt = z'_0 - g(t - t_0),$$

и

$$z = z_0 + \int_{t_0}^{t} z'\,dt = z_0 + \int_{t_0}^{t} [z'_0 - g(t - t_0)]\,dt =$$

$$= z_0 + \Big| z'_0 t - g\frac{(t-t_0)^2}{2} \Big|_{t_0}^{t} = z_0 + z'_0(t - t_0) - g\frac{(t-t_0)^2}{2}.$$

Принявъ наконецъ во вниманіе, что

$$z' = v_z \text{ и } z'_0 = v_{0,z},$$

гдѣ v_z и $v_{0,z}$ суть проекціи скорости точки m на направленіе оси oz въ моменты t и t_0, мы получаемъ слѣдующія общія формулы *вертикальнаго движенія тяжлой точки въ пустотѣ*:

$$\left.\begin{aligned} v_z &= v_{0,z} - g(t - t_0), \\ z &= z_0 + v_{0,z}(t - t_0) - g\frac{(t-t_0)^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Первое изъ этихъ равенствъ опредѣляетъ величину и направленіе въ каждый моментъ скорости вертикальнаго движенія тяжелой точки въ пустотѣ, второе же опредѣляетъ положеніе тяжелой точки для каждаго момента времени.

2) *Изслѣдовать движеніе тяжелой точки, брошенной въ пустотѣ со скоростью v_0 по вертикали вверхъ.*

Условившись отсчитывать время отъ начала движенія точки, а разстоянія точки отъ ея начальнаго положенія т. е. положивъ $t_0 = 0$ и $z_0 = 0$ и принявъ во вниманіе, что въ разсматриваемомъ случаѣ $v_{0,z} = v_0$, мы при-

ходимъ къ равенствамъ:

$$\left.\begin{aligned} v_z &= v_0 - gt, \\ z &= v_0 t - g\,\frac{t^2}{2}, \end{aligned}\right\}$$

изъ которыхъ видно, что при $t = \frac{v_0}{g}$ скорость точки обращается въ нуль, причемъ послѣ этого момента скорость измѣняетъ свое направленіе на противоположное, поэтому

$$\frac{v_0}{g} = T$$

есть *время восхожденія точки*; подставивъ эту величину во второе равенство, мы найдемъ *высоту* h *поднятія точки*:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Положивъ во второмъ равенствѣ $z = 0$, мы приходимъ къ равенствамъ:

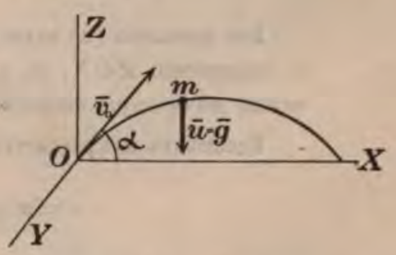
$$t = \frac{2v_0}{g} = 2T,$$

изъ которыхъ видно, что *время поднятія равно времени паденія точки*, причемъ при прохожденіи точки черезъ ея начальное положеніе

$$v_z = v_0 - g\,.\,2T = -v_0,$$

т. е. *величина скорости точки при прохожденіи черезъ начальное положеніе будетъ равна начальной скорости* v_0, *направленіе же этой скорости будетъ противоположно направленію начальной скорости* $\overline{v}_0$.

3) *Опредѣлить движеніе тяжелой точки брошенной въ пустоть, со скоростью* v_0 *подъ угломъ* α *къ горизонту.*



Черт. 32.

Замѣтивъ, что и въ общемъ случаѣ движенія тяжелой точкѣ въ пустотѣ ея ускореніе сохраняетъ постоянную величину g и направлено по вертикали внизъ, примемъ начальное положеніе точки m за начало прямоугольной системы координатъ, причемъ направимъ ось OZ (черт. 32), по вертикали вверхъ, а ось OX возьмемъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ начальную скорость точки $\overline{v}_0$, и условимся

время t отсчитывать отъ начала движенія; въ такомъ случаѣ мы приходимъ къ равенствамъ:

$$u_x = 0,\ u_y = 0,\ u_z = -g$$

и при $t = 0$

$$\begin{cases} x = y = z = 0 \\ v_x = x'_0 = v_0 \cos\alpha,\ v_y = y'_0 = 0,\ v_z = z'_0 = v_0 \sin\alpha. \end{cases}$$

Примѣнивъ къ этому случаю общія формулы, мы находимъ:

$$\begin{cases} x' = x'_0 + \int_0^t u_x dt = v_0 \cos\alpha \\ y' = y'_0 + \int_0^t u_y dt = 0 \\ z' = z'_0 + \int_0^t u_z dt = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \int_0^t x' dt = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = y_0 + \int_0^t y' dt = 0 \\ z = z_0 + \int_0^t z' dt = v_0 \sin\alpha\, t - g\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Итакъ движеніе тяжелой точки въ пустотѣ, брошенной со скоростью v_0 подъ угломъ α къ горизонту при выбранной нами системѣ прямоугольныхъ координатъ выражается равенствами:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t, \quad \dots\dots\dots \quad (1) \\ y = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2) \\ z = v_0 \sin\alpha\, t - g\dfrac{t^2}{2} \quad \dots\dots \quad (3) \end{cases}$$

Изъ равенства (2) видно, что *траекторія тяжелой точки лежитъ въ плоскости ZOX, т. е. въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ начальную скорость точки* $\overline{v_0}$

Исключивъ изъ равенствъ (1) и (3) время t, мы приходимъ къ равенству:

$$z = x\, tg\alpha - g\frac{x^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}$$

изъ котораго видно, что *траекторія тяжелой точки есть парабола.*

ГЛАВА II.

Движеніе твердаго тѣла.

Твердымъ тѣломъ *въ кинематикѣ называется неизмѣняемая система точекъ, т. е. система такихъ точекъ, взаимныя разстоянія между которыми не измѣняются.*

Разсмотримъ сначала **два простѣйшихъ** случая движенія твердаго тѣла, а именно:

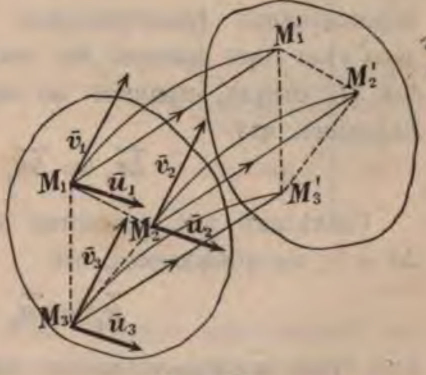
I) *поступательное движеніе твердаго тѣла, и*

II) *вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.*

I. Поступательное движеніе твердаго тѣла.

§ 1. Опредѣленіе поступательнаго движенія твердаго тѣла.

Поступательнымъ *движеніемъ твердаго тѣла называется такое его движеніе, при которомъ перемѣщенія всѣхъ точекъ тѣла для каждаго выбраннаго промежутка времени* **геометрически** *равны.*



Черт. 33.

Чтобы убѣдиться въ возможности такого движенія твердаго тѣла, намъ достаточно лишь показать, что при такомъ движеніи точекъ M_1, M_2, M_3, ... (черт. 33) ихъ взаимныя разстоянія не измѣняются; но по опредѣленію поступательнаго движенія твердаго тѣла перемѣщенія $\overline{M_1M'_1}$, $\overline{M_2M'_2}$, $\overline{M_3M'_3}$ ..... точекъ M_1, M_2, M_3 ..... равны и параллельны, слѣдовательно $M_1M_2 = M'_1M'_2$, $M_2M_3 = M'_2M'_3$, $M_3M_1 = M'_3M'_1$ ....., что и требовалось доказать.

§ 2. Перемѣщеніе, скорость и ускореніе твердаго тѣла при поступательномъ его движеніи.

Итакъ при поступательномъ движеніи твердаго тѣла перемѣщенія всѣхъ его точекъ за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, по опредѣленію равны и параллельны, т. е.

$$\overline{\Delta s}_1 = \overline{\Delta s}_2 = \overline{\Delta s}_3 = \ldots\ldots$$

Раздѣливъ эти равенства на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}_1}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}_2}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}_3}{\Delta t} = \ldots\ldots,$$

или

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{v}_3 = \ldots\ldots,$$

т. е. *при поступательномъ движеніи твердаго тѣла* **скорости** *всѣхъ его точекъ въ данный моментъ* **геометрически** *равны.*

Обозначивъ черезъ $\overline{\Delta v}_1$, $\overline{\Delta v}_2$, $\overline{\Delta v}_3$ ..... геометрическія приращенія скоростей точекъ M_1, M_2, M_3 ..... за тотъ же промежутокъ времени Δt, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{v}_1 + \overline{\Delta v}_1 = \overline{v}_2 + \overline{\Delta v}_2 = \overline{v}_3 + \overline{\Delta v}_3 = \ldots.,$$

выражающимъ геометрическое равенство скоростей точекъ твердаго тѣла при данномъ его поступательномъ движеніи въ моментъ $t + \Delta t$, откуда, принявъ во вниманіе предъидущія равенства, мы находимъ, что

$$\overline{\Delta v}_1 = \overline{\Delta v}_2 = \overline{\Delta v}_3 = \ldots\ldots$$

Раздѣливъ эти равенства на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы убѣждаемся, что

$$\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = \ldots.,$$

т. е. *при поступательномъ движеніи твердаго тѣла* **ускоренія** *всѣхъ его точекъ въ данный моментъ* **геометрически** *равны.*

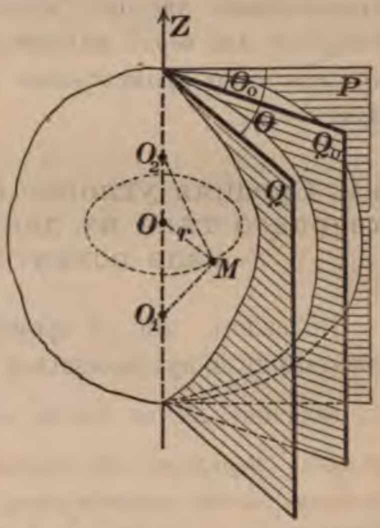
Поэтому *при* **поступательномъ** *движеніи твердаго тѣла перемѣщеніе, скорость, и ускореніе одной изъ его точекъ называютъ соотвѣтственно перемѣщеніемъ, скоростью и ускореніемъ* **самого** *тѣла.*

II. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.

§ 1. Опредѣленіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.

Вращеніемъ *твердаго тѣла* **вокругъ неподвижной оси** *называется такое движеніе твердаго тѣла, при которомъ* **двѣ** *его точки остаются* **неподвижными**.

Положимъ напримѣръ (черт. 34), что точки O_1 и O_2 твердаго тѣла остаются неподвижными; въ такомъ случаѣ всякая точка твердаго тѣла O, лежащая на прямой O_1O_2, по неизмѣняемости разстояній OO_1 и OO_2 тоже должна остаться неподвижною и потому такую прямую O_1O_2 называютъ **неподвижною осью вращенія** твердаго тѣла.



Черт. 34.

При вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси всѣ точки его, по неизмѣняемости ихъ разстояній отъ неподвижныхъ точекъ O_1, O_2 описываютъ дуги окружностей, плоскости которыхъ перпендикулярны къ оси вращенія, и всѣ плоскости, проходящія черезъ ось вращенія и неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ, повертываются около оси на одинъ и тотъ же уголъ, называемый **угловымъ перемѣщеніемъ** самого тѣла.

Угловыя перемѣщенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси могутъ совершаться въ ту, или другую сторону относительно этой оси; поэтому, приписавъ неподвижной оси опредѣленное направленіе OZ, мы условимся считать *угловыя перемѣщенія* **положительными**, *когда они совершаются относительно выбраннаго направленія оси по движенію часовой стрѣлки и*—**отрицательными**, *когда они противоположны движенію часовой стрѣлки.*

Проведя черезъ ось OZ (черт. 34) нѣкоторую неподвижную плоскость P и плоскость Q неизмѣнно связанную съ твердылъ тѣломъ, обозначимъ черезъ θ_0 уголъ, составляемый плоскостью Q съ неподвижною плоскостью P въ нѣкоторый начальный моментъ t_0, и прибавимъ къ этому углу θ_0 угловое перемѣщеніе тѣла за промежутокъ времени $t - t_0$; въ такомъ случаѣ мы получимъ нѣкоторый уголъ θ, который мы будемъ называть **угломъ поворота тѣла** въ данный моментъ t относительно неподвижной плоскости P.

Ясно, что *уголъ поворота тѣла есть нѣкоторая функція времени, т. е.*

$$\theta = F(t);$$

функція эта опредѣляетъ положеніе тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, для каждаго момента времени.

Уголъ поворота θ, какъ всякій уголъ, можетъ быть выраженъ отвлеченнымъ числомъ, причемъ *разность* $(\theta - \theta_0)$ *значеній угла поворота для двухъ моментовъ времени равна угловому перемѣщенію тѣла за промежутокъ времени* $t - t_0$, *опредѣляемый этими моментами.*

§ 2. Средняя угловая скорость и угловая скорость твердаго тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси.

Положимъ, что за промежутокъ времени Δt уголъ поворота θ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, измѣнился на величину $\Delta\theta$; въ такомъ случаѣ отношеніе $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, т. е. *отношеніе углового перемѣщенія тѣла за данный промежутокъ времени къ самому этому промежутку называется* **среднею угловою скоростью** *тѣла за данный промежутокъ времени.*

Принявъ во вниманіе, что $\Delta\theta$ есть отвлеченное число, а $\Delta t = (\Delta t)[T]$, гдѣ $[T]$ есть выбранная единица времени, мы приходимъ къ равенству

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{(\Delta t)}[T^{-1}],$$

т. е. **измѣреніе** *или* **символъ единицы** *средней угловой скорости есть* $[T^{-1}]$.

Символъ единицы $[T^{-1}]$ средней угловой скорости указываетъ единицу времени $[T]$, выбранную при ея вычисленіи и служитъ для перехода отъ выраженія средней угловой скорости при одной единицѣ времени къ выраженію той же скорости при другой единицѣ времени.

Примѣръ. Положимъ, что тѣло въ продолженіи 2 минутъ повернулось вокругъ неподвижной оси на 180°, въ такомъ случаѣ средняя угловая скорость за этотъ промежутокъ времени будетъ:

$$\frac{2\pi \cdot 180}{360 \cdot 2}\,[\text{мин.}^{-1}] = \frac{\pi}{2}\,[\text{мин.}^{-1}] = \frac{\pi}{2}\,[60^{-1}\ \text{сек.}^{-1}] = \frac{\pi}{120}\,[\text{сек.}^{-1}].$$

Если средняя угловая скорость тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, сохраняетъ постоянную величину для всѣхъ промежутковъ времени, т. е.

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = const = C,$$

то такое движеніе твердаго тѣла называется **равномѣрнымъ вращеніемъ** *твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, а* **абсолютную** *величину его средней угловой скорости, т. е.* $\pm\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \pm C = \omega_0$ *называютъ просто* **угловою скоростью** *даннаго равномѣрнаго вращенія.*

Такимъ образомъ, взявъ промежутокъ времени $t - t_0$ и замѣтивъ угловое перемѣщенія тѣла $\theta - \theta_0$ за этотъ промежутокъ времени при равномѣрномъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = const = C \text{ или } \theta - \theta_0 = C\,(t - t_0),$$

т. е. *при равномѣрномъ вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси его угловыя перемѣщенія пропорціональны промежуткамъ времени*; другими словами *при равномѣрномъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси угловыя перемѣщенія тѣла въ равные промежутки времени равны.*

Взявъ промежутокъ времени равный, выбранной единицѣ времени $[T]$, т. е. положивъ $t - t_0 = 1 \cdot [T]$, и замѣтивъ угловое перемѣщеніе тѣла $\theta - \theta_0$ за этотъ промежутокъ времени, мы прихо-

4*

димъ къ равенствамъ:

$$\omega_0 = \pm \frac{\theta - \theta_0}{[T]} = \pm (\theta - \theta_0)\ [T^{-1}],$$

т. е. *угловая скорость равномѣрнаго вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси* **численно** *равна абсолютной величинѣ углового перемѣщенія тѣла въ выбранную единицу времени* $[T]$.

Положивъ въ послѣднемъ равенствѣ $\theta - \theta_0 = 1$, мы приходимъ къ равенству:

$$\omega_0 = 1 \cdot [T^{-1}],$$

т. е. **единица угловой скорости** *есть угловая скорость такого равномѣрнаго вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, при которомъ угловое перемѣщеніе тѣла въ единицу времени равно единицѣ угла, т. е.* **радіану**, *или* 57° 17′ 44″21...

Величиною ω *угловой скорости тѣла* **въ данный моментъ** *при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси называется* **абсолютная** *величина предѣла средней угловой скорости тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени, прилегающій къ данному моменту*; такимъ образомъ

$$\omega = \pm \text{пред.} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \pm \theta',$$

т. е. угловая скорость тѣла въ данный моментъ при вращеніи вокругъ неподвижной оси аналитически выражается **абсолютною** *величиною производной отъ угла поворота тѣла, взятой по времени.*

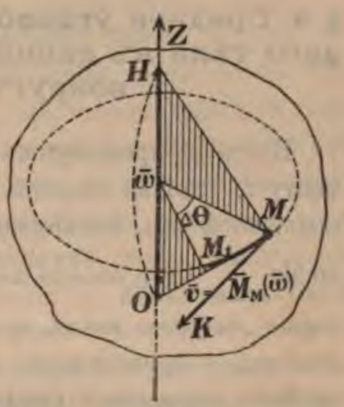
При равномѣрномъ вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси угловая скорость его во всѣ моменты времени сохраняетъ постоянную величину, и наоборотъ.

Угловой скорости въ данный моментъ при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси кромѣ **величины** *приписываютъ еще нѣкоторое* **направленіе**, *а именно ее изображаютъ* (черт. 35) векторомъ $\overline{OH}$, отложеннымъ по оси вращенія тѣла отъ произвольной ея точки O въ ту сторону, относительно которой угловое перемѣщеніе тѣла совершается слѣва направо, т. е. по движенію часовой стрѣлки, причемъ векторъ этотъ содержитъ въ себѣ столько единицъ длины $[L]$, сколько въ угловой скорости тѣла въ данный моментъ заключается единицъ угловой скорости, т. е. величина этого вектора численно равна ω или $\pm \theta'$.

Величину и направленіе угловой скорости тѣла въ данный моментъ мы будемъ обозначать знакомъ $\overline{\omega}$.

§ 3. Выраженіе величины и направленія скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси.

При движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси всѣ точки его описываютъ дуги окружностей въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси, поэтому скорость $\overline{v}$ любой точки M (черт. 35) такого твердаго тѣла, находясь въ плоскости перпендикулярной къ оси и будучи перпендикулярна къ радіусу r точки M, будетъ перпендикулярна къ плоскости проходящей черезъ ось и черезъ точку M; кромѣ того относительно направленія этой скорости $\overline{v}$ угловая скорость $\overline{\omega}$ будетъ направлена слѣва на право; наконецъ по величинѣ



Черт. 35.

$$v = \text{пред.}\ \frac{\widehat{MM_1}}{\Delta t} = \pm\,\text{пред.}\ \frac{r.\Delta\theta}{\Delta t} = \pm r\theta' = r\omega.$$

Такимъ образомъ:

a) **величина** *скорости* $\overline{v}$ *точки* M *твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, равна произведенію* ωr *изъ величины угловой скорости тѣла на разстояніе точки* M *до оси вращенія;*

b) **направленіе** *же этой скорости* $\overline{v}$ *перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ точку* M *и черезъ ось, причемъ угловая скорость тѣла идетъ относительно этого направленія слѣва направо.*

Слѣдовательно, *при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси* **величина** *и* **направленіе** *скорости* $\overline{v}$ *любой его точки* M *выражаются* **линейнымъ моментомъ** *относительно этой точки* M *угловой скорости* $\overline{\omega}$ *вращающагося тѣла, т. е.*

$$\overline{v} = \overline{M}_M(\overline{\omega}).$$

Скорость каждой точки твердаго тѣла въ этомъ случаѣ называютъ еще **вращательною** скоростью этой точки.

Изъ найденнаго выраженія величины и направленія скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, ясно, что *скорости всѣхъ его точекъ, лежащихъ на линіи параллельной оси, будутъ равны и параллельны, и величины скоростей точекъ равноотстоящихъ отъ оси будутъ равны.*

§ 4. Среднее угловое ускореніе и ускореніе твердаго тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси.

Пусть за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, угловая скорость твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, измѣнилась на величину $\Delta\omega$; въ такомъ случаѣ отношеніе $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, т. е. *отношеніе приращенія $\Delta\omega$ величины угловой скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, за нѣкоторой промежутокъ времени Δt къ самому этому промежутку времени называется* **среднимъ угловымъ ускореніемъ** *такого движенія твердаго тѣла за данный промежутокъ времени Δt.*

Принявъ во вниманіе, что

$$\Delta\omega = (\Delta\omega)[T^{-1}] \text{ и } \Delta t = (\Delta t)[T],$$

гдѣ $(\Delta\omega)$ и (Δt) суть отвлеченныя числа, измѣряющія соотвѣтствующія имъ величины при выбранной единицѣ времени $[T]$, мы приходимъ къ равенству

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(\Delta\omega)}{(\Delta t)}[T^{-2}],$$

т. е. **измѣреніе** *средняго углового ускоренія выражается символомъ* $[T^{-2}]$.

Если среднее угловое ускореніе твердаго тѣла для всѣхъ промежутковъ времени сохраняетъ постоянную величину, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = const = \tau_0,$$

то такое движеніе твердаго тѣла называется **равнопеременнымъ** *вращеніемъ твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, а среднее угло-*

вое ускореніе такого движенія носитъ названіе **углового ускоренія** *даннаго равноперемѣннаго вращенія.*

Взявъ промежутокъ времени $t-t_0$ и замѣтивъ приращеніе угловой скорости тѣла $\omega-\omega_0$ за этотъ промежутокъ времени при равноперемѣнномъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\frac{\omega-\omega_0}{t-t_0}=const=\tau_0,\ \text{или}\ \omega-\omega_0=\tau_0(t-t_0)$$

т. е. *при равноперемѣнномъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси угловая скорость твердаго тѣла возрастаетъ пропорціонально времени*; другими словами, при такомъ движеніи твердаго тѣла его угловая скорость въ равные промежутки времени возрастаетъ на равныя величины, причемъ изъ послѣдняго равенства ясно, что *угловое ускореніе при равноперемѣнномъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси* **численно** *равно приращенію угловой скорости тѣла въ единицу времени и* **единица углового ускоренія** *есть угловое ускореніе такого равноперемѣннаго вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, при которомъ угловая скорость тѣла въ единицу времени возрастаетъ на единицу угловой скорости.*

Величиною τ *углового ускоренія твердаго тѣла* **въ данный моментъ** *при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси называется* **абсолютная** *величина предѣла средняго углового ускоренія тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени, прилегающій къ данному моменту*; *такимъ образомъ*

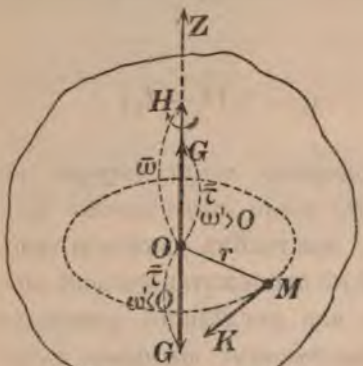
$$\tau=\pm\,\text{пред.}\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\pm\,\omega'=\pm(\theta')'=\pm\,\theta''$$

т. е. **величина** *углового ускоренія твердаго тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси* **аналитически** *выражается* **абсолютными** *значеніями первой производной отъ угловой скорости, или второй производной отъ угла поворота тѣла.*

При равноперемѣнномъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси его угловое ускореніе во всѣ моменты времени сохраняетъ постоянную величину, и наоборотъ.

Угловому ускоренію τ *твердаго тѣла въ данный моментъ при*

вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси приписываютъ кромѣ **величины** *еще нѣкоторое* **направленіе**, *а именно его изображаютъ векторомъ* OG, (черт. 36) *отложеннымъ по направленію угловой скорости тѣла, если она возрастаетъ, т. е.* $\omega' > 0$ *и противоположно угловой скорости, если она убываетъ, т. е.* $\omega' < 0$, причемъ векторъ, изображающій угловое ускореніе тѣла, содержитъ въ себѣ столько единицъ длины $[L]$, сколько въ τ или въ абсолютной величинѣ θ'' заключается единицъ углового ускоренія.



Черт. 36.

Угловое ускореніе твердаго тѣла въ данный моментъ по величинѣ и направленію мы будемъ обозначать знакомъ $\overline{\tau}$.

Изъ высказаннаго опредѣленія ясно, что *угловое ускореніе тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси* **по величинѣ** *и* **направленію** *выражается предѣломъ отношенія* **геометрическаго** *приращенія* $\overline{\Delta\omega}$ *угловой скорости тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту, къ самому этому промежутку времени, т. е.*

$$\overline{\tau} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t}.$$

§ 5. Выраженіе величины и направленія ускореній точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси.

Ускореніе $\overline{u}$ всякой движущейся точки M есть, какъ мы знаемъ, геометрическая сумма двухъ ускореній: касательнаго и центростремительнаго, т. е.

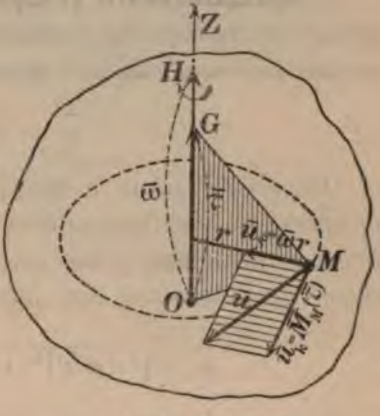
$$\overline{u} = \overline{u}_k + \overline{u}_\rho.$$

Принявъ во вниманіе, что при движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси любая его точка M (черт. 37) движется въ плоскости перпендикулярной къ оси по окружности радіуса r со ско-

ростью $v = \omega r$, найдемъ величину и направленіе каждаго изъ слагаемыхъ ускореній точки M.

a)
$$u_k = \pm v' = \pm (r\omega)' = \pm r\omega' = r\tau,$$

т. е. величина касательнаго ускоренія $\overline{u}_k$ точки M твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, равна произведенію изъ величины его угловаго ускоренія τ на разстояніе r точки M до оси вращенія, или, что все равно, на разстояніе точки M до угловаго ускоренія $\overline{\tau}$; что касается до направленія ускоренія $\overline{u}_k$, то оно, будучи отложено по направленію скорости $\overline{v}$, если v', или $\omega' > 0$ и противоположно $\overline{v}$, если v', или $\omega' < 0$, будетъ перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ ось и точку M, т. е. къ плоскости, проходящей черезъ точку M и черезъ угловое ускореніе тѣла $\overline{\tau}$, причемъ направленіе $\overline{\tau}$ будетъ идти относительно направленія $\overline{u}_k$ слѣва на право.



Черт. 37 *).

Слѣдовательно, при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси касательное ускореніе $\overline{u}_k$ любой его точки M по величинѣ и направленію выражается линейнымъ моментомъ угловаго ускоренія тѣла $\overline{\tau}$ относительно разсматриваемой точки M, т. е.

$$\overline{u}_k = \overline{M}_M(\overline{\tau}).$$

Въ виду аналогіи этого выраженія съ выраженіемъ вращательной скорости точки, ускореніе это называютъ еще **вращательнымъ ускореніемъ** точки M твердаго тѣла.

b)
$$u_\rho = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r,$$

причемъ направленіе центростремительнаго ускоренія $\overline{u}_\rho$ точки M идетъ къ центру описываемой ею окружности, т. е. по перпендикуляру опущенному изъ точки M на ось, въ виду чего мы будемъ называть это ускореніе **осестремительнымъ**.

*) На черт. 37 равенство $\overline{u}_\rho = \overline{\omega} r$ надо замѣнить равенствомъ $\overline{u}_\rho = \overline{\omega^2 r}$.

Итакъ, *при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси ускореніе любой его точки есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **двухъ** *ускореній:*

1) **осестремительнаго ускоренія** $\overline{\omega^2 r}$, *направленнаго по перпендикуляру, опущенному изъ разсматриваемой точки на ось, и*

2) **вращательнаго ускоренія** $\overline{M}_м(\overline{\tau})$, *равнаго по величинѣ и направленію линейному моменту углового ускоренія тѣла относительно разсматриваемой точки*: *т. е.*

$$\overline{u} = \overline{\omega^2 r} + \overline{M}_м(\overline{\tau}).$$

Осестремительное и вращательное ускоренія точки лежатъ въ плоскости перпендикулярной къ оси и взаимно-перпендикулярны, поэтому **величина** *ускоренія точки твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, выражается равенствами*:

$$u = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\tau r)^2} = r\sqrt{\omega^4 + (\omega')^2}.$$

Такимъ образомъ при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси нами установлены два новыхъ кинематическихъ понятія: **угловая скорость** и **угловое ускореніе твердаго тѣла**, черезъ которыя выразились величина и направленіе скорости и ускоренія любой изъ точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси; распространимъ теперь эти понятія на остальные случаи движенія твердаго тѣла.

III. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

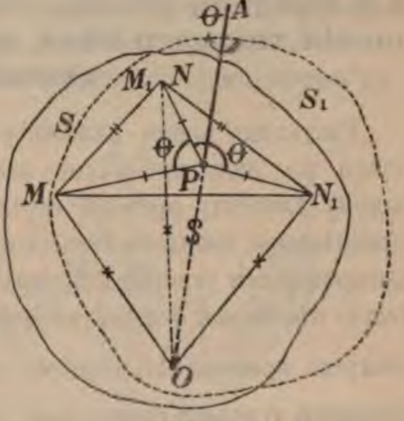
§ 1. Теорема о перемѣщеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Вращеніемъ *твердаго тѣла* **вокругъ неподвижной точки** *называется такое движеніе твердаго тѣла, при которомъ* **одна** *изъ точекъ его остается* **неподвижною.**

Теорема. *Всякое перемѣщеніе твердаго тѣла вокругъ* **неподвижной точки** *можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщеніемъ*

твердаго тѣла вокругъ нѣкоторой **неподвижной оси**, *проходящей черезъ* **неподвижную** *точку*.

Дѣйствительно, положимъ, что твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку O, перемѣстилось около этой точки изъ положенія S (черт. 38) въ положеніе S_1.



Черт. 38.

Взявъ въ тѣлѣ при первомъ его положеніи нѣкоторую точку M, замѣтимъ ея новое положеніе M_1. Съ точкою M_1 при первомъ положеніи твердаго тѣла совпадаетъ нѣкоторая его точка N, которая при второмъ положеніи тѣла перейдетъ въ точку N_1.

Опустивъ изъ неподвижной точки O перпендикуляръ OA на плоскость MM_1N_1 и замѣтивъ точку пересѣченія P этого перпендикуляра съ указанною плоскостью, соединимъ точки O и P съ точками M, N, N_1 прямыми линіями; въ такомъ случаѣ по неизмѣняемости взаимныхъ разстояній точекъ твердаго тѣла

$$OM = OM_1 = ON = ON_1$$

и потому прямоугольные треугольники OPM, OPN и OPN_1, имѣющіе общій катетъ OP и равныя гипотенузы, равны; слѣдовательно равны и другіе ихъ катеты, т. е. $PM = PM_1 = PN_1$; присоединивъ къ этимъ равенствамъ, очевидное, по неизмѣняемости взаимныхъ разстояній точекъ твердаго тѣла, равенство $MN = M_1N_1$, мы убѣждаемся въ равенствѣ угловъ:

$$\angle MPM_1 = \angle NPN_1 = \theta;$$

слѣдовательно при поворотѣ твердаго тѣла около неподвижной оси OA на указанный уголъ θ точки его M и N перемѣстятся соотвѣтственно въ точки M_1, N_1; такимъ образомъ три точки O, M, N твердаго тѣла совпадутъ съ ихъ положеніями O, M_1, N_1 при второмъ положеніи твердаго тѣла, положенія же трехъ точекъ твердаго тѣла, не лежащихъ на одной прямой, опредѣляютъ положенія всѣхъ

остальныхъ его точекъ, т. е. положеніе самого тѣла и потому послѣ указаннаго угловаго перемѣщенія твердаго тѣла на уголъ θ около неподвижной оси OA тѣло перейдетъ изъ положенія S въ требуемое положеніе S_1.

§ 2. Средняя угловая скорость и средняя ось вращенія твердаго тѣла, движущагося вокругъ неподвижной точки.

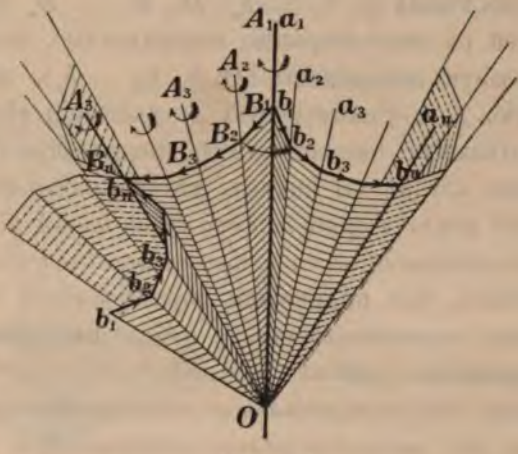
Раздѣливъ время движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки на ничтожно-малые элемены Δt, мы знаемъ, что каждому такому элементу времени соотвѣтствуетъ нѣкоторое ничтожно-малое перемѣщеніе твердаго тѣла, которое по предъидущей теоремѣ можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta$ около нѣкоторой оси, остающейся неподвижною въ теченіе этого промежутка времени Δt; поэтому *отношеніе* $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ *мы будемъ называть* **среднею угловою скоростью тѣла** *за этотъ промежутокъ времени, а* **неподвижную** *ось, соотвѣтствующую указанному угловому перемѣщенію* $\Delta\theta$ — **среднею осью вращенія тѣла** *за тотъ же промежутокъ времени* Δt, причемъ подъ **направленіемъ средней оси** мы будемъ подразумѣвать то ея направленіе, относительно котораго соотвѣтствующее ей угловое перемѣщеніе тѣла $\Delta\theta$ совершается **слѣва направо**.

Такимъ образомъ, замѣнивъ дѣйствительное движеніе твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, въ теченіе каждаго промежутка времени Δt равномѣрнымъ вращеніемъ съ угловою скоростью $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ вокругъ средней оси, соотвѣтствующей тому же промежутку времени Δt, мы знаемъ, что по истеченіи каждаго промежутка времени Δt тѣло, повернувшись на уголъ $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot \Delta t = \Delta\theta$ около соотвѣтственной оси, будетъ занимать въ пространствѣ положеніе, совпадающее съ положеніемъ тѣла въ тотъ же моментъ въ дѣйствительномъ его движеніи.

Съ этой точки зрѣнія *на всякое движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки можно смотрѣть, какъ на предѣлъ ряда послѣдовательныхъ равномѣрныхъ вращеній тѣла вокругъ соотвѣтственныхъ среднихъ осей.*

§ 3. Воспроизведеніе движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Предположивъ время движенія $(t - t_0)$ твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки раздѣленнымъ на n послѣдовательныхъ равныхъ элементовъ Δt_1, Δt_2 .... Δt_n, мы знаемъ, что первому промежутку времени Δt_1 соотвѣтствуетъ нѣкоторая неизмѣнно-связанная съ тѣломъ средняя ось Oa_1, (черт. 39) занимающая въ пространствѣ нѣкоторое положеніе OA_1, и угловое перемѣщеніе $\Delta\theta_1$ вокругъ этой оси, второму промежутку времени Δt_2 — средняя ось Oa_2 и угловое перемѣщеніе вокругъ нея $\Delta\theta_2$ и т. д. вплоть до послѣдняго промежутка времени Δt_n, которому соотвѣтствуетъ въ тѣлѣ нѣкоторая неизмѣнно съ нимъ связанная ось Oa_n и угловое перемѣщеніе $\Delta\theta_n$.



Черт. 39.

Итакъ каждому движенію твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки и каждому числу n соотвѣтствуетъ свой пучекъ среднихъ осей $(O;\ a_1,\ a_2,\ .....\ a_n)$, неизмѣнно-связанныхъ съ твердымъ тѣломъ, причемъ для полученія положенія твердаго тѣла по истеченіи перваго промежутка времени Δt_1 достаточно, какъ мы знаемъ, повернуть тѣло около соотвѣтствующей средней оси Oa_1 на уголъ $\Delta\theta_1$, при этомъ вмѣстѣ съ твердымъ тѣломъ повернется и пучекъ $(O;\ a_1,\ a_2,\ ....\ a_n)$, неизмѣнно съ нимъ связанныхъ, среднихъ осей, такъ что ось Oa_2 займетъ въ пространствѣ нѣкоторое положеніе OA_2, послѣ чего для полученія положенія твердаго тѣла по истеченіи второго промежутка времени Δt_2 достаточно сообщить тѣлу угловое перемѣщеніе $\Delta\theta_2$ вокругъ оси OA_2, съ которою совмѣстилась средняя ось Oa_2, при этомъ средняя ось Oa_3 займетъ въ пространствѣ нѣкоторое положеніе OA_3 и т. д.

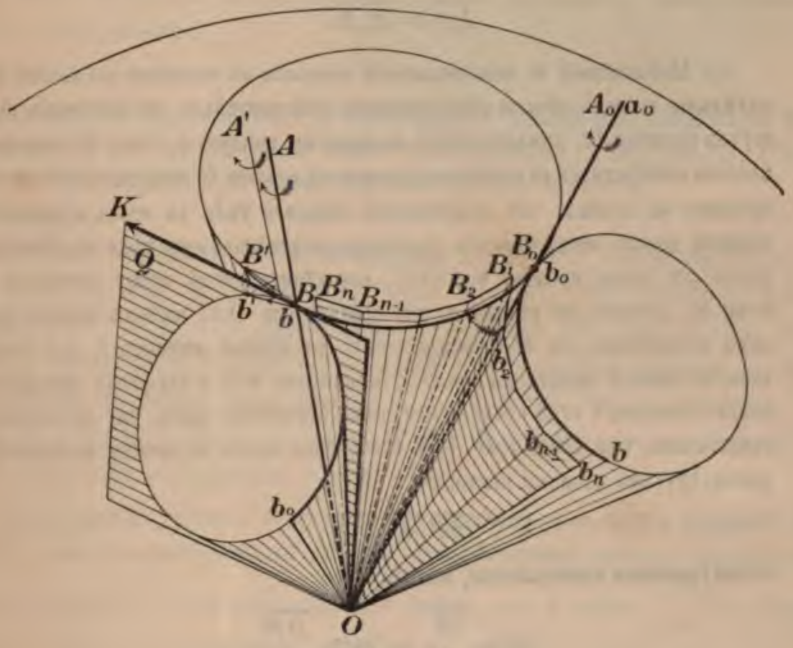
Такимъ образомъ въ пространствѣ получится пучекъ неподвижныхъ прямыхъ (O; A_2, A_3 .... A_n), съ которыми послѣдовательно совмѣщаются среднія оси тѣла (O; a_2, a_3, ... a_n), и угловыми перемѣщеніями вокругъ которыхъ могутъ быть воспроизведены послѣдовательныя перемѣщенія твердаго тѣла, движущагося вокругъ неподвижной точки.

Для большей наглядности воспроизведенія этихъ послѣдовательныхъ перемѣщеній опишемъ изъ неподвижной точки O шаровую поверхность радіусомъ равнымъ единицѣ длины и замѣтивъ точки пересѣченія b_1, b_2, ... b_n; B_1, B_2, ... B_n соотвѣтственныхъ среднихъ осей съ этою шаровою поверхностью, вообразимъ въ тѣлѣ пирамидальную поверхность (O; b_1, b_2, ... b_n), неизмѣнно съ нимъ связанную, т. е. участвующую въ движеніи тѣла, а въ пространствѣ неподвижную пирамидальную поверхность (O; B_1, B_2, ... B_n); въ такомъ случаѣ мы видимъ, что *послѣдовательныя перемѣщенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки могутъ быть воспроизведены послѣдовательными угловыми перемѣщеніями неизмѣнно съ нимъ связанной, или* **подвижной** *пирамидальной поверхности среднихъ осей около послѣдовательныхъ реберъ* **неподвижной** *пирамидальной поверхности среднихъ осей, причемъ въ теченіе каждаго элемента времени эти пирамидальныя поверхности имѣютъ* **общее ребро** *и грани ихъ послѣдовательно совмѣщаются; поэтому ломанныя линіи* (b_1 b_2 .... b_n) и (B_1 B_2 .... B_n) *между соотвѣтственными ребрами этихъ поверхностей будутъ* **равны**.

Станемъ теперь безпредѣльно увеличивать число дѣленій n даннаго промежутка времени $t - t_0$; въ такомъ случаѣ подвижная и неподвижная пирамидальная поверхности, образованныя средними осями, обращаются въ нѣкоторыя подвижную и неподвижную коническія поверхности, называемыя соотвѣтственно **подвижнымъ** *и* **неподвижнымъ аксоидами** *твердаго тѣла вращающагося вокругъ неподвижной точки; предѣльное же положеніе средней оси, соотвѣтствующей безконечно малому промежутку времени, прилегающему къ данному моменту, при движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки называютъ* **мгновенною осью тѣла въ данный моментъ;** поэтому можно сказать, что **подвижной аксоидъ** *твердаго тѣла вращающагося вокругъ неподвижной точки, есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ осей твердаго тѣла въ* **са-**

момъ тѣлѣ, *а* **неподвижной аксоидъ** *есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ осей того же тѣла* **въ пространствѣ**.

При движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки подвижной аксоидъ этого тѣла, будучи неизмѣнно связанъ съ самимъ



Черт. 40.

тѣломъ, совершаетъ вмѣстѣ съ нимъ нѣкоторое движеніе, причемъ движеніе это удовлетворяетъ (черт. 40) слѣдующимъ условіямъ:

1) *Въ каждый моментъ t подвижной аксоидъ имѣетъ* **общую** *образующую съ неподвижнымъ аксоидомъ*, совпадающую съ мгновенною осью твердаго тѣла OA въ этотъ моментъ, или съ предѣльнымъ положеніемъ средней оси OB_n, соотвѣтствующей безконечно малому промежутку времени Δt_n, прилегающему къ данному моменту t.

2) *Дуги $\widehat{b_0 b}$ и $\widehat{B_0 B}$ между соотвѣтственными образующими подвижного и неподвижнаго аксоидовъ, т. е. между образующими того и другого аксоидовъ, приходящими въ совпаденіе,* **равны**; дѣйствительно по опредѣленію:

$$\widehat{b_0 b} = \text{пред.}\ (b_1 b_2 + b_2 b_3 + \ldots\ b_{n-1}\, b_n)$$

и

$$\widehat{B_0 B} = \text{пред.}\ (B_1 B_2 + B_2 B_3 + \ldots\ B_{n-1}\, B_n),$$

но мы уже доказали, что ломанныя линіи $(b_1 \, b_2 \dots b_n)$ и $(B_1 \, B_2 \dots B_n)$ равны, т. е.

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + \dots b_{n-1} \, b_n = B_1 B_2 + B_2 B_3 + \dots B_{n-1} \, B_n,$$

какъ-бы не было велико число дѣленій n; слѣдовательно

$$\widehat{b_0 b} = \widehat{B_0 B}.$$

3) *Подвижной и неподвижной аксоиды въ каждый моментъ* t **касательны** *по ихъ общей образующей;* дѣйствительно по истеченіи промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, точка b' подвижнаго аксоида совмѣстится съ соотвѣтствующею ей точкою B' неподвижнаго аксоида, причемъ мы знаемъ, что перемѣщеніе твердаго тѣла за этотъ промежутокъ времени можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta$ около средней оси OA', соотвѣтствующей этому элементу времени Δt; принявъ во вниманіе, что средняя ось OA' имѣетъ своимъ предѣломъ мгновенную ось OA твердаго тѣла въ данный моментъ t, т. е. что разстояніе точки b' до средней оси OA' безконечно мало и что уголъ поворота $\Delta\theta$, соотвѣтствующій этой средней оси, тоже безконечно малъ, мы приходимъ къ заключенію, что хорда $b'B'$ есть безконечно малая величина **высшаго** порядка; другими словами векторы

$$\overline{bb'} \text{ и } \overline{BB'}$$

геометрически эквиваленты, поэтому

$$\text{пред.} \frac{\overline{bb'}}{\Delta t} = \text{пред.} \frac{\overline{BB'}}{\Delta t}.$$

Написанные здѣсь предѣлы, какъ извѣстно, выражаются нѣкоторыми векторами касательными къ кривымъ $\widehat{b_0 b}$ и $\widehat{B_0 B}$ въ ихъ общей точкѣ (b,B), слѣдовательно эти кривыя имѣютъ въ ихъ общей точкѣ общую касательную BK и потому подвижной и неподвижный аксоиды въ данный моментъ имѣютъ общую касательную плоскость Q, проходящую черезъ ихъ общую въ данный моментъ образующую OB, т. е. черезъ мгновенную ось OA тѣла въ данный моментъ.

Такое движеніе подвижнаго аксоида по неподвижному называется **катаніемъ безъ скольженія** первой конической поверхности по второй.

Такимъ образомъ *при всякомъ вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки его* **подвижной аксоидъ**, *т. е. нѣкоторая неизмѣнно связанная съ тѣломъ коническая поверхность* **катится безъ скольженія** *по* **неподвижному аксоиду**, *т. е. по нѣкоторой неподвиж-*

ной конической поверхности, и потому всякое вращенiе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки можно воспроизвести **катанiемъ безъ скольженiя** *нѣкоторой подвижной конической поверхности по нѣкоторой неподвижной конической поверхности, причемъ неподвижная точка твердаго тѣла будетъ общею вершиною этихъ коническихъ поверхностей.*

§ 4. Угловая скорость твердаго тѣла въ данный моментъ и ея значенiе при вращенiи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Мы уже сказали, что **мгновенною осью** OA *твердаго тѣла въ данный моментъ при вращенiи тѣла вокругъ неподвижной точки называется* (черт. 41) *предѣльное положенiе его средней оси* OA_1, *соотвѣтствующей безконечно-малому промежутку времени* Δt, *прилегающему къ данному моменту* t, установимъ теперь понятiе объ угловой скорости тѣла въ данный моментъ при вращенiи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

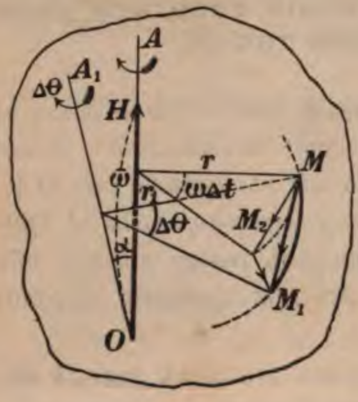
Величиною *угловой скорости* ω *твердаго тѣла* **въ данный моментъ** *при вращенiи тѣла вокругъ неподвижной точки называется предѣлъ средней угловой скорости тѣла, т. е. пред.* $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ *за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающiй къ данному моменту* t; угловой скорости тѣла въ данный моментъ при вращенiи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки кромѣ **величины** приписываютъ еще нѣкоторое **направленiе**, а именно *ее изображаютъ* (черт. 41) *векторомъ* $\overline{\omega} = \overline{OH}$, *отложеннымъ отъ неподвижной точки по направленiю мгновенной оси тѣла въ тотъ же моментъ*

Выяснимъ значенiе величины и направленiе угловой скорости твердаго тѣла въ данный моментъ при вращенiи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Мы знаемъ, что перемѣщенiе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающiй къ данному моменту t, можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщенiемъ тѣла на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta$ около, соотвѣтствующей этому промежутку времени средней оси OA_1, причемъ любая точка M твердаго тѣла, описавъ въ плоскости перпендикулярной къ средней

оси дугу окружности $\widehat{MM_1} = r_1\Delta\theta$, гдѣ r_1 есть разстояніе точки M до средней оси OA_1, займетъ въ пространствѣ положеніе M_1, совпадающее съ положеніемъ той же точки M твердаго тѣла въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ при дѣйствительномъ его движеніи вокругъ неподвижной точки.

Замѣнимъ теперь дѣйствительное движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени Δt равномѣрнымъ вращеніемъ вокругъ неподвижной оси, совпадающей съ направленіемъ мгновенной оси OA твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ t, и съ угловою скоростью ω, равною угловой скорости твердаго тѣла въ тотъ же моментъ; въ такомъ случаѣ по истеченіи промежутка времени Δt положеніе твердаго тѣла не будетъ совпадать съ положеніемъ его въ тотъ же моментъ $t_1 = t + \Delta t$ при дѣйствительномъ его движеніи и точка M твердаго тѣла, описавъ въ плоскости перпендикулярной къ мгновенной оси OA дугу окружности $\widehat{MM_2} = r\omega\Delta t$, гдѣ r есть разстояніе точки M до мгновенной оси OA, займетъ въ пространствѣ нѣкоторое новое положеніе M_2, не совпадающее, вообще говоря, съ положеніемъ M_1 той же точки M въ тотъ же моментъ $t_1 = t + \Delta t$ при дѣйствительномъ движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.



Черт. 41.

Но, принявъ во вниманіе, что по опредѣленію

$$\omega = \text{пред.}\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,,\ \text{т. е.}\ \Delta\theta = \omega\Delta t + \varepsilon\Delta t,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая безконечно-малая величина и что

$$r_1 = r + \varepsilon_1$$

гдѣ ε_1 есть тоже нѣкоторая безконечно-малая величина, мы приходимъ къ заключенію, что безконечно-малыя дуги

$$\begin{cases} \widehat{MM_1} = r_1\Delta\theta = (r + \varepsilon_1)\ (\omega\Delta t + \varepsilon\Delta t)\ \text{и} \\ \widehat{MM_2} = r\omega\Delta t \end{cases}$$

эквивалентны, такъ какъ онѣ отличаются на безконечно-малую величину

$$r\varepsilon\Delta t + \varepsilon_1 (\omega\Delta t + \varepsilon\Delta t)$$

высшаго порядка малости, а въ такомъ случаѣ хорды $\overline{MM}_1$ и $\overline{MM}_2$, или величины безконечно-малыхъ векторовъ перемѣщеній $\overline{MM}_1$ и $\overline{MM}_2$ будутъ эквивалентны, причемъ кромѣ того ясно, что уголъ $\angle M_1MM_2$ между этими безконечно-малыми векторами перемѣщеній будетъ тоже безконечно-малъ; слѣдовательно векторы перемѣщеній

$$\overline{MM}_1 \text{ и } \overline{MM}_2$$

геометрически эквивалентны.

Итакъ, *если при движеніи тѣла вокругъ неподвижной точки замѣнить дѣйствительное его движеніе въ продолженіе безконечно-малаго промежутка времени* Δt, *прилегающаго къ данному моменту* t, *равномѣрнымъ вращеніемъ вокругъ мгновенной оси соотвѣтствующей этому моменту, съ угловою скоростью* ω, *равною угловой скорости тѣла въ тотъ же моментъ* t, *то по истеченіи промежутка времени* Δt *перемѣщенія всѣхъ точекъ твердаго тѣла въ этомъ* **воображаемомъ** *движеніи будутъ* **геометрически эквивалентны** *ихъ перемѣщеніямъ за тотъ же промежутокъ времени въ* **дѣйствительномъ** *движеніи тѣла* и потому на всякое движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки можно смотрѣть, какъ на предѣлъ ряда послѣдовательныхъ равномѣрныхъ вращеній тѣла вокругъ неподвижныхъ осей, если мы раздѣлимъ время движенія на безконечно-малые элементы Δt и замѣнимъ дѣйствительное движеніе твердаго тѣла въ теченіи каждаго такого промежутка времени равномѣрнымъ вращеніемъ твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, совпадающей съ мгновенною осью тѣла въ начальный моментъ разсматриваемаго элемента времени, и съ угловою скоростью равною угловой скорости дѣйствительнаго движенія твердаго тѣла въ тотъ же моментъ.

§ 5. Выраженіе величины и направленія скоростей точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

Мы знаемъ, что скорость $\overline{v}$ всякой точки M (черт. 41) по величинѣ и направленію опредѣляется равенствомъ:

$$\overline{v} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t};$$

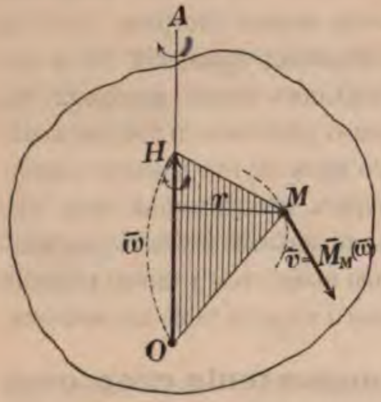
по безконечно-малый векторъ $\overline{MM}_1$ перемѣщенія точки M твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, геометрически эквивалентенъ, какъ мы доказали, вектору перемѣщенія $\overline{MM}_2$ той же точки M за тотъ же промежутокъ времени Δt при равномѣрномъ вращеніи твердаго тѣла съ угловою скоростью ω (равною угловой скорости тѣла въ данный моментъ) вокругъ неподвижной оси, совпадающей съ мгновенною осью тѣла въ тотъ-же моментъ; слѣдовательно

$$\overline{v} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_2}{\Delta t} = \overline{M}_M(\overline{\omega}),$$

такъ какъ при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси величины и направленія скоростей точекъ твердаго тѣла выражаются линейнымъ моментомъ угловой скорости тѣла относительно разсматриваемой точки.

Итакъ (черт. 42), *при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки* **величина** *и* **направленіе** *скорости любой его точки въ данный моментъ выражаются* **линейнымъ моментомъ** *относительно разсматриваемой точки угловой скорости тѣла въ тотъ же моментъ, т. е.*

$$\overline{v} = \overline{M}_M(\overline{\omega});$$



Черт. 42.

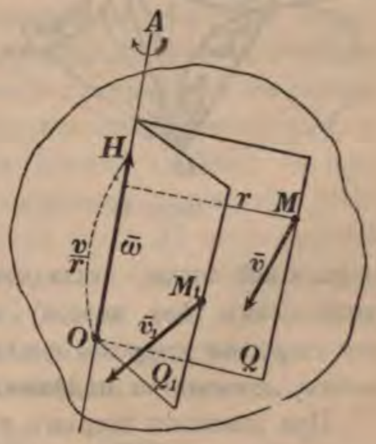
другими словами **величина** v скорости точки твердаго тѣла вращающагося вокругъ неподвижной точки равна произведенію ωr изъ величины угловой скорости ω тѣла въ данный моментъ на разстояніе r разсматриваемой точки M до направленія этой угловой скорости $\overline{\omega}$, или до направленія мгновенной оси тѣла OA въ тотъ же моментъ, **направленіе** же скорости $\overline{v}$ перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ разсматриваемую точку M и направленіе угловой скорости $\overline{\omega}$, твердаго тѣла въ данный моментъ и идетъ относительно этого послѣдняго направленія слѣва направо.

Такимъ образомъ *во всякій данный моментъ скорости точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, будутъ таковы, какъ будто бы твердое тѣло вращалось съ угловою скоростью* ω *вокругъ* **неподвижной** *оси, совпадающей съ мгновенною осью тѣла въ данный моментъ*; это обстоятельство освѣщаетъ намъ съ новой точки зрѣнія установленное нами раньше понятіе о мгновенной оси твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, причемъ изъ равенства $v = r\omega$ ясно, что **мгновенная ось** *твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, есть геометрическое мѣсто тѣхъ точекъ твердаго тѣла, скорости которыхъ въ* **данный моментъ** *равны* **нулю**.

Примѣчаніе. Изъ послѣдняго опредѣленія мгновенной оси твердаго тѣла въ данный моментъ при вращеніи тѣла вокругъ неподвижной точки не слѣдуетъ заключать, что въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, точки мгновенной оси остаются неподвижными; дѣйствительно, такъ какъ за промежутокъ времени Δt перемѣщеніе твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ твердаго тѣла на нѣкоторой безконечно-малый уголъ $\Delta\theta$ (черт. 41) около соотвѣтствующей средней оси OA_1, составляющей съ мгновенною осью тѣла въ данный моментъ OA безконечно-малый уголъ $\angle A_1OA$, то ясно, что въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, всѣ точки мгновенной оси OA кромѣ неподвижной точки O **перемѣщаются**, но перемѣщенія эти будутъ безконечно-малыми величинами **высшаго порядка** малости.

§ 6. Построеніе мгновенной оси и угловой скорости твердаго тѣла въ данный моментъ при движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Мы доказали, что при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки скорость любой его точки перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ эту точку и мгновенную ось; слѣдовательно обратно, проведя черезъ любыя двѣ точки M, M_1 (черт. 43) твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, плоскости Q, Q_1 **перпендикулярныя** къ скоростямъ $\bar{v}$, $\bar{v}_1$ этихъ точекъ, мы знаемъ, что плоскости эти пройдутъ черезъ не-



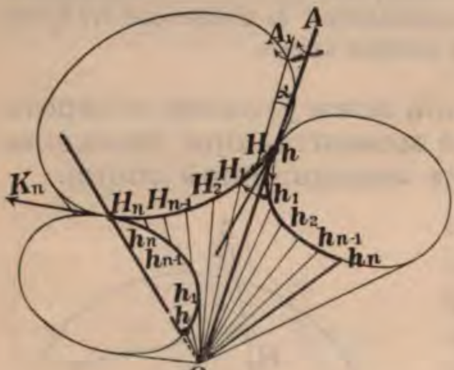
Черт. 43.

подвижную точку и будутъ заключать въ себѣ мгновенную ось; поэтому *мгновенная ось, находясь въ той и другой плоскости, должна совпасть съ линіей ихъ пересѣченія.*

Построивъ такимъ образомъ положеніе мгновенной оси измѣримъ разстояніе $MN = r$ точки M до мгновенной оси, т. е. до пересѣченія плоскостей Q, Q_1 и отложимъ отъ точки O по мгновенной оси отрѣзокъ $OH = \frac{v}{r}$, притомъ такъ, чтобы относительно его направленія скорость точки M шла слѣва направо; въ такомъ случаѣ *этотъ векторъ $\overline{OH}$ будетъ угловою скоростью $\overline{\omega}$ тѣла въ данный моментъ.*

§ 7. Подвижной и неподвижной годографы угловой скорости при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Предположивъ предъидущее построеніе выполненнымъ для всѣхъ моментовъ времени, мы получимъ въ тѣлѣ (черт. 44) нѣкоторую кривую $h\ h_1 h_2 \ldots$, неизмѣнно связанную съ твердымъ тѣломъ, которую мы назовемъ **подвижнымъ годографомъ угловой скорости** *твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.*



Черт. 44.

Итакъ **подвижной** *годографъ угловой скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, есть геометрическое мѣсто* **въ самомъ тѣлѣ** *концовъ h его угловой скорости $\overline{\omega}$.* Но угловыя скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, откладываются, какъ мы знаемъ, по мгновеннымъ осямъ тѣла, поэтому ясно, что **подвижной годографъ** *угловой скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, лежитъ на* **подвижномъ аксоидѣ** *этого тѣла.*

При движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки его подвижной аксоидъ, какъ мы доказали, катится безъ скольженія по

неподвижному аксоиду твердаго тѣла, слѣдовательно, точки h, h_1, h_2.... подвижнаго годографа угловой скорости твердаго тѣла приходятъ послѣдовательно въ совпаденіе съ точками H, H_1, H_2,.... на неподвижномъ аксоидѣ; непрерывную кривую $H\,H_1H_2$..., представляющую геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ неподвижнаго аксоида, съ которыми послѣдовательно совмѣщаются точки подвижного годографа угловой скорости при движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, мы назовемъ **неподвижнымъ годографомъ угловой скорости** *твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки*; изъ этого опредѣленія ясно, что **неподвижный** *годографъ* $H\,H_1H_2$.... *угловой скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, есть геометрическое мѣсто* **въ пространствѣ** *концовъ H его угловой скорости* $\overline{\omega}$.

При движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки подвижной годографъ его угловой скорости совершаетъ вмѣстѣ съ тѣломъ нѣкоторое движеніе въ пространствѣ, причемъ движеніе это по отношенію къ неподвижному годографу удовлетворяетъ (черт. 44) слѣдующимъ условіямъ.

1) *Въ каждый моментъ t подвижной и неподвижный годографы угловой скорости имѣютъ* **общую точку** (h, H), представляющую собою положеніе въ этотъ моментъ конца угловой скорости $\overline{\omega}$ твердаго тѣла **въ тѣлѣ** и **въ пространствѣ**.

2) *Въ общей ихъ точкѣ* (h, H) *подвижной и неподвижный годографы угловой скорости имѣютъ* **общую касательную** HK; дѣйствительно по истеченіи промежутка времени Δt нѣкоторая безконечно-близкая точка h_1 подвижного годографа придетъ въ совпаденіе съ нѣкоторою точкою H_1 неподвижнаго годографа; но мы знаемъ, что перемѣщеніе твердаго тѣла, а слѣдовательно и неизмѣнно связаннаго съ нимъ подвижнаго годографа угловой скорости за промежутокъ времени Δt можетъ быть воспроизведено вращеніемъ твердаго тѣла на нѣкоторый безконечно-малый уголъ $\Delta\theta$ около средней оси OA_1, составляющей съ мгновенною осью OA твердаго тѣла безконечно-малый уголъ $\alpha = \angle A_1OA$ и потому дуга $\widehat{h_1H_1}$ будетъ безконечно-малою величиною **высшаго** порядка малости, т. е. векторы $\overline{hh_1}$ и $\overline{HH_1}$ **геометрически** эквивалентны; слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{hh_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{HH_1}}{\Delta t} = \overline{HK};$$

найденный общій предѣлъ $\overline{HK}$ представляетъ собою **скорости точекъ** *h и H, чертящихъ подвижной и неподвижный годографы угловой скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки*, скорость же всякой точки направлена по касательной къ ея траекторіи, слѣдовательно разсматриваемые подвижной и неподвижный годографы угловой скорости имѣютъ въ ихъ общей точкѣ (h, H) общую касательную HK.

3) *Дуги $\widehat{hh_n}$ и $\widehat{HH_n}$ подвижного и неподвижнаго годографовъ угловой скорости между любыми ихъ точками, приходящими въ совпаденіе,* **равны;** дѣйствительно, такъ какъ хорды $\overline{hh_1}$ и $\overline{HH_1}$ между послѣдовательными такими точками эквивалентны, то дуги $\widehat{hh_n}$ и $\widehat{HH_n}$ очевидно должны быть равны.

§ 8. Угловое ускореніе твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

Угловая скорость $\overline{\omega}$ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, какъ мы видѣли, съ теченіемъ времени измѣняетъ, вообще говоря, свою величину и направленіе.

Предѣлъ отношенія **геометрическаго** *приращенія угловой скорости твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, къ самому этому промежутку времени называется* **угловымъ ускореніемъ** *твердаго тѣла* **въ данный моментъ.**

Такимъ образомъ, обозначивъ величину и направленіе углового ускоренія въ данный моментъ при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки черезъ $\overline{\tau}$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{\tau} = \text{пред. } \frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}{\Delta t} = \text{пред. } \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t}.$$

Для выясненія величины и направленія углового ускоренія $\overline{\tau}$ обратимся къ неподвижному годографу угловой скорости тѣла (черт 45); въ такомъ случаѣ мы видимъ, что

$$\overline{\omega} = \overline{OH} \text{ и } \overline{\omega}_1 = \overline{OH}_1;$$

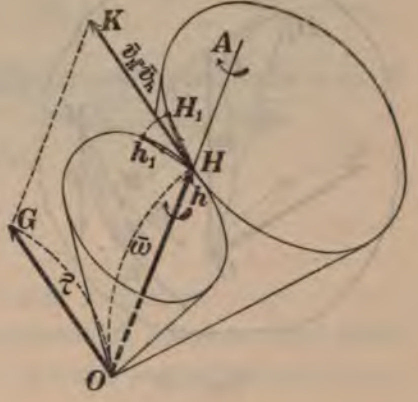
слѣдовательно

$$\overline{\tau} = \text{пред. } \frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}{\Delta t} = \text{пред. } \frac{\overline{OH}_1 - \overline{OH}}{\Delta t} = \text{пред. } \frac{\overline{HH}_1}{\Delta t}$$

по

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{HH_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{hh_1}}{\Delta t} = \overline{v}_H = \overline{v}_h = \overline{HK},$$

т. е. *угловое ускоренie въ данный моментъ твердаго тѣла, вращающаго вокругъ неподвижной точки, по* **величинѣ** *и* **направленiю** *выражается* **скоростями** *въ данный моментъ точекъ H и h, чертящихъ неподвижный и подвижной годографы угловыхъ скоростей твердаго тѣла.*



Черт. 45.

Угловое ускоренie въ данный моментъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, откладывается, подобно угловой скорости $\overline{\omega}$, отъ неподвижной точки твердаго тѣла, причемъ *направленiя $\overline{\omega}$ и $\overline{\tau}$, вообще говоря, не совпадаютъ.*

Замѣтимъ наконецъ, что изъ равенства

$$\overline{\tau} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t}$$

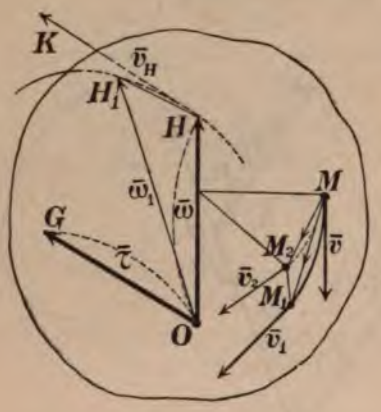
ясно, что $\overline{\Delta\omega}$ геометрически эквивалентно $\overline{\tau}\,.\,\Delta t$, т. е. *безконечно-малое* **геометрическое** *приращенiе $\overline{\Delta\omega}$ угловой скорости твердаго тѣла, при вращенiи тѣла вокругъ неподвижной точки, за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающiй къ данному моменту t,* **геометрически эквивалентно** *произведенiю углового ускоренiя тѣла $\overline{\tau}$ въ тотъ же моментъ на промежутокъ времени Δt.*

§ 9. Выраженie величины и направленiя ускоренiй точекъ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

Мы знаемъ, что ускоренie $\overline{u}$ всякой точки M (черт. 46) выражается равенствомъ:

$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t}.$$

Чтобы найти величину и направленіе этого предѣла для точки M твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки O и обладающаго въ данный моментъ угловою скоростью $\overline{\omega}$ и угловымъ ускореніемъ $\overline{\tau}$, введемъ въ разсмотрѣніе скорость $\overline{v}_2$ точки M_2, которою обладала бы точка M въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$, еслибы тѣло равномѣрно вращалось съ угловою скоростью ω вокругъ неподвижной оси, совпадающей съ мгновенною осью тѣла въ данный моментъ t; въ такомъ случаѣ мы можемъ написать, что



Черт. 46.

$$\overline{u} = \text{пред.}\,\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t} = \text{пред.}\,\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2 + \overline{v}_2 - \overline{v}}{\Delta t} =$$

$$= \text{пред.}\,\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\Delta t} + \text{пред.}\,\frac{\overline{v}_2 - \overline{v}}{\Delta t}.$$

Разсмотримъ каждый изъ этихъ предѣловъ въ отдѣльности.

а) Мы знаемъ, что

$$\overline{v}_1 = \overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1) \text{ и } \overline{v}_2 = \overline{M}_{M_2}(\overline{\omega}),$$

причемъ изъ предъидущаго намъ извѣстно, что разстояніе $\overline{M_2 M_1}$ есть безконечно-малая величина высшаго порядка; слѣдовательно (по теоремѣ о перемѣнѣ центра линейнаго момента) линейный моментъ $\overline{M}_{M_2}(\overline{\omega})$ отличается отъ линейнаго момента $\overline{M}_{M_1}(\overline{\omega})$ на безконечно-малый векторъ **высшаго** порядка, и потому мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\text{пред.}\,\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\Delta t} = \text{пред.}\,\frac{\overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1) - \overline{M}_{M_2}(\overline{\omega})}{\Delta t} =$$

$$= \text{пред.}\,\frac{\overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1) - \overline{M}_{M_1}(\overline{\omega})}{\Delta t} = \text{пред.}\,\frac{\overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega})}{\Delta t} =$$

$$= \text{пред.}\,\overline{M}_{M_1}\left(\frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}{\Delta t}\right).$$

Замѣтивъ наконецъ, что въ предѣлѣ точка M_1 совпадаетъ съ точкою M и что пред. $\frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}{\Delta t} = \overline{\tau}$, мы приходимъ къ заключенію, что

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{\Delta t} = \overline{M}_M(\overline{\tau}).$$

Этотъ предѣлъ носитъ названіе **вращательнаго ускоренія** точки M твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.

b) Что касается до второго предѣла

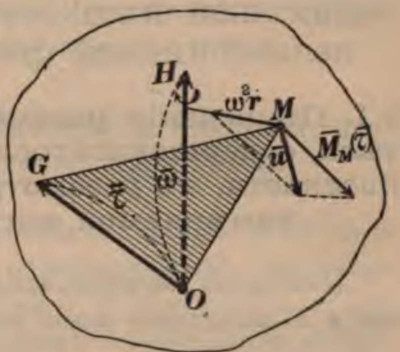
$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}}{\Delta t},$$

то величина и направленіе этого предѣла очевидны.

Дѣйствительно, такъ какъ разсматриваемый предѣлъ есть ничто иное, какъускореніе точки M твердаго тѣла при равномѣрномъ вращеніи тѣла съ угловою скоростью ω вокругъ неподвижной оси, совпадающей съ мгновенною осью тѣла въ данный моментъ, то

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}}{\Delta t} = \overline{\omega^2 r},$$

причемъ направленіе этого предѣла совпадаетъ съ направленіемъ перпендикуляра опущеннаго изъ точки M на мгновенную ось, поэтому найденный предѣлъ носитъ названіе **осестремительнаго ускоренія** точки M.



Черт. 47.

Итакъ, при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки ускореніе любой его точки M выражается такъ же, какъ при вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, совпадающей съ мгновенною осью тѣла въ данный моментъ, а именно (черт. 47)

$$\overline{u} = \overline{\omega^2 r} + \overline{M}_M(\overline{\tau}),$$

т. е. **ускореніе** $\overline{u}$ *точки* M *твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **двухъ** *ускореній:*

1) **осестремительнаго ускоренія** $\overline{\omega^2 r}$, *направленнаго по перпендикуляру къ мгновенной оси*, и

2) **вращательнаго ускоренія** $\overline{M}_M(\overline{\tau})$, *выражающагося по величинѣ и направленію линейнымъ моментомъ углового ускоренія тѣла относительно разсматриваемой точки* M.

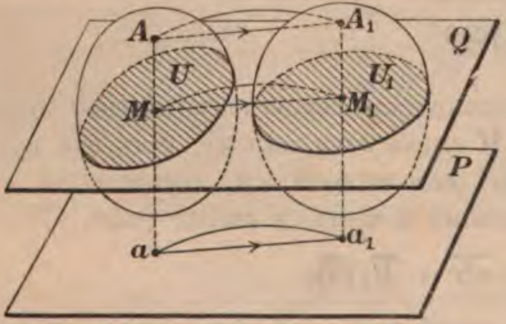
NB

Примѣчаніе. Слѣдуетъ обратить вниманіе, что при вращательномъ движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной **оси** осестремительное и вращательное ускоренія любой его точки взаимно-перпендикулярны и совпадаютъ соотвѣтственно съ ея центростремительнымъ и касательнымъ ускореніями, при движеніи же твердаго тѣла вокругъ неподвижной **точки** осестремительныя и вращательныя ускоренія его точекъ, вообще говоря, не перпендикулярны другъ къ другу и не совпадаютъ съ ихъ центростремительными и касательными ускореніями, что вполнѣ ясно изъ сравненія величинъ и направленій тѣхъ и другихъ ускореній. так как направленіе ω и τ, вообще говоря, не совпадаютъ (стр. 73).

IV. Движеніе твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости, или движеніе плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.

§ 1. Приведеніе разсмотрѣнія движенія твердаго тѣла, совершающагося параллельно неподвижной плоскости, къ разсмотрѣнію движенія плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.

Движеніемъ твердаго тѣла **параллельно неподвижной плоскости** P *называется такое его движеніе, при которомъ* **разстояніе** *любой его точки* A *до этой плоскости во все время движенія сохраняетъ* **постоянную** *величину*.



Черт. 48.

Проведя черезъ тѣло нѣкоторую (черт. 48) плоскость Q параллельную неподвижной плоскости P, мы получимъ въ сѣченіи нѣкоторую плоскую фигуру U, причемъ всѣ точки этой плоской фигуры при такомъ движеніи твердаго тѣла всегда будутъ

оставаться въ плоскости Q, такъ какъ разстоянія ея точекъ до плоскости P по опредѣленію разсматриваемаго движенія твердаго тѣла не должны измѣняться.

Положимъ, что при перемѣщеніи твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости P нѣкоторая его точка A перемѣстилась въ положеніе A_1; опустивъ изъ точекъ A и A_1 перпендикуляры Aa и A_1a_1 на неподвижную плоскость P и замѣтивъ пересѣченія M, M_1 этихъ перпендикуляровъ съ сѣченіемъ U твердаго тѣла плоскостью Q, мы знаемъ, что по опредѣленію разсматриваемаго движенія твердаго тѣла $\overline{Aa} = \overline{A_1a_1}$ и $\overline{Ma} = \overline{M_1a_1}$; слѣдовательно $\overline{AM} = \overline{A_1M_1}$ и $\overline{AA_1} = \overline{MM_1}$, т. е. перемѣщеніе $\overline{AA_1}$ всякой точки A твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости, геометрически равно перемѣщенію $\overline{MM_1}$ ея проекціи M на сѣченіе тѣла U плоскостью параллельною неподвижной плоскости P, поэтому *изученіе движенія твердаго тѣла, совершающагося параллельно неподвижной плоскости, приводится къ изученію движенія плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.*

§ 2. Первая теорема о перемѣщеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.

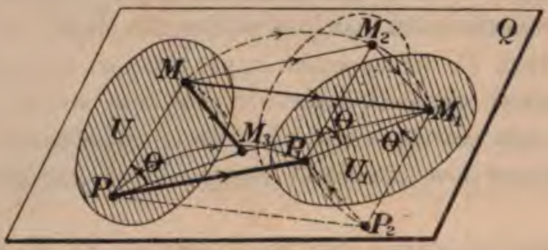
Всякое перемѣщеніе плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости можетъ быть воспроизведено **поступательнымъ** *перемѣщеніемъ фигуры вмѣстѣ съ одной ея точкою P, называемой въ такомъ случаѣ* **полюсомъ** *фигуры и* **угловымъ** *перемѣщеніемъ фигуры вокругъ выбраннаго полюса на нѣкоторый уголъ θ, причемъ ни величина, ни направленіе углового перемѣщенія фигуры* **не зависятъ** *отъ выбора полюса.*

Дѣйствительно, положимъ, что плоская фигура U (черт. 49) перешла въ положеніе U_1, приэтомъ точки P и M этой фигуры займутъ соотвѣтственно положенія P_1 и M_1.

Предположимъ теперь, что фигура U сначала перемѣстилась поступательно вмѣстѣ съ ея полюсомъ P; въ такомъ случаѣ точка P снова займетъ ея положеніе P_1, точка же M, описавъ дугу $\widehat{MM_2}$ равную и параллельную дугѣ $\widehat{PP_1}$, перейдетъ въ нѣкоторую точку M_2, причемъ $\overline{MM_2} = \overline{PP_1}$; повернувъ затѣмъ плоскую фигуру около

этой точки P_1 на уголъ $\theta = \angle M_2P_1M_1$, мы приведемъ ее въ требуемое положенiе U_1.

Возьмемъ теперь точку M за полюсъ, т. е. перемѣстимъ фигуру U сначала поступательно вмѣстѣ съ этою точкою M, тогда точка P займетъ нѣкоторое положенiе P_2, причемъ $\overline{PP_2} = \overline{MM_1}$; принявъ наконецъ во вниманiе, что по неизмѣняемости разстоянiя между точками P и M, $P_1M_2 = P_1M_1 = M_1P_2$, и что, по параллельности отрѣзковъ P_1M_2 и M_1P_2 отрѣзку MP, они параллельны между собою, т. е. $\angle P_2M_1P_1 = \angle M_2P_1M_1 = \theta$, мы приходимъ къ заключенiю, что, повернувъ затѣмъ фигуру U на тотъ же уголъ θ около точки M_1, мы снова приведемъ ее въ требуемое положенiе U_1,



Черт. 49.

причемъ угловое перемѣщенiе фигуры около этого новаго полюса M совершается по тому же направленiю, какъ и около стараго полюса P (на нашемъ чертежѣ по движенiю стрѣлки); слѣдовательно теорема наша доказана.

Замѣтимъ наконецъ, что можно было бы сначала повернуть плоскую фигуру U около ея полюса P на уголъ $\angle MPM_3 = \theta$ и затѣмъ перемѣстить ее поступательно вмѣстѣ съ полюсомъ P; дѣйствительно, послѣ поворота фигуры U около полюса P на уголъ $\angle MPM_3 = \theta = \angle M_2P_1M_1$ точка M займетъ нѣкоторое положенiе M_3, причемъ отрѣзки PM_3 и P_1M_1 будутъ равны и параллельны; слѣдовательно $\overline{M_3M_1} = \overline{PP_1}$, поэтому, сообщивъ затѣмъ фигурѣ U поступательное перемѣщенiе вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P, мы опять приведемъ ее въ требуемое положенiе U_1.

Такимъ образомъ *каждому перемѣщенiю плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости соотвѣтствуетъ свое* **угловое** *перемѣщенiе* θ, **независящее отъ выбора** *полюса* P, *причемъ*

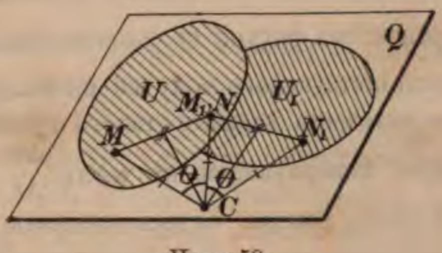
$$\overline{MM_1} = \overline{MM_2} + \overline{M_2M_1} = \overline{PP_1} + \overline{MM_3},$$

т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{MM_1}$ *всякой точки* M *плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **двухъ** *перемѣщеній:* **поступательнаго перемѣщенія** $\overline{PP_1}$, геометрически равнаго вектору перемѣщенія выбраннаго полюса P и **вращательнаго перемѣщенія** $\overline{MM_3}$ вокругъ этого полюса P, геометрически равнаго вектору перемѣщенія той же точки M при поворотѣ плоской фигуры въ ея плоскости на соотвѣтствующій уголъ θ около полюса P, предполагаемаго неподвижнымъ, причемъ ни величина, ни направленіе этого углового перемѣщенія фигуры θ не зависятъ отъ выбора ея полюса P.

§ 3. Вторая теорема о перемѣщеніи плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.

Всякое **непоступательное** *перемѣщеніе плоской фигуры въ ея плоскости можетъ быть воспроизведено* **угловымъ перемѣщеніемъ** *фигуры около нѣкоторой* **неподвижной** *точки, неизмѣнно связанной съ плоскою фигурою.*

Дѣйствительно, положимъ, что плоская фигура U, оставаясь постоянно въ плоскости Q (черт. 50), перемѣстилась въ положеніе U_1. Взявъ при первомъ положеніи фигуры нѣкоторую ея точку M, замѣтимъ новое положеніе этой точки M_1.



Черт. 50.

Съ точкою M_1 при первомъ положеніи фигуры совпадаетъ нѣкоторая неизмѣнно связанная съ фигурою точка N, которая при второмъ положеніи фигуры займетъ нѣкоторое положеніе N_1.

Соединивъ точки M, N и M_1, N_1 прямыми линіями и возставивъ изъ срединъ этихъ линій перпендикуляры къ нимъ, мы получимъ въ пересѣченіи такихъ перпендикуляровъ нѣкоторую точку C, причемъ по неизмѣняемости разстояній между точками фигуры ясно, что $MN = M_1N_1$ и $CM = CM_1 = CN = CN_1$: т. е. треугольники $\triangle MCN$ и $\triangle M_1CN_1$ равны; слѣдовательно $\angle MCN = \angle M_1CN_1 = \theta$, и потому, повернувъ фигуру U около точки C на этотъ уголъ θ, мы видимъ, что точки M и N займутъ положенія M_1, N_1, совпадающія

съ положеніями ихъ при второмъ положеніи фигуры; положенія же двухъ точекъ, плоской неизмѣняемой фигуры, остающейся постоянно въ данной плоскости, опредѣляютъ положеніе самой фигуры въ этой плоскости; слѣдовательно высказанная нами теорема доказана.

§ 4. Средняя угловая скорость и средній центръ перемѣщенія плоской неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Раздѣливъ время движенія плоской фигуры въ ея плоскости на ничтожно малые элементы Δt, мы знаемъ, что каждому такому элементу времени соотвѣтствуетъ нѣкоторое ничтожно-малое перемѣщеніе фигуры въ ея плоскости, которое по предыдущей теоремѣ можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ фигуры на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta$ около нѣкоторой неподвижной точки; поэтому отношеніе $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ мы будемъ называть **среднею угловою скоростью** фигуры за разсматриваемый промежутокъ времени Δt, а неподвижную точку, соотвѣтствующую этому угловому перемѣщенію $\Delta\theta$, **среднимъ центромъ перемѣщенія** фигуры за тотъ промежутокъ времени Δt.

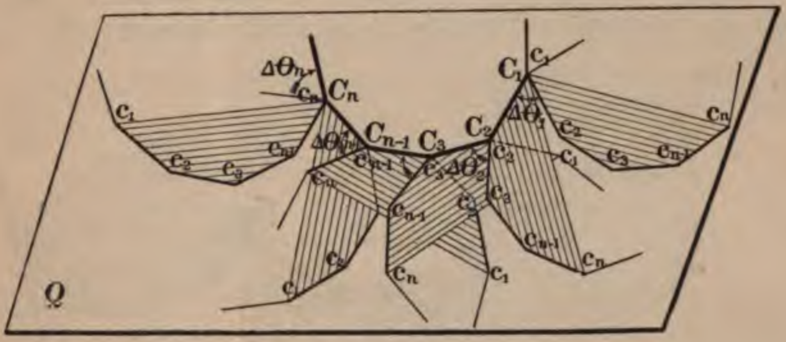
Замѣнивъ дѣйствительное движеніе плоской фигуры въ ея плоскости въ теченіе каждаго промежутка времени Δt равномѣрнымъ вращеніемъ фигуры съ угловою скоростью $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ около средняго центра, соотвѣтствующаго тому же промежутку времени Δt, мы знаемъ, что по истеченіи каждаго такого промежутка времени Δt плоская фигура, повернувшись на уголъ $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\Delta t = \Delta\theta$ около соотвѣтствующаго средняго центра, будетъ занимать въ ея плоскости положеніе, совпадающее съ положеніемъ фигуры въ тотъ же моментъ въ ея дѣйствительномъ движеніи.

Съ этой точки зрѣнія *на всякое движеніе плоской фигуры въ ея плоскости можно смотрѣть, какъ на предѣлъ ряда послѣдовательныхъ равномѣрныхъ вращеній фигуры вокругъ соотвѣтствующихъ среднихъ центровъ.*

§ 5. Воспроизведеніе движенія плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости.

Для болѣе нагляднаго представленія движенія плоской фигуры въ ея плоскости возьмемъ опредѣленный промежутокъ времени $t - t_0$

и раздѣлимъ его на n послѣдовательныхъ, равныхъ промежутковъ Δt_1, $\Delta t_2, \ldots \Delta t_n$; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что первому промежутку времени Δt_1 соотвѣтствуетъ на плоской фигурѣ нѣкоторый, неизмѣнно съ нею связанный (черт. 51), среднiй центръ c_1 и угловое перемѣщенiе фигуры вокругъ этого средняго центра равное $\Delta\theta_1$, второму промежутку времени Δt_2 соотвѣтствуетъ среднiй центръ c_2 и угловое перемѣщенiе $\Delta\theta_2$ и т. д. вплоть до послѣдняго промежутка времени Δt_n, которому соотвѣтствуетъ угловое перемѣщенiе плоской фигуры $\Delta\theta_n$ вокругъ, неизмѣнно съ нею связаннаго, средняго центра c_n; такимъ образомъ положенiя послѣдовательныхъ

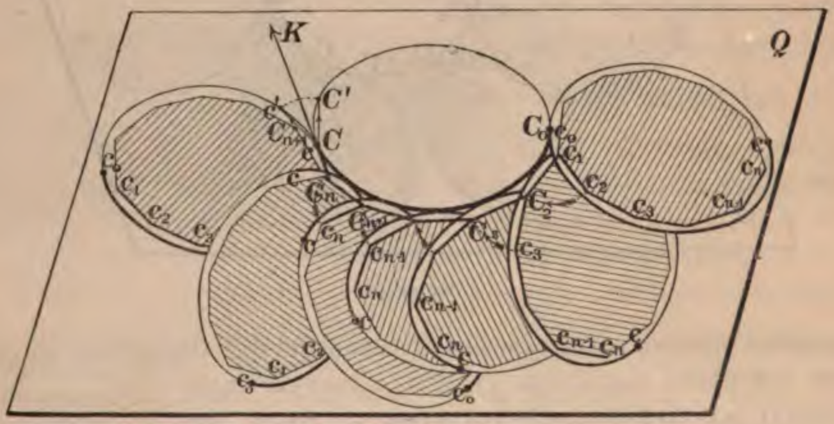


Черт. 51.

среднихъ центровъ движущейся плоской фигуры образуютъ нѣкоторую неизмѣнно связанную съ нею ломанную линiю $(c_1 c_2 \ldots c_{n-1} c_n)$, причемъ положенiе плоской фигуры въ концѣ перваго промежутка времени Δt_1 можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщенiемъ фигуры въ ея плоскости на уголъ $\Delta\theta_1$ около средняго центра c_1, при этомъ угловомъ перемѣщенiи фигуры точка c_2 займетъ на плоскости движенiя Q нѣкоторое положенiе C_2, причемъ положенiе плоской фигуры въ концѣ второго промежутка времени Δt_2, можно воспроизвести угловымъ перемѣщенiемъ фигуры на уголъ $\Delta\theta_2$ вокругъ этой точки C_2, съ которою совмѣстился на плоскости Q среднiй центръ c_2, послѣ чего точка c_3 перейдетъ въ точку C_3 и положенiе плоской фигуры въ концѣ промежутка Δt_3 можно воспроизвести угловымъ перемѣщенiемъ фигуры въ ея плоскости на уголъ $\Delta\theta_3$ около этой точки C_3 и т. д.... положенiе движущейся плоской фигуры въ концѣ послѣдняго промежутка времени Δt_n, т. е. въ мо-

ментъ t, можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ фигуры въ ея плоскости на уголъ $\Delta\theta_n$ около точки C_n, съ которою совмѣстился въ концѣ предшествовавшаго промежутка времени Δt_{n-1} среднiй центръ c_n.

Такимъ образомъ при движеніи плоской фигуры въ ея плоскости послѣдовательные средніе центры $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}, c_n$ угловыхъ перемѣщеній этой фигуры занимаютъ на плоскости ея движенія нѣкоторыя положенія $C_1, C_2, \ldots C_n$, причемъ подвижная ломанная линія $(c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}\, c_n)$, будучи неизмѣнно связана съ движущеюся плоскою фигурою, участвуетъ въ ея движеніи, вращаясь около послѣдовательныхъ вершинъ неподвижной ломанной линіи, при томъ такъ, что въ теченіе каждаго промежутка времени онѣ имѣютъ



Черт. 52.

общую вершину и стороны ихъ послѣдовательно совмѣщаются; слѣдовательно длины этихъ ломанныхъ линій $(c_1\, c_2 \ldots c_n)$ и $(C_1\, C_2 \ldots C_n)$ между соотвѣтственными вершинами **равны**.

Станемъ теперь безпредѣльно увеличивать число дѣленій n даннаго промежутка времени $t - t_0$; въ такомъ случаѣ ломанныя линіи $(c_1\, c_2 \ldots c_n)$ и $(C_1\, C_2 \ldots C_n)$ будутъ имѣть своими предѣлами (черт. 52) нѣкоторыя кривыя $\widehat{c_0 c}$ и $\widehat{C_0 C}$, называемыя соотвѣтственно **подвижною** *и* **неподвижною центроидами** *даннаго движенія плоской фигуры въ ея плоскости*; замѣтивъ наконецъ, что предѣльное положеніе средняго центра за безконечно малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, называютъ **мгновеннымъ цен-**

тромъ *плоской фигуры* **въ данный моментъ,** мы можемъ сказать, что **подвижная центроида** *даннаго движенія плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ фигуры на плоскости, неизмѣнно съ нею связанной,* **неподвижная**-*же* **центроида** *есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ фигуры на плоскости ея движенія.*

При данномъ движеніи плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости подвижная центроида этого движенія, будучи неизмѣнно связана съ движущеюся фигурою, участвуетъ въ ея движеніи, причемъ движеніе подвижной центроиды по отношенію къ неподвижной центроидѣ удовлетворяетъ (черт. 52) слѣдующимъ условіямъ:

1) *Въ каждый моментъ t подвижная и неподвижная центроиды имѣютъ* **общую точку** (c, C), совпадающую съ предѣльнымъ положеніемъ средняго центра C_n плоской фигуры за безконечно малый промежутокъ времени Δt_n, прилегающій къ данному моменту t.

2) *Въ каждый моментъ t подвижная и неподвижная центроиды въ ихъ общей точкѣ (c, C) имѣютъ* **общую касательную** CK; дѣйствительно въ концѣ слѣдующаго промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, нѣкоторая точка c' подвижной центрсиды совмѣстится съ нѣкоторою точкою C' неподвижной центроиды, причемъ обѣ эти точки, будучи безконечно близки къ точкѣ (c, C), будутъ отстоять отъ средняго цечтра C_{n+1}, соотвѣтствующаго этому промежутку времени Δt, на безконечно малыя величины, такъ какъ точка C есть предѣльное положеніе средняго центра C_{n+1}; кромѣ того мы знаемъ, что перемѣщеніе плоской фигуры въ ея плоскости за этотъ промежутокъ времени Δt можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщеніемъ фигуры около средняго центра C_{n+1} на нѣкоторый безконечно малый уголъ $\Delta\theta$, слѣдовательно дуга $\widehat{c'C'}$, а потому и векторъ $\overline{c'C'}$ будутъ безконечно малыми величинами **высшаго порядка**, поэтому векторы перемѣщеній $\overline{cc'}$ и $\overline{CC'}$ **геометрически эквивалентны**, т. е.

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{cc'}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{CC'}}{\Delta t} = \overline{V}_c = \overline{V}_C = \overline{CK},$$

гдѣ $\overline{V}_c$ и $\overline{V}_C$ суть соотвѣтственно скорости перемѣщеній по подвижной и неподвижной центроидамъ ихъ общей точки $(c\ C,)$, причемъ, въ виду совпаденія этихъ скоростей $\overline{V}_c$ и $\overline{V}_C$, ясно, что подвижная и неподвижная центроиды имѣютъ въ ихъ общей точкѣ (c, C) общую касательную CK.

3) *Дуги $\widehat{c_0c}$ и $\widehat{C_0C}$ подвижной и неподвижной центроидъ между ихъ* **соотвѣтственными** *точками* **равны**; дѣйствительно

$$\widehat{c_0c} = \text{пред.}\ (c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots c_{n-1}\ c_n);$$

$$\widehat{C_0C} = \text{пред.}\ (C_1C_2 + C_2C_3 + \dots C_{n-1}\,C_n);$$

но мы знаемъ, что ломанныя линіи $(c_1c_2 \dots c_n)$ и $(C_1C_2 \dots C_n)$ равны, т. е.

$$c_1c_2 + c_2c_3 + \dots + c_{n-1}\,c_n = C_1C_2 + C_2C_3 + \dots C_{n-1}\,C_n$$

какъ бы не было велико число дѣленій n даннаго промежутка времени $t - t_0$; слѣдовательно

$$\widehat{c_0c} = \widehat{C_0C}.$$

Движеніе одной плоской кривой по другой, удовлетворяющее вышеприведеннымъ **тремъ** условіямъ, называется **катаніемъ безъ скольженія** первой кривой по второй, поэтому можно сказать, что *при движеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости подвижная центроида этого движенія* **катится безъ скольженія** *по неподвижной центроидѣ, причемъ* **общая величина** *V скоростей*

$$\overline{V}_c = \overline{V}_C = \overline{CK} = \text{пред.}\ \frac{\overline{cc'}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{CC'}}{\Delta t}$$

перемѣщеній по подвижной и неподвижной центроидамъ ихъ точки касанія (c, C) называется **скоростью катанія** *подвижной центроиды по неподвижной.*

Итакъ *всякое движеніе плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости можетъ быть воспроизведено* **катаніемъ безъ скольженія** *нѣкоторой кривой, неизмѣнно связанной съ движущеюся плоскою фигурою, называемой* **подвижною центроидою,** *по нѣкоторой неподвижной кривой, лежащей въ плоскости движенія данной фигуры, причемъ кривая эта называется* **неподвижною центроидою** *даннаго движенія плоской фигуры въ ея плоскости.*

§ 6. Угловая скорость и угловое ускореніе въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мы доказали, что при движеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости каждому перемѣщенію фигуры изъ ея начальнаго положенія въ положеніе, занимаемое ею въ нѣкоторый моментъ t, соотвѣтствуетъ опредѣленное угловое перемѣщеніе фигуры θ, не зависящее отъ выбора ея полюса. Это угловое перемѣщеніе θ есть

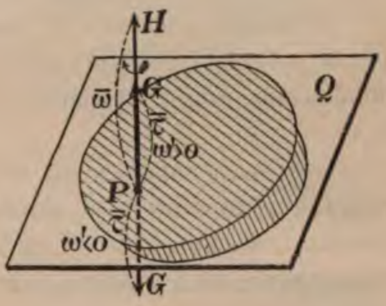
нѣкоторая непрерывная функція времени t, причемъ отношеніе $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, т. е. отношеніе углового перемѣщенія плоской фигуры $\Delta\theta$ за промежутокъ времени Δt, къ самому этому промежутку времени Δt мы назвали **среднею угловою скоростью** фигуры за данный промежутокъ времени Δt, абсолютная же величина предѣла этого отношенія:

$$\omega = \pm \text{пред.} \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

т. е. **абсолютная** *величина предѣла средней угловой скорости фигуры за безконечно малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *носитъ названіе* **величины угловой скорости** *фигуры* **въ данный моментъ.**

Изъ этого опредѣленія ясно, что **величина** *угловой скорости въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости,* **аналитически** *выражается* **абсолютнымъ** *значеніемъ производной отъ углового перемѣщенія* θ *плоской фигуры въ ея плоскости, т. е.*

$$\omega = \pm \text{пред.} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \pm \theta'.$$



Черт. 53.

Угловой скорости ω въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, кромѣ **величины** приписываютъ еще нѣкоторое **направленіе,** а именно ее откладываютъ отъ выбраннаго полюса P (черт. 53) по перпендикуляру къ плоскости фигуры, притомъ въ ту сторону, относительно которой угловое перемѣщеніе фигуры, въ теченіе безконечно малаго промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, совершается слѣва направо.

Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ $\overline{\omega}$ величину и направленіе угловой скорости фигуры въ данный моментъ мы видимъ (черт. 53), что $\overline{\omega} = \overline{PH}$, причемъ векторъ $\overline{PH}$ содержитъ въ себѣ столько выбранныхъ единицъ длины $[L]$, сколько въ угловой скорости ω въ данный моментъ содержится единицъ угловой скорости.

Съ теченіемъ времени величина угловой скорости плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, вообще говоря, измѣняется, причемъ отношеніе $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, т. е. отношеніе приращенія угловой скорости $\Delta\omega$ плоской фигуры за промежутокъ времени Δt, къ самому этому промежутку времени Δt называютъ **среднимъ угловымъ ускореніемъ** плоской фигуры за данный промежутокъ времени Δt, а **абсолютная** *величина предѣла средняго угловаго ускоренія плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, за безконечно малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *т. е.*

$$\tau = \pm \text{пред.} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \pm \omega' = \pm \theta''$$

носитъ названіе **величины угловаго ускоренія** *фигуры* **въ данный моментъ**.

Угловое ускореніе плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, откладываютъ въ выбранной единицѣ длины $[L]$ отъ выбраннаго полюса P (черт. 53) по направленію угловой скорости $\overline{\omega}$, если угловая скорость возрастаетъ, т. е. $\omega' > 0$ и противоположно этому направленію, если угловая скорость убываетъ, т. е. $\omega' < 0$.

Изъ этихъ опредѣленій ясно, что *по* **величинѣ** *и* **направленію угловое ускореніе** $\overline{\tau}$ *въ данный моментъ* t *плоской неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, есть предѣлъ отношенія* **геометрическаго** *приращенія* $\overline{\Delta\omega}$ *угловой скорости фигуры за безконечно малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt, *т. е.*

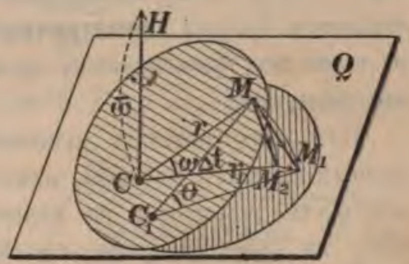
$$\overline{\tau} = \text{пред.} \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t}.$$

§ 7. Значеніе мгновеннаго центра и угловой скорости въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мы знаемъ, что перемѣщеніе плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, можетъ быть воспроизведено угло-

вымъ перемѣщеніемъ плоской фигуры на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta$ около неизмѣнно съ нею связанной (черт. 54) неподвижной точки C_1 названной нами **среднимъ центромъ** перемѣщенія плоской фигуры за данный промежутокъ времени Δt, причемъ предѣльное положеніе C средняго центра C_1 за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, называется **мгновеннымъ центромъ** фигуры въ данный моментъ.

Для выясненія значенія этого понятія замѣнимъ дѣйствительное движеніе плоской фигуры въ ея плоскости, въ теченіе промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, равномѣрнымъ вращеніемъ фигуры въ ея плоскости, вокругъ ея мгновеннаго центра C въ данный моментъ, съ угловою скоростью равною угловой скорости ω плоской фигуры въ тотъ же моментъ; въ такомъ случаѣ точка M плоской фигуры, описавъ дугу $\widehat{MM_2} = r\,\omega\,\Delta t$, гдѣ $r = MC$, есть разстояніе точки M до мгновеннаго центра C, займетъ нѣкоторое положеніе M_2, не совпадающее, вообще говоря, съ положеніемъ M_1 той же точки M по истеченіи промежутка времени Δt при дѣйствительномъ движеніи фигуры, такъ какъ дѣйствительное перемѣщеніе точки M, за этотъ промежутокъ времени Δt, воспроизводится угловымъ перемѣщеніемъ фигуры на уголъ $\Delta\theta$ около средняго центра C_1, т. е. $\widehat{MM_1} = r_1\,\Delta\theta$, гдѣ $r_1 = MC_1 = C_1M_1$ есть разстояніе точки M до средняго центра C_1.



Черт. 54.

Но,

$$\Delta\theta = \omega\,\Delta t + \varepsilon\,\Delta t$$

и

$$r_1 = r + \varepsilon_1,$$

гдѣ ε и ε_1 суть нѣкоторыя безконечно-малыя величины, и потому дуги:

$$\widehat{MM_2} = r\,\omega\,\Delta t \quad \text{и} \quad \widehat{MM_1} = r_1\,\Delta\theta = (r + \varepsilon_1)\,(\omega\,\Delta t + \varepsilon\,\Delta t)$$

эквивалентны, кромѣ того уголъ $\angle M_1MM_2$ очевидно **безконечно-**

малъ, слѣдовательно векторы перемѣщеній

$$\overline{MM}_2 \text{ и } \overline{MM}_1$$

геометрически эквивалентны.

Такимъ образомъ, *если* **замѣнить** *дѣйствительное движеніе плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости въ теченіе промежутка времени* Δt, *прилегающаго къ данному моменту* t, **равномѣрнымъ вращеніемъ** *фигуры въ ея плоскости вокругъ* **неподвижной** *точки, совпадающей съ мгновеннымъ центромъ фигуры этотъ моментъ,— съ угловою скоростью* $\overline{\omega}$ *равною угловой скорости фигуры въ данный моментъ, то по истеченіи промежутка времени* Δt *векторы перемѣщеній всѣхъ точекъ плоской фигуры въ этомъ воображаемомъ движеніи будутъ* **геометрически эквивалентны** *ихъ перемѣщеніямъ за тотъ же промежутокъ времени* Δt *въ дѣйствительномъ движеніи фигуры.*

Изъ этого значенія мгновеннаго центра и угловой скорости въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, ясно, что на всякое такое движеніе можно смотрѣть, какъ на предѣлъ ряда послѣдовательныхъ равномѣрныхъ вращеній плоской фигуры въ ея плоскости вокругъ неподвижныхъ центровъ, если мы раздѣлимъ время движенія фигуры на безконечно-малые элементы Δt и замѣнимъ дѣйствительное движеніе плоской фигуры въ теченіе каждаго такого промежутка времени Δt, равномѣрнымъ вращеніемъ фигуры въ ея плоскости вокругъ неподвижной точки, совпадающей съ мгновеннымъ центромъ фигуры въ начальный моментъ разсматриваемаго элемента времени, и съ угловою скоростью равною угловой скорости фигуры въ тотъ же моментъ въ ея дѣйствительномъ движеніи.

§ 8. Первое выраженіе скоростей точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мы знаемъ, что векторъ перемѣщенія $\overline{MM}_1$ за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t всякой точки M плоской неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, есть геометрическая сумма (черт. 49) двухъ перемѣщеній:

$$\overline{MM}_1 = \overline{MM}_2 + \overline{M_2M}_1 = \overline{PP}_1 + \overline{MM}_3,$$

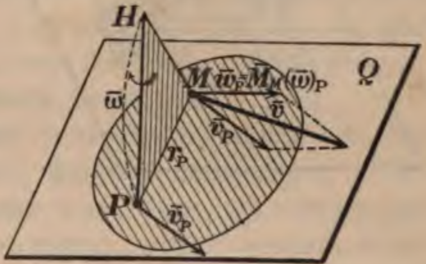
гдѣ $\overline{PP_1}$ есть векторъ перемѣщенія **полюса** фигуры P за тотъ же промежутокъ времени Δt, а $\overline{MM_3}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки M, еслибы полюсъ P оставался неподвижнымъ, а плоская фигура вращалась вокругъ перпендикулярной къ ней **неподвижной** оси, проходящей черезъ этотъ полюсъ P, притомъ по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія фигуры въ ея дѣйствительномъ движеніи, поэтому

$$\bar{v} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{PP_1}}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{MM_3}}{\Delta t}.$$

Но,

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{PP_1}}{\Delta t} = \bar{v}_P \ \text{ и пред.}\ \frac{\overline{MM_3}}{\Delta t} = \bar{w}_P,$$

гдѣ $\bar{v}_P$ есть скорость выбраннаго полюса P, а $\bar{w}_P$ есть скорость точки M фигуры U при вращеніи этой послѣдней съ угловою скоростью $\bar{\omega}$ вокругъ неподвижной оси, проходящей черезъ данное положеніе полюса P; слѣдовательно $\bar{w}_P$ по величинѣ и направленію выразится линейнымъ моментомъ $\overline{M}_M(\bar{\omega})_P$ относительно разсматриваемой точки M угловой скорости $\bar{\omega}$, отложенной отъ выбраннаго полюса P, и потому,



Черт. 55.

$$\bar{v} = \bar{v}_P + \bar{w}_P = \bar{v}_P + \overline{M}_M(\bar{\omega})_P,$$

т. е. при движеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости скорость $\bar{v}$ *любой ея точки* M (черт. 55), *вообще говоря, есть геометрическая сумма* **двухъ** *скоростей*:

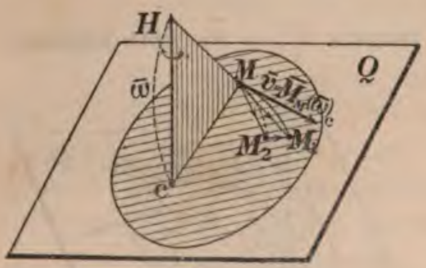
1) **скорости** $\bar{v}_P$ *выбраннаго полюса* P, движущейся фигуры и, такъ называемой,

2) **вращательной** *скорости* $\bar{w}_P$ *точки* M *относительно выбраннаго полюса* P; причемъ вращательная скорость $\bar{w}_P$ по величинѣ и направленію выражается **линейнымъ моментомъ** $\overline{M}_M(\bar{\omega})_P$ относительно разсматриваемой точки угловой скорости фигуры $\bar{\omega}$, отло-

женной отъ выбраннаго полюса P; другими словами величина вращательной скорости $\overline{w}_P$ равна произведенію ωr_P угловой скорости ω на разстояніе $r_P = MP$ точки M до выбраннаго полюса P, направленіе же ея перпендикулярно къ этому разстоянію и идетъ относительно угловой скорости $\overline{\omega}$, отложенной отъ полюса P, слѣва направо.

§ 9. Второе выраженіе скоростей точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мы доказали, что при движеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости векторы перемѣщеній (черт. 56) $\overline{MM}_1$ и $\overline{MM}_2$ каждой ея точки M за безконечно малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, въ дѣйствительномъ движеніи фигуры и въ ея воображаемомъ равномѣрномъ вращеніи съ угловою скоростью $\overline{\omega}$, равною угловой скорости фигуры въ данный моментъ, вокругъ **неподвижной** точки, совпадающей съ мгновеннымъ центромъ c фигуры въ тотъ же моментъ, **геометрически эквивалентны**; слѣдовательно скорость $\overline{v}$ точки M опредѣлится изъ равенствъ:



Черт. 56.

$$\overline{v} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_2}{\Delta t} = \overline{M}_M(\overline{\omega})_c,$$

такъ какъ пред. $\frac{\overline{MM}_2}{\Delta t}$, т. е. скорость точки M при равномѣрномъ вращеніи фигуры въ ея плоскости съ угловою скоростью $\overline{\omega}$ вокругъ **неподвижной** оси, проходящей черезъ положеніе c мгновеннаго центра фигуры въ данный моментъ по величинѣ и направленію выражается линейнымъ моментомъ $\overline{M}_M(\overline{\omega})_c$ относительно разсматриваемой точки M угловой скорости $\overline{\omega}$, отложенной отъ мгновеннаго центра c фигуры въ данный моментъ

Итакъ
$$\overline{v} = \overline{M}_M(\overline{\omega})_c$$

т. е. скорость $\overline{v}$ *любой точки* M *плоской неизмѣняемой фигуры* (черт. 56) *движущейся въ ея плоскости по* **величинѣ** *и* **направленію** *выражается* **линейнымъ моментомъ** *относительно разсматриваемой точки* M *угловой скорости фигуры, отложенной отъ ея* **мгновеннаго центра** c, *соотвѣтствующаго данному моменту времени* t; другими словами *скорости точекъ плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, въ каждый моментъ таковы, какъ будто бы плоская фигура* **равномѣрно** *вращалась вокругъ* **неподвижной оси**, *проходящей черезъ* **мгновенный центръ** c, *фигуры въ данный моментъ,—съ угловою скоростью* $\overline{\omega}$, *геометрически равною угловой скорости фигуры въ тотъ же моментъ.*

Изъ этого выраженія скоростей точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ своей плоскости, ясно, что скорость мгновеннаго центра фигуры равна нулю, причемъ въ данный моментъ это есть **единственная** необладающая скоростью точка плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости; поэтому можно сказать, что **мгновенный центръ** *въ данный моментъ плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, есть та точка плоской фигуры, скорость которой* **въ данный моментъ** *равна* **нулю**.

Замѣтимъ наконецъ, что въ виду того обстоятельства, что скорости точекъ плоской неизмѣняемой фигуры, движущейея въ ея плоскости, въ каждый моментъ таковы, какъ будто бы плоская фигура вращалась вокругъ мгновеннаго центра въ этотъ моментъ, предполагаемаго неподвижнымъ, **мгновенный центръ** плоской, неизмѣняемой фигуры въ данный моментъ называютъ еще **мгновеннымъ центромъ скоростей** точекъ плоской фигуры въ этотъ моментъ.

Примѣчаніе. Нетрудно видѣть, что второе выраженіе скоростей точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, можетъ быть получено изъ перваго и наоборотъ.

Дѣйствительно, принявъ въ данный моментъ мгновенный центръ плоской неизмѣняемой фигуры за ея полюсъ въ этотъ моментъ и зная, что $\overline{v}_c = 0$, изъ выраженія

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{M}_M(\overline{\omega})_P$$

мы приходимъ къ требуемому равенству:

$$\overline{v} = \overline{M}_M(\overline{\omega})_c.$$

Наоборотъ, по теоремѣ о перемѣнѣ центра линейнаго момента, мы имѣемъ равенство:

$$\overline{M}_M(\overline{\omega})_c = \overline{M}_P(\overline{\omega})_c + \overline{M}_M(\overline{\omega})_P;$$

но,

$$\overline{M}_M(\overline{\omega})_c = \overline{v} \quad \text{и} \quad \overline{M}_P(\overline{\omega})_c = \overline{v}_P ;$$

слѣдовательно

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{M}_M(\overline{\omega})_P .$$

§ 10. Построеніе мгновеннаго центра и угловой скорости въ данный моментъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мы доказали, что при движеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости въ каждый моментъ t существуетъ такая, неизмѣнно съ нею связанная, точка c, скорость которой въ данный моментъ равна нулю; эта точка c называется **мгновеннымъ центромъ** фигуры въ этотъ моментъ, причемъ скорости всѣхъ остальныхъ точекъ фигуры выражаются равенствомъ:

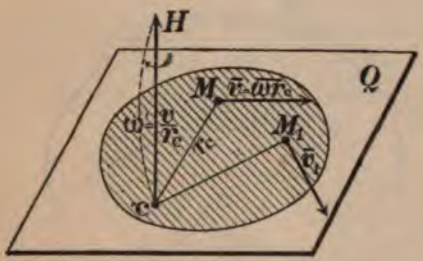
$$\overline{v} = \overline{M}_M(\overline{\omega})_c ,$$

т. е. скорость каждой точки M плоской фигуры будетъ перпендикулярна (черт. 57) къ разстоянію $r_c = Mc$ точки M до мгновеннаго центра c фигуры въ данный моментъ и по величинѣ $v = \omega r_c$; слѣдовательно для построенія въ данный моментъ мгновеннаго центра c плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, достаточно возстановить въ двухъ ея точкахъ M, M_1 перпендикуляры къ ихъ скоростямъ $\overline{v}$, $\overline{v}_1$ и найти точку пересѣченія c этихъ перпендикуляровъ; эта точка пересѣченія совпадетъ съ мгновеннымъ центромъ фигуры въ данный моментъ, а отношеніе $\frac{v}{Mc} = \frac{v}{r_c} = \omega$ опредѣлитъ величину ея угловой скорости $\overline{\omega}$ въ тотъ же моментъ.

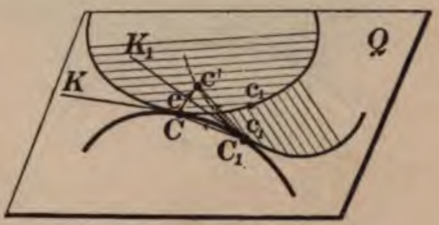
Примѣчаніе. Предположивъ такое построеніе выполненнымъ для всѣхъ моментовъ времени, мы получимъ (черт. 58) на плоской фигурѣ нѣкоторую неизмѣнно съ нею связанную кривую $\widehat{cc_1}$, представляющую собою геометрическое мѣсто положеній на плоскости самой фигуры ея послѣдовательныхъ мгновенныхъ центровъ; эта кривая, будучи неизмѣнно связана съ плоскою фигурою, участвуетъ въ ея движеніи и называется, какъ мы знаемъ, **подвижною центроидою** даннаго движенія плоской неизмѣняемой фигуры, въ ея плоскости, кривая же $\widehat{CC_1}$, представляющая собою геометрическое мѣсто положеній послѣдовательныхъ мгновенныхъ центровъ фигуры на плоскости движенія фигуры называется, какъ намъ извѣстно,

неподвижною центроидою даннаго движенія плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости, причемъ мы доказали, что при движеніи плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости подвижная центроида **катится безъ скольженія** по неподвижной центроидѣ.

Наоборотъ, *если при движеніи плоской, неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости нѣкоторая неизмѣнно съ нею связанная плоская кривая* **катится безъ**



Черт. 57.



Черт. 58.

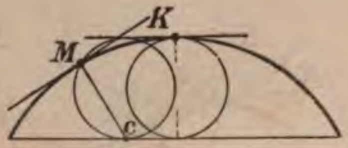
скольженія *по нѣкоторой неподвижной кривой, лежащей въ плоскости движенія фигуры, то эти кривыя будутъ соотвѣтственно* **подвижною** *и* **неподвижною центроидами** *даннаго движенія плоской фигуры въ ея плоскости.*

Для доказательства этой теоремы намъ достаточно лишь показать (черт. 58), что точка касанія (c, C) такихъ кривыхъ въ каждый моментъ t будетъ мгновеннымъ центромъ въ тотъ же моментъ даннаго движенія плоской фигуры въ ея плоскости; съ этою цѣлью мы замѣтимъ, что въ слѣдующіймоментъ $t_1 = t + \Delta t$ разсматриваемыя кривыя будутъ касаться въ точкѣ (c_1, C_1) и точка c перейдетъ въ положеніе c', причемъ такъ какъ дуги $\widehat{c'c_1}$ и $\widehat{CC_1}$ равны и разсматриваемыя кривыя въ общей ихъ точкѣ (c_1, C_1) имѣютъ общую касательную C_1K_1, т. е. уголъ $\angle\, c'c_1c$ безконечно малъ, то векторы $\overline{C_1c}$ и $\overline{C_1c'}$ **геометрически эквивалентны** и потому векторъ $\overline{cc'}$ перемѣщенія точки c за промежутокъ времени Δt будетъ **высшаго порядка малости**; слѣдовательно скорость точки c въ данный моментъ $\bar{v}_e =$ пред. $\dfrac{\overline{cc'}}{\Delta t}$ будетъ равна нулю, т. е. точка c будетъ **мгновеннымъ центромъ** въ данный моментъ плоской фигуры, неизмѣнно связанной съ движущеюся кривою.

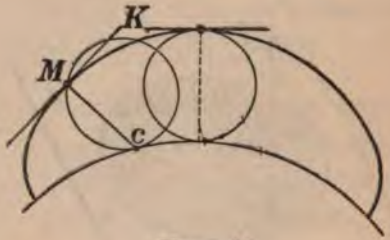
Итакъ *при* **катаніи безъ скольженія** *контура нѣкоторой плоской фигуры въ ея плоскости по нѣкоторой неподвижной кривой точка касанія этихъ кривыхъ въ каждый моментъ будетъ* **мгновеннымъ центромъ** *катящейся фигуры въ этотъ моментъ*, т. е. скорости всѣхъ точекъ фигуры въ данный моментъ будутъ перпендикулярны къ линіямъ, соединяющимъ эти точки съ точкою касанія фигуръ въ тотъ же моментъ, поэтому линія, соединяющая данную точку катящейся плоской фигуры съ точкою касанія фигуръ, будетъ **нормальна** къ

траекторіи разсматриваемой точки, откуда получается пріемъ для построенія **нормалей** и **касательныхъ** къ подобнаго рода кривымъ.

Примѣры: 1) При катаніи безъ скольженія окружности по прямой (черт. 59) точка M неизмѣнно связанная съ окружностью описываетъ нѣкоторую кривую, называемую **циклоидою**. Соединивъ точку M съ точкою касанія c, мы получимъ **нормаль** Mc къ циклоидѣ въ данной ея точкѣ M, и потому



Черт. 59.



Черт. 60.

прямая MK перпендикулярная къ Mc въ точкѣ M будетъ **касательною** къ циклоидѣ въ той же ея точкѣ M.

2) Подобнымъ же образомъ, при катаніи безъ скольженія (черт. 60) нѣкоторой подвижной окружности по нѣкоторой неподвижной окружности точка M, неизмѣнно связанная съ подвижною окружностью, описываетъ кривую, называемую **гипоциклоидою**, причемъ нормаль Mc и касательная MK въ данной точкѣ M этой кривой строятся такъ же, какъ для **циклоиды**.

§ 11. Выраженіе ускореній точекъ плоской неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мы знаемъ, что ускореніе $\overline{u}$ всякой точки M выражается равенствомъ:

$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t}.$$

Но, если точка M принадлежитъ плоской неизмѣняемой фигурѣ, движущейся въ своей плоскости, то (черт. 61)

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{w}_P \quad \text{и} \quad \overline{v}_1 = \overline{v}_{P_1} + \overline{w}_{P_1},$$

гдѣ $\overline{v}_P$ и $\overline{v}_{P_1}$ суть скорости **полюса** P въ плоскости t и $t_1 = t + \Delta t$, а $\overline{w}_P$ и $\overline{w}_{P_1}$ суть **вращательныя** скорости въ тѣ-же моменты точки M относительно выбраннаго полюса P; слѣдовательно

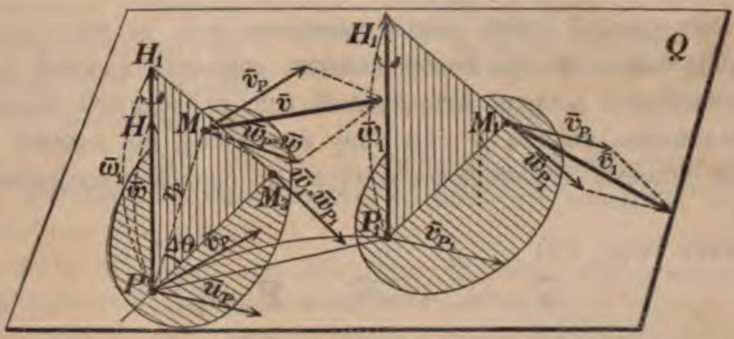
$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{P_1} - \overline{v}_P}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{w}_{P_1} - \overline{w}_P}{\Delta t}.$$

Разсмотримъ каждый изъ этихъ предѣловъ въ отдѣльности.

a) Первый изъ разсматриваемыхъ предѣловъ есть очевидно ускореніе $\overline{u}_P$ выбраннаго полюса P, т. е.

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{P_1} - \overline{v}_P}{\Delta t} = \overline{u}_P.$$

b) Для выясненія величины и направленія второго предѣла предпредположимъ, что въ данный моментъ t полюсъ P закрѣпленъ, а фигура U продолжаетъ свое вращательное движеніе вокругъ неподвижной оси, проходящей черезъ это положеніе полюса по тому же



Черт. 61.

закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія фигуры въ ея дѣйствительномъ движеніи, т. е. угловыя перемѣщенія, а слѣдовательно угловыя скорости и ускоренія въ этомъ воображаемомъ движеніи вокругъ неподвижной оси во всѣ послѣдующіе моменты будутъ равны соотвѣтственнымъ величинамъ дѣйствительнаго движенія плоской фигуры въ ея плоскости. Въ такомъ случаѣ обозначивъ черезъ $\overline{w}$ скорость точки M въ этомъ воображаемомъ движеженіи въ данный моментъ t, мы видимъ, что

$$\overline{w} = \overline{M}_M\,(\overline{\omega})_P = \overline{w}_P.$$

Въ слѣдующій моментъ $t_1 = t + \Delta t$ фигура U въ ея воображаемомъ движеніи вокругъ неподвижной оси повернется на уголъ $\Delta\theta$ и точка M займетъ (черт. 61) положеніе M_3, причемъ радіусъ PM_3 будетъ параллеленъ его положенію P_1M_1 въ тотъ же моментъ въ дѣйствительномъ движеніи фигуры, и потому вращательная скорость $\overline{w}_1$ точки M_3, т. е. вращательная скорость въ моментъ

$t_1 = t + \Delta t$ той же точки M въ этомъ воображаемомъ движенiи фигуры вокругъ **неподвижной** оси, проходящей черезъ положенiе полюса P въ данный моментъ, будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$\overline{w}_1 = \overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1)_P = \overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1)_{P_1} = \overline{w}_{P_1},$$

т. е.

$$\overline{w}_1 = \overline{w}_{P_1};$$

слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{w}_{P_1} - \overline{w}_P}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{w}_1 - \overline{w}}{\Delta t} = \overline{\omega^2 r_P} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_P,$$

такъ какъ среднiй членъ этихъ равенствъ есть не что иное, какъ ускоренiе точки M при воображаемомъ движенiи плоской фигуры, совершающемся вокругъ неподвижной оси, проходящей черезъ данное положенiе полюса P, по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенiя фигуры въ ея дѣйствительномъ движенiи.

Итакъ (черт. 62)

$$\overline{u} = \overline{u}_P + \overline{\omega^2 r_P} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_P,$$

т. е. ускоренiе въ данный моментъ точки M плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ своей плоскости, есть, вообще говоря, геометрическая сумма **трехъ** *ускоренiй:*

1) **ускоренiя** $\overline{u}_P$ **выбраннаго полюса** P плоской фигуры;

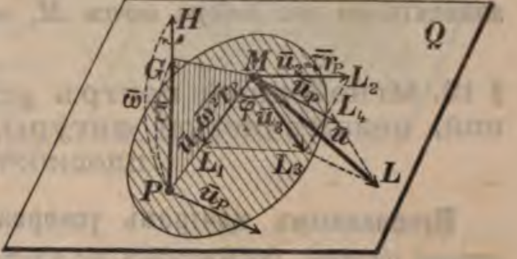
2) **осестремительнаго ускоренiя** $\overline{\omega^2 r_P}$, равнаго произведенiю квадрата угловой скорости ω^2 на разстоянiе $r_P = MP$ точки M до выбраннаго полюса P и направленнаго къ полюсу P, и наконецъ, такъ называемаго,

3) **вращательнаго ускоренiя** *точки M относительно выбраннаго полюса P*, выражающагося по величинѣ и направленiю линейнымъ моментомъ $\overline{M}_M(\overline{\tau})_P$ относительно разсматриваемой точки M углового ускоренiя фигуры $\overline{\tau}$, отложеннаго отъ выбраннаго полюса P; другими словами величина вращательнаго ускоренiя равна произведенiю τr_P изъ величины углового ускоренiя фигуры τ на разстоянiе r_P точки M до выбраннаго полюса P, направленiе же его перпендикулярно къ этому разстоянiю и идетъ относительно углового ускоренiя $\overline{\tau}$ слѣва направо.

Такъ какъ геометрическая сумма:

$$\overline{\omega^2 r_P} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_P\,,$$

т. е. геометрическая сумма **осестремительнаго** и **вращательнаго** ускореній точки M относительно выбраннаго полюса P плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, есть, какъ мы видѣли, ускореніе той же точки M плоской фигуры при вышеуказанномъ воображаемомъ вращательномъ движеніи этой послѣдней вокругъ **неподвижной** точки, совпадающей съ положеніемъ ея полюса P въ данный моментъ, то эту геометрическую сумму можно назвать **полнымъ вращательнымъ ускореніемъ** точки M относительно выбраннаго полюса P.



Черт. 62.

Отложивъ отъ произвольной точки M (черт. 62) движущейся плоской фигуры векторы:

$$\overline{ML}_1 = \overline{u}_1 = \overline{\omega^2 r_P} \text{ и } \overline{ML}_2 = \overline{u}_2 = \overline{M}_M(\overline{\tau})_P\,,$$

соотвѣтственно равные осестремительному и вращательному ускореніямъ этой точки и построивъ ихъ геометрическую сумму

$$\overline{OL}_3 = \overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2\,,$$

мы знаемъ, что векторы $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ будутъ **взаимно-перпендикулярны**, причемъ

$$u_1 = \omega^2 r_P,\ \ u_2 = \tau\, r_P\,;$$

слѣдовательно

$$u_3 = r_P \sqrt{\omega^4 + \tau^2}$$

и

$$tg\varphi = tg\,(L_3 MP) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\tau}{\omega^2}\,,$$

т. е. **величина $\overline{u}_3$ полнаго вращательнаго ускоренія,** *относительно выбраннаго полюса P, всякой точки M плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости,* **пропорціональна разстоянію**

$r_P = MP$ *разсматриваемой точки* M *до выбраннаго полюса* P, **направленіе же** *этого ускоренія для всѣхъ точекъ фигуры въ данный моментъ наклонено* **подъ однимъ и тѣмъ же острымъ** *угломъ* φ *къ линіямъ, соединяющимъ эти точки съ выбраннымъ полюсомъ* P, *причемъ* $\varphi = arctg\,\frac{\tau}{\omega^2}$, *т. е. этотъ уголъ наклоненія* φ **не зависитъ** *ни отъ выбора точки* M, *ни отъ выбора полюса* P.

§ 12. Мгновенный центръ ускореній точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости.

Мгновеннымъ центромъ ускореній *точекъ плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, называется такая точка фигуры,* **ускореніе** *которой въ данный моментъ* **равно нулю.**

Принявъ во вниманіе, что для всякой точки M такой фигуры

$$\overline{u} = \overline{u}_P + \overline{\omega^2 r_P} + \overline{M}_M\,(\overline{\tau})_P$$

и обозначивъ черезъ D (черт. 63) мгновенный центръ ускореній фигуры въ данный моментъ, а черезъ DP растояніе точки D до выбраннаго полюса P, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{u}_P + \overline{\omega^2 DP} + \overline{M}_D\,(\overline{\tau})_P = 0$$

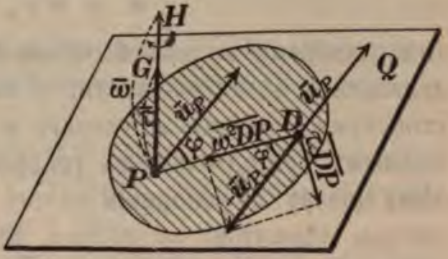
или

$$\overline{\omega^2 DP} + \overline{M}_D\,(\overline{\tau})_P = -\,\overline{u}_P\,,$$

т. е. **полное вращательное ускореніе** въ данный моментъ относительно выбраннаго полюса P мгновеннаго центра ускореній D плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, должно быть равно и прямопротивоположно ускоренію $\overline{u}_P$ этого полюса P.

Но, мы знаемъ, что полное вращательное ускореніе относительно выбраннаго полюса P всякой точки M плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, по величинѣ равно $r_P\sqrt{\omega^4 + \tau^2}$ и наклонено подъ острымъ угломъ $\varphi = arctg\,\frac{\tau}{\omega^2}$ къ линіи, соединяющей разсматриваемую точку съ полюсомъ P, причемъ оно идетъ слѣва направо относительно наблюдателя стоящаго

въ этомъ полюсѣ P по направленію углового ускоренія фигуры $\bar{\tau}$; слѣдовательно (черт. 63), проведя черезъ полюсъ P линію PD наклонную подъ угломъ φ къ ускоренію $\bar{u}_P$ полюса P, притомъ идущую въ ту сторону, чтобы, вставъ въ точкѣ D по направленію углового ускоренія $\bar{\tau}$ плоской фигуры въ этотъ моментъ, мы видѣли бы ускореніе $\bar{u}_P$, идущимъ слѣва на право, и отложивъ по этому на-



Черт. 63.

правленію отрѣзокъ $PD = \frac{u_P}{\sqrt{\omega^4 + \tau^2}}$, мы получимъ точку D, ускореніе которой $\bar{u}_D = 0$, т. е. *построенная такимъ образомъ точка D будетъ* **мгновеннымъ центромъ ускореній** *въ данный моментъ точекъ движущейся плоской фигуры.*

Дѣйствительно, направленіе **полнаго вращательнаго ускоренія** точки D относительно выбраннаго полюса P, будучи наклонено подъ угломъ φ къ линіи DP, и идя слѣва направо относительно наблюдателя стоящаго въ точкѣ P, по направленію углового ускоренія фигуры $\bar{\tau}$, будетъ прямо противоположно направленію ускоренія $\bar{u}_P$ выбраннаго полюса P, что же касается до величины этого ускоренія, то она, выражаясь произведеніемъ $DP.\sqrt{\omega^4 + \tau^2}$, очевидно будетъ равна u_P, такъ какъ DP по построенію равно $\frac{u_P}{\sqrt{\omega^4 + \tau^2}}$; слѣдовательно для точки D геометрическая сумма ея осестремительнаго и вращательнаго ускореній относительно полюса P будетъ равна, но противоположна ускоренію $\bar{u}_P$ выбраннаго полюса P плоской фигуры и потому

$$\bar{u}_D = \bar{u}_P + \overline{\omega^2 DP} + \bar{M}_D(\bar{\tau})_P = \bar{u}_P - \bar{u}_P = 0,$$

т. е. ускореніе построенной такимъ образомъ точки D равно нулю, что и требовалось доказать.

Изъ этого построенія мгновеннаго центра D ускореній плоской неизмѣняемой фигуры, движущеся въ ея плоскости, ясно, что въ каждый моментъ существуетъ только **одинъ** мгновенный центръ ускореній такой фигуры, т. е. **одна** *такая точка D, ускореніе которой $\bar{u}_D = 0$.*

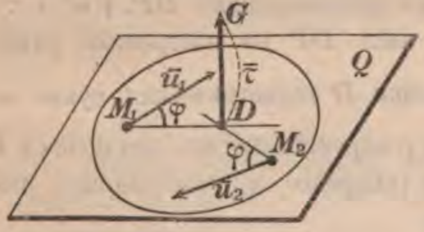
Принявъ центръ ускореній плоской фигуры въ данный моментъ за полюсъ фигуры въ тотъ же моментъ, мы приходимъ къ равенству:

$$\overline{u} = \overline{\omega^2 r_D} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_D$$

т. е. ускореніе $\overline{u}$ всякой точки M плоской, неизмѣняемой фигуры, движущейся въ ея плоскости, въ каждый моментъ будетъ геометрическою суммою осестремительнаго и вращательнаго ея ускореній, или **полнымъ вращательнымъ ускореніемъ** по отношенію къ **мгновенному центру D ускореній** въ тотъ же моментъ движущейся плоской фигуры, принятому за полюсъ фигуры въ этотъ моментъ; слѣдовательно **величина** ускоренія $\overline{u}$ такой точки M выражается произведеніемъ:

$$r_D\sqrt{\omega^4 + \tau^2}\,,$$

гдѣ r_D есть разстояніе точки M до мгновеннаго центра ускореній, **направленіе** же $\overline{u}$ составляетъ съ направленіемъ MD уголъ φ, причемъ $tg\varphi = \frac{\tau}{\omega^2}$, *т. е. ускоренія въ данный моментъ* **всѣхъ** *точекъ плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, наклонены подъ* **однимъ и тѣмъ** *же острымъ угломъ* $\varphi = arctg\frac{\tau}{\omega^2}$ *къ радіусамъ, соединяющимъ эти точки съ* **мгновеннымъ центромъ ускореній** *D фигуры въ тотъ же моментъ*; поэтому для построенія мгновеннаго центра ускореній плоской фигуры въ данный моментъ достаточно провести въ этотъ моментъ (черт. 64) черезъ двѣ точки M_1, M_2 плоской фигуры прямыя наклоненыя подъ указаннымъ острымъ угломъ $\varphi = arc\,tg\frac{\tau}{\omega^2}$ къ ускореніямъ $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ этихъ точекъ, притомъ такъ, чтобы, вставъ въ точкѣ пересѣченія D этихъ прямыхъ по направленію углового ускоренія $\overline{\tau}$ въ этотъ моментъ, мы видѣли бы ускоренія выбранныхъ точекъ направленными **слѣва направо**; въ такомъ случаѣ *точка D будетъ* **мгновеннымъ центромъ ускореній** *движущейся плоскости фигуры* **въ данный моментъ.**



Черт. 64.

Мгн. центр ~~скорости стр~~ 91.
Зависимости между ними стр 99

V. Общій случай движенія твердаго тѣла.

§ 1. Первая теорема о перемѣщеніи твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

Всякій случай движенія твердаго тѣла, не подходящій подъ одинъ изъ разобранныхъ нами четырехъ случаевъ, мы будемъ называть **общимъ случаемъ** движенія твердаго тѣла.

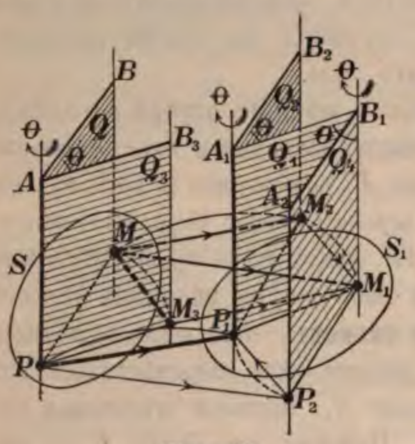
Всякое перемѣщеніе твердаго тѣла въ **общемъ случаѣ** *его движенія можетъ быть воспроизведено* **поступательнымъ** *перемѣщеніемъ тѣла вмѣстѣ съ одною изъ его точекъ P, называемой въ такомъ случаѣ* **полюсомъ** *тѣла, и* **угловымъ** *перемѣщеніемъ тѣла на нѣкоторый уголъ θ вокругъ нѣкоторой оси AP, проходящей черезъ выбранный полюсъ P, причемъ* **ни направленіе** *этой оси,* **ни величина** *угловаго перемѣщенія тѣла вокругъ нея* **не зависятъ** *отъ выбора полюса.*

Дѣйствительно, положимъ, что твердое тѣло перемѣстилось изъ положенія S (черт. 65) въ положеніе S_1, причемъ нѣкоторая его точка P перешла въ положеніе P_1. Примемъ эту точку P за полюсъ твердаго тѣла, т. е. предположимъ, что тѣло сначала перемѣстилось поступательно вмѣстѣ съ этимъ полюсомъ P; въ такомъ случаѣ всѣ точки тѣла опишутъ дуги равныя и параллельныя дугѣ $\widehat{PP_1}$ и точка P займетъ требуемое положеніе P_1, послѣ чего, какъ мы знаемъ, тѣло можетъ быть приведено въ положеніе S_1 угловымъ перемѣщеніемъ его на нѣкоторый уголъ θ около нѣкоторой оси P_1A_1, проходящей черезъ точку P_1; при этомъ угловомъ перемѣщеніи всѣ точки оси P_1A_1 останутся неподвижными и линія P_1A_1 будетъ параллельна ея положенію PA при первомъ положеніи твердаго тѣла.

Взявъ нѣкоторую точку M твердаго тѣла и проведя черезъ нее прямую MB параллельную PA, мы видимъ, что послѣ поступательнаго перемѣщенія тѣла вмѣстѣ съ полюсомъ P точка M займетъ нѣкоторое положеніе M_2, причемъ $\overline{MM_2} = \overline{PP_1}$; прямыя PA и MB совмѣстятся соотвѣтственно съ параллельными имъ прямыми P_1A_1 и M_2B_2, и плоскость Q, заключающая эти прямыя, перейдетъ въ положеніе Q_2 параллельное Q; наконецъ послѣ угловаго перемѣщенія тѣла вокругъ оси P_1A_1 на уголъ θ, точка M займетъ положе-

ніе M_1, прямая M_2B_2, будучи параллельна оси вращенія P_1A_1, займетъ положеніе M_1B_1 параллельное MB и плоскость Q_2 перейдетъ въ положеніе Q_1.

Примемъ теперь точку M за полюсъ тѣла; въ такомъ случаѣ при поступательномъ перемѣщеніи тѣла вмѣстѣ съ этимъ новымъ полюсомъ точка M снова перейдетъ въ требуемое положеніе M_1, прямая MB совмѣстится съ прямою M_1B_1 и плоскость Q займетъ нѣкоторое положеніе Q_4 параллельное Q; такимъ образомъ плоскости Q_2 и Q_4, будучи параллельны плоскости Q, будутъ параллельны между собою, и потому внутренніе накрестъ лежащіе двугранные углы, образованные плоскостью Q_1 съ плоскостями Q_2 и Q_4 будутъ равны; слѣдовательно, повернувъ затѣмъ твердое тѣло на уголъ θ около оси M_1B_1 параллельной P_1A_1,



Черт. 65.

мы видимъ, что плоскость Q_4, т. е. неизмѣнно связанная съ тѣломъ плоскость Q, снова займетъ требуемое положеніе Q_1, а потому и само тѣло придетъ въ требуемое положеніе S_1, такъ какъ положенія неизмѣнно связанныхъ съ твердымъ тѣломъ: точки M, прямой MB, проходящей черезъ эту точку, и плоскости Q, проходящей черезъ эту прямую, опредѣляютъ положеніе **самого** твердаго тѣла.

Замѣтимъ наконецъ, что *можно было бы* **сначала** *повернуть твердое тѣло около оси PA на уголъ θ и* **затѣмъ** *сообщить ему поступательное перемѣщеніе вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P, причемъ тѣло снова придетъ въ требуемое положеніе S_1.*

Дѣйствительно послѣ углового перемѣщенія твердаго тѣла на уголъ θ около оси PA, неизмѣнно связанная съ тѣломъ, плоскость Q займетъ положеніе Q_3, параллельное плоскости Q_1 и точка M перейдетъ въ положеніе M_3; причемъ отрѣзокъ PM_3 будетъ равенъ и параллеленъ отрѣзку P_1M_1; слѣдовательно:

$$\overline{M_3M_1} = \overline{PP}_1,$$

и потому, сообщивъ затѣмъ твердому тѣлу поступательное перемѣщеніе вмѣстѣ съ полюсомъ P, мы видимъ, что неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ: точка P, прямая PA и плоскость Q займутъ соотвѣтственно требуемыя положенія P_1, P_1A_1 и Q_1, что, какъ мы уже замѣтили, опредѣляетъ положеніе самого твердаго тѣла.

Итакъ *каждому перемѣщенію твердаго тѣла въ* **общемъ случаѣ** *соотвѣтствуетъ нѣкоторое* **угловое** *перемѣщеніе тѣла* θ *вокругъ нѣкоторой, неизмѣнно съ нимъ связанной, оси* PA, *проходящей черезъ выбранный полюсъ* P, *причемъ* **ни величина** *этого углового перемѣщенія* θ, **ни направленіе** *оси* PA **не зависятъ отъ выбора полюса** P; кромѣ того (черт. 65).

$$\overline{MM}_1 = \overline{MM}_2 + \overline{M_2M}_1 = \overline{PP}_1 + \overline{MM}_3,$$

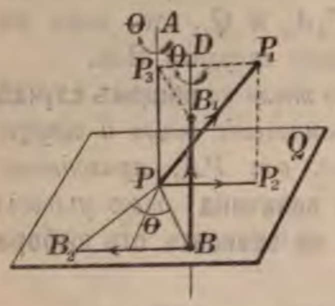
т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{MM}_1$ всякой точки M движущагося твердаго тѣла есть, вообще говоря, геометрическая сумма **двухъ** перемѣщеній: **поступательнаго перемѣщенія** $\overline{PP}_1$ геометрически равнаго вектору перемѣщенія выбраннаго полюса P и вектора **вращательнаго перемѣщенія** $\overline{MM}_3$ геометрически равнаго вектору перемѣщенія той же точки M при угловомъ перемѣщеніи твердаго тѣла на соотвѣтствующій уголъ θ вокругъ оси PA, проходящей черезъ выбранный полюсъ P, предполагаемый **неподвижнымъ**.

§ 2. Вторая теорема о перемѣщеніи твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

Всякое перемѣщеніе твердаго тѣла въ **общемъ случаѣ** *его движенія можетъ быть воспроизведено, такъ называемымъ* **винтовымъ перемѣщеніемъ** *тѣла вокругъ нѣкоторой* **неподвижной** *оси, т. е.* **угловымъ** *перемѣщеніемъ твердаго тѣла вокругъ нѣкоторой* **неподвижной** *оси и поступательнымъ перемѣщеніемъ, или* **скольженіемъ** *тѣла вдоль* **той же** *оси.*

Дѣйствительно, по предъидущей теоремѣ мы знаемъ, что всякое перемѣщеніе твердаго тѣла въ пространствѣ опредѣляется перемѣщеніемъ $\overline{PP}_1$ выбраннаго полюса P и величиною углового перемѣщенія θ вокругъ нѣкоторой оси PA, проходящей черезъ этотъ полюсъ, причемъ ни направленіе этой оси PA, ни величина углового перемѣщенія вокругъ нея θ не зависятъ отъ выбора полюса P.

Проведемъ въ тѣлѣ черезъ выбранный полюсъ P (черт. 66) плоскость Q перпендикулярную къ оси PA и спроектируемъ точку P_1 на эту плоскость и на эту ось.



Черт. 66.

Возставивъ затѣмъ изъ точки P въ плоскости Q (вправо относительно наблюдателя, стоящаго по направленію оси PA и обращеннаго лицомъ къ перемѣщенію $\overline{PP}_1$ полюса P) перпендикуляръ къ проекціи PP_2 этого перемѣщенія на плоскость Q, построимъ на этомъ перпендикулярѣ какъ на высотѣ равнобедренный треугольникъ BPB_2 съ даннымъ угломъ θ при вершинѣ P и съ основаніемъ $BB_2 = PP_2$; въ такомъ случаѣ мы получимъ нѣкоторую точку B твердаго тѣла, векторъ перемѣщенія которой BB_1 по предъидущей теоремѣ опредѣлится изъ равенства:

$$\overline{BB}_1 = \overline{PP}_1 + \overline{BB}_2$$

гдѣ $\overline{PP}_1$ есть векторъ **поступательнаго** перемѣщенія, а $\overline{BB}_2$ векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки B на уголъ θ вокругъ оси PA, предполагаемой неподвижною.

Но по построенію:

$$\overline{PP}_1 = \overline{PP}_3 + \overline{PP}_2 \quad \text{и} \quad \overline{BB}_2 = -\overline{PP}_2;$$

слѣдовательно:

$$\overline{BB}_1 = \overline{PP}_3$$

т. е. найденная точка B твердаго тѣла перемѣстится по линіи параллельной направленію оси PA, соотвѣтствующей данному перемѣщенію твердаго тѣла, и потому, принявъ эту точку B за новый полюсъ и проведя черезъ нее направленіе BD параллельное оси PA, мы видимъ, что данное перемѣщеніе твердаго тѣла можетъ быть воспроизведено поступательнымъ перемѣщеніемъ твердаго тѣла вмѣстѣ съ точкою B, т. е. **скольженіемъ** тѣла на векторъ $\overline{BB}_1$ вдоль оси BD и угловымъ перемѣщеніемъ тѣла вокругъ той же оси на уголъ θ; другими словами—опредѣленнымъ **винтовымъ перемѣщеніемъ** тѣла вокругъ оси BD, поэтому такую ось BD называютъ **винтовою осью даннаго перемѣщенія твердаго тѣла**, причемъ

ясно, что *всѣ точки твердаго тѣла совпадающія съ* **винтовою осью** *даннаго его перемѣщенія совершаютъ равныя и одинаково направленныя перемѣщенія вдоль этой оси, т. е. перемѣщенія геометрически равныя* **скольженію** $\overline{BB_1}$ *твердаго тѣла вдоль* **винтовой оси;** *тому же скольженію равны* **проекціи** *векторовъ перемѣщеній всѣхъ остальныхъ точекъ твердаго тѣла на* **винтовую ось**, такъ какъ векторъ перемѣщенія каждой точки P твердаго тѣла есть геометрическая сумма ея **поступательнаго** перемѣщенія $\overline{PP_3}$ геометрически равнаго перемѣщенію $\overline{BB_1}$ точки B, принятой за полюсъ и вектора **вращательнаго** перемѣщенія $\overline{PP_2}$ относительно этого полюса B, причемъ послѣдній векторъ **перпендикуляренъ** къ винтовой оси BD; слѣдовательно его проекція на эту ось равна **нулю**.

Наконецъ ясно, что *перемѣщенія всѣхъ точекъ твердаго тѣла, лежащихъ на прямой* PA, **параллельной винтовой оси** *даннаго перемѣщенія*, **геометрически равны**.

§ 3. Средняя винтовая ось, средняя угловая скорость и средняя скорость скольженія твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

Раздѣливъ время движенія твердаго тѣла на ничтожно малые элементы Δt, мы знаемъ, что каждому такому элементу времени соотвѣтствуетъ нѣкоторое ничтожно-малое перемѣщеніе тѣла, которое по доказанной теоремѣ можно воспроизвести **винтовымъ перемѣщеніемъ** тѣла около нѣкоторой **неподвижной** оси.

Черт. 67.

Эту **неподвижную** ось $B_{\Delta t}\, D_{\Delta t}$ (черт. 67) мы будемъ называть **среднею винтовою осью** тѣла за данный промежутокъ времени Δt, а отношенія

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$$

къ тому же промежутку времени Δt, соотвѣтствующихъ ему углового перемѣщенія твердаго тѣла $\Delta\theta$ и скольженія $\Delta\sigma$ твердаго тѣла вдоль этой оси мы назовемъ соотвѣтственно **среднею угловою скоростью и среднею скоростью скольженія** тѣла за тотъ же промежутокъ времени Δt, причемъ подъ **направленіемъ** средней винтовой

товой оси $B_{\Delta t}\ D_{\Delta t}$ мы будемъ подразумѣвать то ея направленіе, относительно котораго угловое перемѣщеніе $\Delta\theta$ твердаго тѣла совершается **слѣва направо**.

Замѣнивъ дѣйствительное движеніе твердаго тѣла въ теченіи каждаго промежутка времени Δt равномѣрнымъ вращеніемъ тѣла съ угловою скоростью $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ около средней винтовой оси и равномѣрнымъ скольженіемъ тѣла вдоль этой оси со скоростью равною средней скорости скольженія тѣла $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$ за тотъ же промежутокъ времени, мы знаемъ, что по истеченіи каждаго такого промежутка времени Δt тѣло будетъ занимать въ пространствѣ положеніе, совпадающее съ положеніемъ его въ тотъ же моментъ въ дѣйствительномъ его движеніи.

Съ этой точки зрѣнія *на всякое движеніе твердаго тѣла можно смотрѣть какъ на предѣлъ ряда послѣдовательныхъ* **равномѣрныхъ, винтовыхъ** *движеній тѣла вокругъ соотвѣтствующихъ этому движенію* **среднихъ винтовыхъ осей.**

Примѣчаніе. Здѣсь для общности формулировки на поступательное движеніе твердаго тѣла мы смотримъ, какъ на **винтовое** движеніе, **обладающее лишь скольженіемъ**, а на движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, вокругъ неподвижной точки и параллельно неподвижной плоскости— какъ на **винтовыя** движенія, **необладающія скольженіемъ**.

§ 4. Мгновенная винтовая ось, угловая скорость и скорость скольженія движущагося твердаго тѣла въ данный моментъ. Значеніе этихъ понятій.

Предѣльное положеніе (черт. 68) *BD средней винтовой оси* $B_{\Delta t}\ D_{\Delta t}$ *движущагося твердаго тѣла за безконечно малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *называется* **мгновенною винтовою осью** *твердаго тѣла въ данный моментъ;* предѣлы же средней угловой скорости и скорости скольженія тѣла за такой промежутокъ времени Δt, т. е.

$$\text{пред. } \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega \text{ и пред. } \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = v_\sigma$$

носятъ названія **величинъ угловой скорости и скорости скольженія** твердаго тѣла **въ данный моментъ**, причемъ угловую скорость

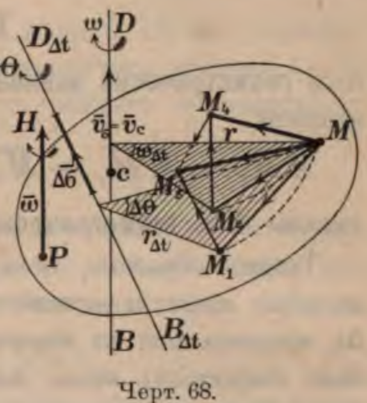
$\overline{\omega}$ твердаго тѣла въ данный моментъ откладываютъ отъ выбраннаго полюса P и приписываютъ ей **направленіе** параллельное и одинаково направленное съ направленіемъ мгновенной винтовой оси BD твердаго тѣла въ этотъ моментъ, а скорость скольженія

$$\overline{v}_\sigma = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}$$

откладываютъ вдоль той же мгновенной винтовой оси BD, отъ произвольной ея точки c, притомъ въ сторону скольженія $\overline{\Delta\sigma}$ твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t.

Выяснимъ значеніе этихъ понятій.

Мы знаемъ, что дѣйствительное перемѣщеніе твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, можетъ быть воспроизведено (черт. 68) угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на уголъ $\Delta\theta$ около средней винтовой оси $B_{\Delta t}\,D_{\Delta t}$ и скольженіемъ тѣла $\overline{\Delta\sigma}$ вдоль этой оси; слѣдовательно векторъ перемѣщеніе $\overline{MM_3}$ всякой точки M твердаго тѣла за этотъ промежутокъ времени Δt удовлетворяетъ равенству:



Черт. 68.

$$\overline{MM_3} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_3},$$

гдѣ $\overline{MM_1}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки M вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}$ $D_{\Delta t}$, а векторъ $\overline{M_1M_3} = \overline{\Delta\sigma}$ есть векторъ **скольженія** тѣла за тотъ же промежутокъ времени Δt вдоль той же средней винтовой оси $B_{\Delta t}\,D_{\Delta t}$.

Замѣнимъ теперь дѣйствительное движеніе твердаго тѣла въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени Δt **равномѣрнымъ винтовымъ** движеніемъ тѣла вокругъ его **мгновенной винтовой** оси BD въ данный моментъ съ угловою скоростью и со скоростью скольженія, равными соотвѣтственно угловой скорости $\overline{\omega}$ и скорости скольженія $\overline{v}_\sigma$ твердаго тѣла въ данный моментъ; въ такомъ случаѣ по истеченіи промежутка времени Δt тѣло не совмѣстится съ его положеніемъ въ тотъ же моментъ $t_1 = t + \Delta t$ въ его дѣйствительномъ движеніи

и точка M займетъ нѣкоторое положенie M_4, причемъ

$$\overline{MM_4} = \overline{MM_2} + \overline{M_2M_4},$$

гдѣ векторъ $\overline{MM_2}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки M въ этомъ **воображаемомъ** движенiи вокругъ мгновенной винтовой оси, а векторъ $\overline{M_2M_4} = \overline{v_\sigma}\,\Delta t$ есть векторъ **скольженія** тѣла въ томъ же движенiи вдоль той же мгновенной винтовой оси BD. Но,

$$\overline{v_\sigma} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}\ ;\ \text{слѣдовательно}\ \overline{\Delta\sigma} = \overline{v_\sigma}\,\Delta t + \overline{\varepsilon}\Delta t,$$

т. е. произведенie $\overline{v_\sigma}\,\Delta t$ **геометрически эквивалентно** вектору скольженія $\overline{\Delta\sigma}$ твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt; кромѣ того, повторивъ разсужденія приведенныя нами въ случаѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки (см. III § 4), мы убѣдимся, что векторы вращательныхъ перемѣщенiй

$$\overline{MM_2}\ \text{и}\ \overline{MM_1}$$

тоже **геометрически эквивалентны**; слѣдовательно и векторы перемѣщенiй:

$$\overline{MM_3} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_3}\ \text{и}\ \overline{MM_4} = \overline{MM_2} + \overline{M_2M_4}$$

должны быть **геометрически эквивалентны**.

Такимъ образомъ, *если замѣнить дѣйствительное движенie твердаго тѣла въ теченie безконечно-малаго промежутка времени* Δt, *прилегающаго къ данному моменту* t, **равномѣрнымъ** *винтовымъ движенiемъ тѣла вокругъ его* **мгновенной винтовой** *оси съ угловою скоростью равною его угловой скорости* $\overline{\omega}$ *въ данный моментъ и со скоростью скольженія равною скорости скольженія* $\overline{v_\sigma}$ *тѣла въ тотъ же моментъ, то по истеченiи этого промежутка времени* Δt *перемѣщенія всѣхъ точекъ твердаго тѣла въ такомъ* **воображаемомъ** *движенiи будутъ* **геометрически эквивалентны** *перемѣщенiямъ тѣхъ же точекъ по истеченiи того же промежутка времени въ* **дѣйствительномъ** *движенiи твердаго тѣла.*

Слѣдовательно перемѣщенія за промежутокъ времени Δt, прилегающiй къ данному моменту t, всѣхъ точекъ твердаго тѣла, совпадающихъ съ его мгновенною винтовою осью въ этотъ моментъ, геометрически эквивалентны вектору $\overline{v_\sigma}\,\Delta t$, и потому скорости всѣхъ

такихъ точекъ геометрически равны **скорости скольженія**

$$\bar{v}_\sigma = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}$$

твердаго тѣла въ данный моментъ, т. е. *скорости въ данный моментъ всѣхъ точекъ твердаго тѣла, совпадающихъ съ мгновенною винтовою осью тѣла въ этотъ моментъ, направлены вдоль этой винтовой оси и равны* **скорости скольженія** $\bar{v}_\sigma = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}$ *твердаго тѣла въ тотъ же моментъ.*

Наоборотъ, скорость **скольженія** $\bar{v}_\sigma$ *твердаго тѣла въ данный моментъ геометрически равна скорости* $\bar{v}_c$ *одной изъ точекъ с мгновенной винтовой оси тѣла въ этотъ моментъ.*

§ 5. Воспроизведеніе общаго случая движенія твердаго тѣла.

Для болѣе нагляднаго представленія общаго случая движенія твердаго тѣла возьмемъ опредѣленный промежутокъ времени $t - t_0$ и раздѣлимъ его на n послѣдовательныхъ равныхъ промежутковъ:

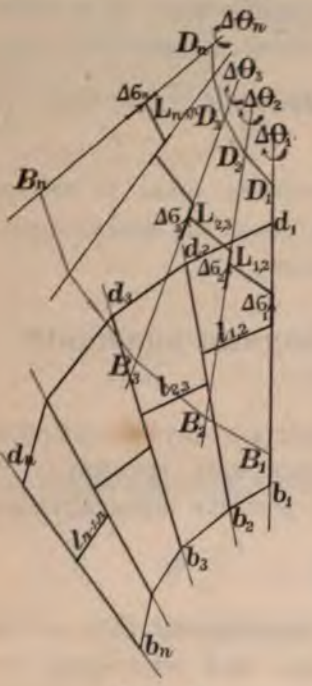
$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \ldots.\ \Delta t_n = \frac{t - t_0}{n};$$

въ такомъ случаѣ **среднія винтовые оси** перемѣщеній тѣла за эти промежутки времени образуютъ въ твердомъ тѣлѣ нѣкоторую неизмѣнно съ нимъ связанную (черт. 69) систему прямыхъ:

$$b_1d_1,\ b_2d_2,\ b_3d_3\ \ldots.\ b_nd_n,$$

причемъ положеніе твердаго тѣла въ концѣ перваго промежутка времени можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta_1$ около соотвѣтствующей средней винтовой оси b_1d_1 и скольженіемъ тѣла вдоль этой оси на нѣкоторую величину $\Delta\sigma_1$; при этомъ вмѣстѣ съ тѣломъ перемѣстится и неизмѣнно съ нимъ связанная система среднихъ винтовыхъ осей и ось b_2d_2 займетъ въ пространствѣ нѣкоторое положеніе B_2D_2, причемъ положеніе твердаго тѣла въ концѣ второго промежутка времени можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на уголъ $\Delta\theta_2$ около неподвижной оси B_2D_2, съ которою совмѣстилась **въ пространствѣ** средняя винтовая ось b_2d_2 и скольженіемъ тѣла вдоль

этой оси B_2D_2 на величину $\Delta\sigma_2$ и т. д... положеніе твердаго тѣла въ концѣ послѣдняго промежутка времени Δt_n, т. е. въ моментъ t, можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на уголъ $\Delta\theta_n$ около средней оси B_nD_n, съ которою совмѣстилась въ концѣ предъидущаго промежутка времени Δt_n, средняя ось b_nd_n, и скольженіемъ вдоль этой оси на величину $\Delta\sigma_n$.



Черт. 69.

Такимъ образомъ при всякомъ движеніи твердаго тѣла система среднихъ винтовыхъ осей: b_1d_1, b_2d_2, ... b_nd_n этого движенія, будучи неизмѣнно связана съ твердымъ тѣломъ, участвуетъ въ его движеніи, и потому мы назовемъ ее **подвижною** системою среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла; послѣдовательныя же положенія этихъ осей въ пространствѣ образуютъ нѣкоторую совокупность неподвижныхъ прямыхъ линій: B_1D_1, B_2D_2, ... B_nD_n, которую мы назовемъ **неподвижною** системою среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла, причемъ послѣдовательныя перемѣщенія движущагося твердаго тѣла могутъ быть воспроизведены **угловыми перемѣщеніями**, соединенными **со скольженіями** подвижной системы винтовыхъ осей около послѣдовательныхъ линій неподвижной системы винтовыхъ осей, притомъ такъ, что въ теченіе каждаго промежутка времени обѣ эти системы осей имѣютъ **общую** образующую и въ концѣ каждаго промежутка времени **двѣ** послѣдовательныя ихъ образующія приходятъ въ совпаденіе; слѣдовательно приходятъ въ совпаденіе и **кратчайшія разстоянія:**

$$l_{1,2},\ l_{2,3},\ \ldots\ l_{n-1,n} \quad \text{и} \quad L_{1,2},\ L_{2,3},\ \ldots\ L_{n-1,n}$$

между послѣдовательными образующими подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей.

Станемъ теперь безпредѣльно увеличивать число дѣленій n дан-

наго промежутка времени $t - t_0$; въ такомъ случаѣ подвижная и неподвижная системы среднихъ винтовыхъ осей обращаются (черт. 70) въ нѣкоторыя подвижную и неподвижную **линейчатыя** поверхности $b_0 d_0\ bd$, и $B_0 D_0\ BD$, называемыя соотвѣтственно **подвижнымъ** и **неподвижнымъ винтовыми аксоидами** даннаго движенія твердаго тѣла; другими словами **подвижной винтовой аксоидъ** *даннаго движенія твердаго тѣла есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей тѣла* **въ самомъ тѣлѣ, неподвижный же винтовой аксоидъ** *осей есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей* **въ пространствѣ**.

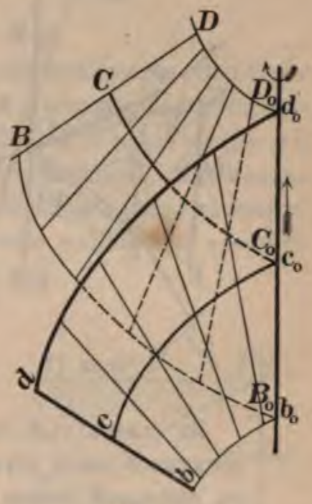
Замѣтимъ наконецъ, что кривыя линіи $\widehat{c_0 c}$ и $\widehat{C_0 C}$, служащія предѣлами ломаныхъ линій

$$l_{1,2},\ l_{2,3},\ \ldots.\ l_{n-1,n}$$

и

$$L_{1,2},\ L_{2,3},\ \ldots.\ L_{n-1,n}$$

кратчайшихъ разстояній подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла, называются **линіями съуженія** соотвѣтствующихъ имъ **линейчатыхъ** поверхностей, т. е. подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ даннаго движенія твердаго тѣла, а точка пересѣченія C линіи съуженія $\widehat{C_0 C}$ съ образующею BD данной линейчатой поверхности носитъ названіе **центральной точки** этой образующей.



Черт. 70.

Подвижной винтовой аксоидъ даннаго движенія твердаго тѣла, будучи неизмѣнно связанъ съ движущимся тѣломъ, участвуетъ въ его движеніи, и движеніе это по отношенію къ **неподвижному винтовому аксоиду** удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ.

1) *Въ каждый моментъ t подвижной и неподвижный винтовые аксоиды имѣютъ* **общую** *образующую, совпадающую съ предѣльнымъ положеніемъ средней винтовой оси тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t.*

Это свойство очевидно изъ самихъ опредѣленій подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ, какъ предѣловъ, подвижной и неподвижной си-

стемъ среднихъ винтовыхъ осей, имѣющихъ въ теченіи каждаго промежутка времени Δt общую образующую.

2) *Линіи* **съуженія** *подвижного и неподвижнаго аксоидовъ въ каждый моментъ имѣютъ* **общую** *точку, причемъ въ этой точкѣ онѣ, вообще говоря,* **пересѣкаются**, *т. е. касательныя проведенныя къ нимъ въ общей точкѣ составляютъ нѣкоторый* **конечный** *уголъ.* Что линіи съуженія (черт. 71) $\widehat{c_0c_1}$ и $\widehat{C_0C_1}$ подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ даннаго движенія твердаго тѣла въ каждый данный моментъ имѣютъ **общую** точку; это ясно изъ опредѣленія линій съуженія того и другого аксоидовъ, какъ предѣловъ ломанныхъ линій, образованныхъ послѣдовательно совмѣщающимися кратчайшими разстояніями подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла. Наконецъ нетрудно убѣдиться, что въ ихъ общей въ данный моментъ точкѣ (c, C) линіи съуженія, вообще говоря, **пересѣкаются**, т. е. касательныя ck и CK проведенныя къ нимъ въ этой точкѣ составляютъ нѣкоторый **конечный** уголъ.

Черт. 71.

Въ самомъ дѣлѣ (черт. 71), въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ нѣкоторая точка c_1 подвижной линіи съуженія, безконечно близкая къ точкѣ c, совмѣстится съ нѣкоторою точкою C_1 неподвижной линіи съуженія, но мы знаемъ, что перемѣщеніе твердаго тѣла, а слѣдовательно и неизмѣнно съ нимъ связанной линіи съуженія $\widehat{cc_1}$ подвижного винтового аксоида твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, можно воспроизвести винтовымъ перемѣщеніемъ тѣла вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}D_{\Delta t}$, соотвѣтствующей данному промежутку времени Δt, причемъ

$$\overline{CC_1} = \overline{cc_1} + \overline{c_1c_2} + \overline{c_2C_1},$$

гдѣ $\overline{c_1c_2}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки c_1 вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}D_{\Delta t}$, соотвѣтствующей данному промежутку времени Δt, а $\overline{c_2C_1} = \overline{\Delta\sigma}$ есть векторъ **скольженія** тѣла вдоль той-же средней винтовой оси.

Замѣтивъ наконецъ, что векторъ вращательнаго перемѣщенія $\overline{c_1c_2}$ есть безконечно-малый векторъ **высшаго** порядка, раздѣлимъ предъидущее равенство на Δt и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta t = O$; въ такомъ случаѣ мы

придемъ къ равенству:

$$\overline{V_C} = \overline{V_c} + \overline{v_\sigma}$$

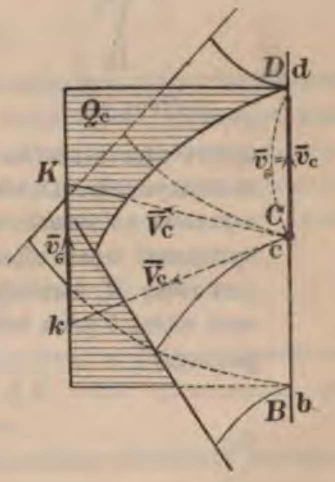
гдѣ $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$ суть соотвѣтственно скорости перемѣщеній по подвижной и неподвижной линіямъ съуженія ихъ точки пересѣченія (c, C), а $\overline{v_\sigma} =$ пред. $\frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}$ есть скорость скольженія твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ, т. е. $\overline{v_\sigma} = \overline{v_c}$, гдѣ $\overline{v_c}$ есть скорость одной изъ точекъ c мгновенной винтовой оси bd твердаго тѣла въ данный моментъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{V_C} - \overline{V_c} = \overline{v_\sigma} = \overline{v_c},$$

т. е. $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$, вообще говоря, не совпадаютъ; другими словами эти векторы составляютъ между собою нѣкоторый **конечный** уголъ; но направленія скоростей $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$ совпадаютъ съ касательными CK, ck въ общей точкѣ (c, C) подвижной и неподвижной линій съуженія винтовыхъ аксоидовъ; слѣдовательно касательныя эти тоже, вообще говоря, составляютъ между собою нѣкоторый **конечный** уголъ; другими словами *линіи съуженія подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ въ ихъ общей точкѣ* (c, C) **пересѣкаются.**

3) *Подвижной и неподвижный винтовые аксоиды во* **всѣхъ** *точкахъ ихъ* **общей** *въ данный моментъ образующей имѣютъ* **общія** *касательныя плоскости, т. е. подвижной и неподвижный винтовые аксоиды* **касательны** *другъ къ другу* **вдоль всей** *ихъ общей въ данный моментъ образующей.*



Черт. 72.

Дѣйствительно, принявъ во вниманіе (черт. 72), что скорость скольженія $\overline{v_\sigma}$ твердаго тѣла въ данный моментъ направлена по его мгновенной винтовой оси BD въ этотъ моментъ, мы приходимъ къ заключенію, что векторы $\overline{V_c}$ и $\overline{V_C}$; другими словами направленія CK, ck касательныхъ къ подвижной и неподвижной линіямъ съуженія въ ихъ точкѣ пересѣченія (c, C) лежатъ въ одной плоскости Q_c, проходящей черезъ общую въ данный моментъ образующую (bd, BD) подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ и потому плоскость Q_c будетъ **касательна** въ точкѣ (c, C) къ тому и другому винтовымъ аксоидамъ.

Такимъ образомъ мы доказали, что подвижной и неподвижный винтовые аксоиды касательны другъ къ другу въ центральной точкѣ (c, C) ихъ общей въ данный моментъ образующей, т. е. въ точкѣ (c, C) пересѣченія въ данный моментъ ихъ линій съуженія. Чтобы доказать теперь что эти линейчатыя поверхности будутъ касательны другъ къ другу во всѣхъ точкахъ ихъ общей образующей (bd, BD) намъ придется предварительно изслѣдовать расположеніе плоскостей касательныхъ къ данной линейчатой поверхности вдоль одной и той-же ея образующей.

Черт. 73.

Съ этою цѣлью возьмемъ нѣкоторую точку M (черт. 73) на образующей BD данной линейчатой поверхности въ разстояніи x отъ центральной точки C этой образующей и, проведя черезъ точку M плоскость перпендикулярную къ этой образующей, замѣтимъ точки пересѣченія M_1, m проведенной плоскости съ безконечно близкою образующею $D_1 B_1$ и съ линіей $K_1 m$, проведенной параллельно данной образующей BD черезъ точку K_1 кратчайшаго разстоянія KK_1 между этими образующими BD и $B_1 D_1$; въ такомъ случаѣ, обозначивъ соотвѣтственно черезъ Q_C и Q_M предѣльныя положенія плоскостей BDK_1 и BDM_1, мы знаемъ, что эти плоскости Q_C и Q_M будутъ касательны къ линейчатой поверхности въ точкахъ C и M данной ея образующей BD, ибо плоскость касательная къ данной линейчатой поверхности въ данной ея точкѣ M есть предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ образующую BD, соотвѣтствующую этой точкѣ M и черезъ точку M_1 безконечно близкую къ той-же точкѣ M, и потому, обозначивъ черезъ θ уголъ между этими плоскостями Q_C и Q_M, мы приходимъ къ равенству

$$\theta = \text{пред.} \angle mMM_1.$$

Но

$$tg\,(mMM_1) = \frac{M_1 m}{Mm},$$

причемъ по построенію:

$$M_1 m = K_1 M_1 tg\,(M_1 K_1 m) = K_1 M_1\, tg\,(BD, B_1 D_1) \text{ и } Mm = KK_1;$$

слѣдовательно

$$tg\,\theta = \text{пред.}\ \frac{K_1 M_1\, tg\,(BD, B_1 D_1)}{KK_1} = \text{пред.}\, K_1 M_1 .\ \text{пред.}\ \frac{tg\,(BD, B_1 D_1)}{KK_1} =$$

$$= CM\ \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1 D_1)}{KK_1} = CM . \chi = x . \chi,$$

гдѣ
$$\chi = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1}.$$

Этотъ предѣлъ отношенія χ угла между безконечно близкими образующими данной линейчатой поверхности къ кратчайшему разстоянію между тѣми-же образующими, когда образующая B_1D_1 стремится совмѣститься съ данною образующею BD называется **параметромъ** данной линейчатой поверхности, **вдоль** этой образующей.

Взявъ наконецъ точку N въ разстояніи x по другую сторону центральной точки C данной образующей BD и повторивъ тѣже разсужденія, мы убѣдимся, что предѣльное положеніе Q_N плоскости BDN_1, т. е. плоскость касательная къ линейчатой поверхности въ этой точкѣ N, будетъ **симметрична** плоскости Q_M относительно плоскости Q_C и потому, условившись разстояніямъ точекъ M и N, находящимся по различныя стороны центральной точки C данной образующей BD, приписывать **различные** знаки, мы приходимъ къ равенству:
$$tg\,\theta = x\chi,$$
справедливому по величинѣ и по знаку, если только условиться угламъ отклоненія θ приписывать знакъ совпадающій со знакомъ x.

Итакъ
$$tg\,\theta = \chi x,$$
т. е. углы отклоненія θ касательныхъ плоскостей вдоль одной и той-же образующей данной линейчатой поверхности **пропорціональны разстоянію** *x точки касанія M отъ* **центральной** *точки C разсматриваемой образующей, причемъ коэффиціентъ пропорціональности равенъ* **параметру** *χ данной линейчатой поверхности* **вдоль** *этой образующей, т. е.*
$$\chi = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1},$$
гдѣ (BD, B_1D_1) есть уголъ между образующею BD и безконечно близкою къ ней образующею B_1D_1, а KK_1 есть кратчайшее разстояніе между тѣми-же образующими.

Возвращаясь снова къ подвижному и неподвижному винтовымъ аксоидамъ даннаго движенія твердаго тѣла, нетрудно убѣдиться, что параметры *этихъ линейчатыхъ поверхностей будутъ соотвѣтственно* равны. Дѣйствительно по истеченіи промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t (черт. 74) образующая b_1d_1 подвижного винтового аксоида совмѣстится съ соотвѣтствующею образующею B_1D_1 неподвижнаго винтового аксоида; съ другой стороны изъ предыдущаго параграфа мы знаемъ, что сообщивъ твердому тѣлу нѣкоторое безконечно малое винтовое перемѣщеніе вокругъ его

и точка M займетъ нѣкоторое положеніе M_4, причемъ

$$\overline{MM_4} = \overline{MM_2} + \overline{M_2M_4},$$

гдѣ векторъ $\overline{MM_2}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки M въ этомъ **воображаемомъ** движеніи вокругъ мгновенной винтовой оси, а векторъ $\overline{M_2M_4} = \overline{v_\sigma}\,\Delta t$ есть векторъ **скольженія** тѣла въ томъ же движеніи вдоль той же мгновенной винтовой оси BD. Но,

$$\overline{v_\sigma} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}\ ;\ \text{слѣдовательно}\ \overline{\Delta\sigma} = \overline{v_\sigma}\,\Delta t + \overline{\varepsilon}\Delta t,$$

т. е. произведеніе $\overline{v_\sigma}\,\Delta t$ **геометрически эквивалентно** вектору скольженія $\overline{\Delta\sigma}$ твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt; кромѣ того, повторивъ разсужденія приведенныя нами въ случаѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки (см. III § 4), мы убѣдимся, что векторы вращательныхъ перемѣщеній

$$\overline{MM_2}\ \text{и}\ \overline{MM_1}$$

тоже **геометрически эквивалентны;** слѣдовательно и векторы перемѣщеній:

$$\overline{MM_3} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_3}\ \text{ и }\ \overline{MM_4} = \overline{MM_2} + \overline{M_2M_4}$$

должны быть **геометрически эквивалентны.**

Такимъ образомъ, *если замѣнить дѣйствительное движеніе твердаго тѣла въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени* Δt, *прилегающаго къ данному моменту* t, **равномѣрнымъ** *винтовымъ движеніемъ тѣла вокругъ его* **мгновенной винтовой** *оси съ угловою скоростью равною его угловой скорости* $\overline{\omega}$ *въ данный моментъ и со скоростью скольженія равною скорости скольженія* $\overline{v_\sigma}$ *тѣла въ тотъ же моментъ, то по истеченіи этого промежутка времени* Δt *перемѣщенія всѣхъ точекъ твердаго тѣла въ такомъ* **воображаемомъ** *движеніи будутъ* **геометрически эквивалентны** *перемѣщеніямъ тѣхъ же точекъ по истеченіи того же промежутка времени въ* **дѣйствительномъ** *движеніи твердаго тѣла.*

Слѣдовательно перемѣщенія за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, всѣхъ точекъ твердаго тѣла, совпадающихъ съ его мгновенною винтовою осью въ этотъ моментъ, геометрически эквивалентны вектору $\overline{v_\sigma}\,\Delta t$, и потому скорости всѣхъ

такихъ точекъ геометрически равны **скорости скольженія**

$$\overline{v}_\sigma = \text{пред.}\ \overline{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}$$

твердаго тѣла въ данный моментъ, т. е. *скорости въ данный моментъ всѣхъ точекъ твердаго тѣла, совпадающихъ съ мгновенною винтовою осью тѣла въ этотъ моментъ, направлены вдоль этой винтовой оси и равны* **скорости скольженія** $\overline{v}_\sigma = \text{пред.}\ \overline{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}$ *твердаго тѣла въ тотъ же моментъ.*

Наоборотъ, скорость **скольженія** $\overline{v}_\sigma$ *твердаго тѣла въ данный моментъ геометрически равна скорости* $\overline{v}_c$ *одной изъ точекъ с мгновенной винтовой оси тѣла въ этотъ моментъ.*

§ 5. Воспроизведеніе общаго случая движенія твердаго тѣла.

Для болѣе нагляднаго представленія общаго случая движенія твердаго тѣла возьмемъ опредѣленный промежутокъ времени $t - t_0$ и раздѣлимъ его на n послѣдовательныхъ равныхъ промежутковъ:

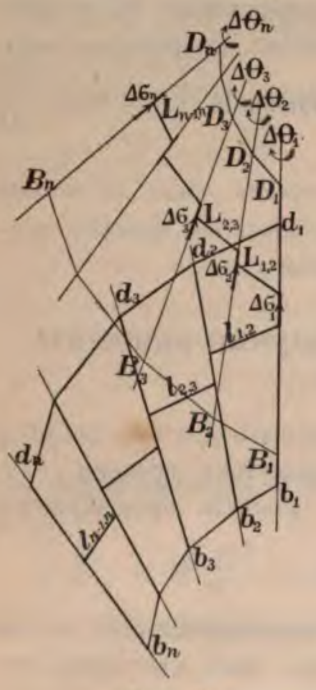
$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \ldots\ \Delta t_n = \frac{t - t_0}{n};$$

въ такомъ случаѣ **среднія винтовые оси** перемѣщеній тѣла за эти промежутки времени образуютъ въ твердомъ тѣлѣ нѣкоторую неизмѣнно съ нимъ связанную (черт. 69) систему прямыхъ:

$$b_1 d_1,\ b_2 d_2,\ b_3 d_3\ \ldots\ b_n d_n,$$

причемъ положеніе твердаго тѣла въ концѣ перваго промежутка времени можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta_1$ около соотвѣтствующей средней винтовой оси $b_1 d_1$ и скольженіемъ тѣла вдоль этой оси на нѣкоторую величину $\Delta\sigma_1$; при этомъ вмѣстѣ съ тѣломъ перемѣстится и неизмѣнно съ нимъ связанная система среднихъ винтовыхъ осей и ось $b_2 d_2$ займетъ въ пространствѣ нѣкоторое положеніе $B_2 D_2$, причемъ положеніе твердаго тѣла въ концѣ второго промежутка времени можетъ быть воспроизведено угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на уголъ $\Delta\theta_2$ около неподвижной оси $B_2 D_2$, съ которою совмѣстилась **въ пространствѣ** средняя винтовая ось $b_2 d_2$ и скольженіемъ тѣла вдоль

этой оси B_2D_2 на величину $\Delta\sigma_2$ и т. д... положеніе твердаго тѣла въ концѣ послѣдняго промежутка времени Δt_n, т. е. въ моментъ t, можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на уголъ $\Delta\theta_n$ около средней оси B_nD_n, съ которою совмѣстилась въ концѣ предъидущаго промежутка времени Δt_n, средняя ось b_nd_n, и скольженіемъ вдоль этой оси на величину $\Delta\sigma_n$.



Черт. 69.

Такимъ образомъ при всякомъ движеніи твердаго тѣла система среднихъ винтовыхъ осей: b_1d_1, b_2d_2, ... b_nd_n этого движенія, будучи неизмѣнно связана съ твердымъ тѣломъ, участвуетъ въ его движеніи, и потому мы назовемъ ее **подвижною** системою среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла; послѣдовательныя же положенія этихъ осей въ пространствѣ образуютъ нѣкоторую совокупность неподвижныхъ прямыхъ линій: B_1D_1, B_2D_2, ... B_nD_n, которую мы назовемъ **неподвижною** системою среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла, причемъ послѣдовательныя перемѣщенія движущагося твердаго тѣла могутъ быть воспроизведены **угловыми перемѣщеніями**, соединенными **со скольженіями** подвижной системы винтовыхъ осей около послѣдовательныхъ линій неподвижной системы винтовыхъ осей, притомъ такъ, что въ теченіе каждаго промежутка времени обѣ эти системы осей имѣютъ **общую** образующую и въ концѣ каждаго промежутка времени **двѣ** послѣдовательныя ихъ образующія приходятъ въ совпаденіе; слѣдовательно приходятъ въ совпаденіе и **кратчайшія разстоянія:**

$$l_{1,2},\ l_{2,3},\ \ldots.\ l_{n-1,n} \quad \text{и} \quad L_{1,2},\ L_{2,3},\ \ldots.\ L_{n-1,n}$$

между послѣдовательными образующими подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей.

Станемъ теперь безпредѣльно увеличивать число дѣленій n дан-

наго промежутка времени $t - t_0$; въ такомъ случаѣ подвижная и неподвижная системы среднихъ винтовыхъ осей обращаются (черт. 70) въ нѣкоторыя подвижную и неподвижную **линейчатыя** поверхности $b_0d_0\,bd$, и $B_0D_0\,BD$, называемыя соотвѣтственно **подвижнымъ** и **неподвижнымъ винтовыми аксоидами** даннаго движенія твердаго тѣла; другими словами **подвижной винтовой аксоидъ** *даннаго движенія твердаго тѣла есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей тѣла* **въ самомъ тѣлѣ, неподвижный же винтовой аксоидъ** *осей есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей* **въ пространствѣ.**

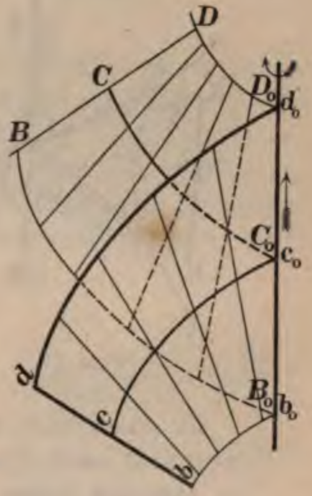
Замѣтимъ наконецъ, что кривыя линіи $\widehat{c_0c}$ и $\widehat{C_0C}$, служащія предѣлами ломанныхъ линій

$$l_{1,2},\; l_{2,3},\; \ldots\; l_{n-1,n}$$

и

$$L_{1,2},\; L_{2,3},\; \ldots\; L_{n-1,n}$$

кратчайшихъ разстояній подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла, называются **линіями съуженія** соотвѣтствующихъ имъ **линейчатыхъ** поверхностей, т. е. подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ даннаго движенія твердаго тѣла, а точка пересѣченія C линіи съуженія $\widehat{C_0C}$ съ образующею BD данной линейчатой поверхности носитъ названіе **центральной точки** этой образующей.



Черт. 70.

Подвижной винтовой аксоидъ даннаго движенія твердаго тѣла, будучи неизмѣнно связанъ съ движущимся тѣломъ, участвуетъ въ его движеніи, и движеніе это по отношенію къ **неподвижному винтовому аксоиду** удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ.

1) *Въ каждый моментъ t подвижной и неподвижный винтовые аксоиды имѣютъ* **общую** *образующую, совпадающую съ предѣльнымъ положеніемъ средней винтовой оси тѣла за промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту t.*

Это свойство очевидно изъ самихъ опредѣленій подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ, какъ предѣловъ, подвижной и неподвижной си-

стемъ среднихъ винтовыхъ осей, имѣющихъ въ теченіи каждаго промежутка времени Δt общую образующую.

2) *Линіи* **съуженія** *подвижного и неподвижнаго аксоидовъ въ каждый моментъ имѣютъ* **общую** *точку, причемъ въ этой точкѣ онѣ, вообще говоря,* **пересѣкаются**, *т. е. касательныя проведенныя къ нимъ въ общей точкѣ составляютъ нѣкоторый* **конечный** *уголъ.* Что линіи съуженія (черт. 71) $\widehat{c_0c_1}$ и $\widehat{C_0C_1}$ подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ даннаго движенія твердаго тѣла въ каждый данный моментъ имѣютъ **общую** точку; это ясно изъ опредѣленія линій съуженія того и другого аксоидовъ, какъ предѣловъ ломанныхъ линій, образованныхъ послѣдовательно совмѣщающимися кратчайшими разстояніями подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла. Наконецъ нетрудно убѣдиться, что въ ихъ **общей** въ данный моментъ точкѣ (c, C) линіи съуженія, вообще говоря, **пересѣкаются**, т. е. касательныя ck и CK проведенныя къ нимъ въ этой точкѣ составляютъ нѣкоторый **конечный** уголъ.

Черт. 71.

Въ самомъ дѣлѣ (черт. 71), въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ нѣкоторая точка c_1 подвижной линіи съуженія, безконечно близкая къ точкѣ c, совмѣстится съ нѣкоторою точкою C_1 неподвижной линіи съуженія, но мы знаемъ, что перемѣщеніе твердаго тѣла, а слѣдовательно и неизмѣнно съ нимъ связанной линіи съуженія $\widehat{cc_1}$ подвижного винтового аксоида твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, можно воспроизвести винтовымъ перемѣщеніемъ тѣла вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}D_{\Delta t}$, соотвѣтствующей данному промежутку времени Δt, причемъ

$$\overline{CC_1} = \overline{cc_1} + \overline{c_1c_2} + \overline{c_2C_1},$$

гдѣ $\overline{c_1c_2}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки c_1 вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}D_{\Delta t}$, соотвѣтствующей данному промежутку времени Δt, а $\overline{c_2C_1} = \overline{\Delta\sigma}$ есть векторъ **скольженія** тѣла вдоль той-же средней винтовой оси.

Замѣтивъ наконецъ, что векторъ вращательнаго перемѣщенія $\overline{c_1c_2}$ есть безконечно-малый векторъ **высшаго** порядка, раздѣлимъ предъидущее равенство на Δt и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta t = O$; въ такомъ случаѣ мы

придемъ къ равенству:

$$\overline{V_C} = \overline{V_c} + \overline{v_\sigma}$$

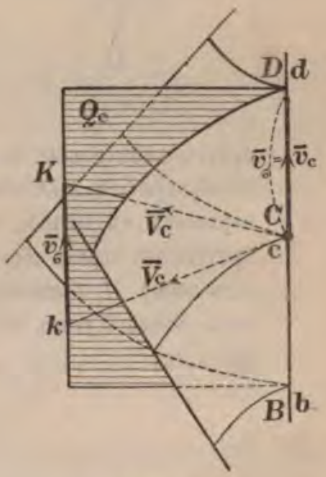
гдѣ $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$ суть соотвѣтственно скорости перемѣщеній по подвижной и неподвижной линіямъ съуженія ихъ точки пересѣченія (c, C), а $\overline{v_\sigma}$ = пред. $\frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}$ есть скорость скольженія твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ, т. е. $\overline{v_\sigma} = \overline{v_c}$, гдѣ $\overline{v_c}$ есть скорость одной изъ точекъ c мгновенной винтовой оси bd твердаго тѣла въ данный моментъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{V_C} - \overline{V_c} = \overline{v_\sigma} = \overline{v_c},$$

т. е. $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$, вообще говоря, не совпадаютъ; другими словами эти векторы составляютъ между собою нѣкоторый **конечный** уголъ; но направленія скоростей $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$ совпадаютъ съ касательными CK, ck въ общей точкѣ (c, C) подвижной и неподвижной линій съуженія винтовыхъ аксоидовъ; слѣдовательно касательныя эти тоже, вообще говоря, составляютъ между собою нѣкоторый **конечный** уголъ; другими словами *линіи съуженія подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ въ ихъ общей точкѣ* (c, C) **пересѣкаются.**

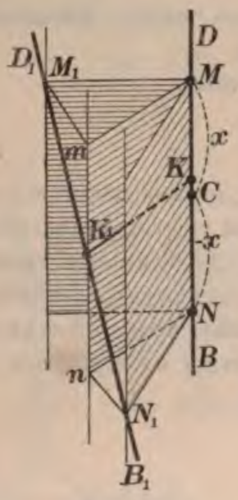
3) *Подвижной и неподвижный винтовые аксоиды во* **всѣхъ** *точкахъ ихъ* **общей** *въ данный моментъ образующей имѣютъ* **общія** *касательныя плоскости, т. е. подвижной и неподвижный винтовые аксоиды* **касательны** *другъ къ другу* **вдоль всей** *ихъ общей въ данный моментъ образующей.*



Черт. 72.

Дѣйствительно, принявъ во вниманіе (черт. 72), что скорость скольженія $\overline{v_\sigma}$ твердаго тѣла въ данный моментъ направлена по его мгновенной винтовой оси BD въ этотъ моментъ, мы приходимъ къ заключенію, что векторы $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$; другими словами направленія CK, ck касательныхъ къ подвижной и неподвижной линіямъ съуженія въ ихъ точкѣ пересѣченія (c, C) лежатъ въ одной плоскости Q_c, проходящей черезъ общую въ данный моментъ образующую (bd, BD) подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ и потому плоскость Q_c будетъ касательна въ точкѣ (c, C) къ тому и другому винтовымъ аксоидамъ.

Такимъ образомъ мы доказали, что подвижной и неподвижный винтовые аксоиды касательны другъ къ другу въ центральной точкѣ (c, C) ихъ общей въ данный моментъ образующей, т. е. въ точкѣ (c, C) пересѣченія въ данный моментъ ихъ линій съуженія. Чтобы доказать теперь что эти линейчатыя поверхности будутъ касательны другъ къ другу во всѣхъ точкахъ ихъ общей образующей (bd, BD) намъ придется предварительно изслѣдовать расположеніе плоскостей касательныхъ къ данной линейчатой поверхности вдоль одной и той-же ея образующей.



Черт. 73.

Съ этою цѣлью возьмемъ нѣкоторую точку M (черт. 73) на образующей BD данной линейчатой поверхности въ разстояніи x отъ центральной точки C этой образующей и, проведя черезъ точку M плоскость перпендикулярную къ этой образующей, замѣтимъ точки пересѣченія M_1, m проведенной плоскости съ безконечно близкою образующею D_1B_1 и съ линіей K_1m, проведенной параллельно данной образующей BD черезъ точку K_1 кратчайшаго разстоянія KK_1 между этими образующими BD и B_1D_1; въ такомъ случаѣ, обозначивъ соотвѣтственно черезъ Q_C и Q_M предѣльныя положенія плоскостей BDK_1 и BDM_1, мы знаемъ, что эти плоскости Q_C и Q_M будутъ касательны къ линейчатой поверхности въ точкахъ C и M данной ея образующей BD, ибо плоскость касательная къ данной линейчатой поверхности въ данной ея точкѣ M есть предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ образующую BD, соотвѣтствующую этой точкѣ M и черезъ точку M_1 безконечно близкую къ той-же точкѣ M, и потому, обозначивъ черезъ θ уголъ между этими плоскостями Q_C и Q_M, мы приходимъ къ равенству

$$\theta = \text{пред.}\ \angle mMM_1.$$

Но

$$tg\,(mMM_1) = \frac{M_1m}{Mm},$$

причемъ по построенію:

$$M_1m = K_1M_1 tg\,(M_1K_1m) = K_1M_1\ tg\,(BD, B_1D_1) \text{ и } Mm = KK_1;$$

слѣдовательно

$$tg\,\theta = \text{пред.}\ \frac{K_1M_1\ tg\,(BD, B_1D_1)}{KK_1} = \text{пред.}\ K_1M_1 .\ \text{пред.}\ \frac{tg\,(BD, B_1D_1)}{KK_1} =$$

$$= CM\ \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1} = CM . \chi = x . \chi.$$

гдѣ
$$\chi = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1}.$$

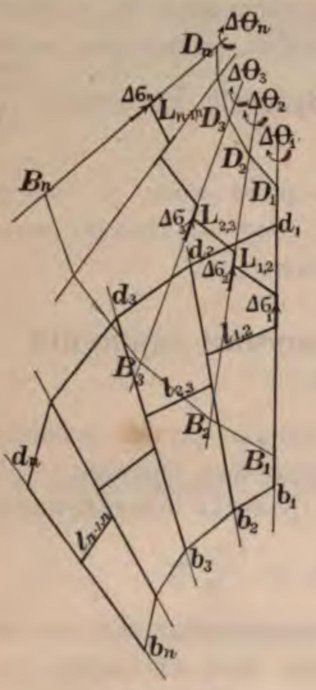
Этотъ предѣлъ отношенія χ угла между безконечно близкими образующими данной линейчатой поверхности къ кратчайшему разстоянію между тѣми-же образующими, когда образующая B_1D_1 стремится совмѣститься съ данною образующею BD называется **параметромъ** данной линейчатой поверхности, **вдоль** этой образующей.

Взявъ наконецъ точку N въ разстояніи x по другую сторону центральной точки C данной образующей BD и повторивъ тѣже разсужденія, мы убѣдимся, что предѣльное положеніе Q_N плоскости BDN_1, т. е. плоскость касательная къ линейчатой поверхности въ этой точкѣ N, будетъ **симметрична** плоскости Q_M относительно плоскости Q_C и потому, условившись разстояніямъ точекъ M и N, находящимся по различныя стороны центральной точки C данной образующей BD, приписывать **различные** знаки, мы приходимъ къ равенству:
$$tg\,\theta = x\chi,$$
справедливому по величинѣ и по знаку, если только условиться угламъ отклоненія θ приписывать знакъ совпадающій со знакомъ x.

Итакъ
$$tg\,\theta = \chi x,$$
т. е. углы отклоненія θ касательныхъ плоскостей вдоль одной и той-же образующей данной линейчатой поверхности **пропорціональны разстоянію** *x точки касанія M отъ* **центральной** *точки C разсматриваемой образующей, причемъ коэффиціентъ пропорціональности равенъ* **параметру** *χ данной линейчатой поверхности* **вдоль** *этой образующей, т. е.*
$$\chi = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1},$$
гдѣ (BD, B_1D_1) есть уголъ между образующею BD и безконечно близкою къ ней образующею B_1D_1, а KK_1 есть кратчайшее разстояніе между тѣми-же образующими.

Возвращаясь снова къ подвижному и неподвижному винтовымъ аксоидамъ даннаго движенія твердаго тѣла, нетрудно убѣдиться, что **параметры** *этихъ линейчатыхъ поверхностей будутъ соотвѣтственно* **равны**. Дѣйствительно по истеченіи промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t (черт. 74) образующая b_1d_1 подвижного винтового аксоида совмѣстится съ соотвѣтствующею образующею B_1D_1 неподвижнаго винтового аксоида; съ другой стороны изъ предыдущаго параграфа мы знаемъ, что сообщивъ твердому тѣлу нѣкоторое безконечно малое винтовое перемѣщеніе вокругъ его

этой оси B_2D_2 на величину $\Delta\sigma_2$ и т. д... положеніе твердаго тѣла въ концѣ послѣдняго промежутка времени Δt_n, т. е. въ моментъ t, можно воспроизвести угловымъ перемѣщеніемъ тѣла на уголъ $\Delta\theta_n$ около средней оси B_nD_n, съ которою совмѣстилась въ концѣ предъидущаго промежутка времени Δt_n, средняя ось b_nd_n, и скольженіемъ вдоль этой оси на величину $\Delta\sigma_n$.



Черт. 69.

Такимъ образомъ при всякомъ движеніи твердаго тѣла система среднихъ винтовыхъ осей: b_1d_1, b_2d_2, ... b_nd_n этого движенія, будучи неизмѣнно связана съ твердымъ тѣломъ, участвуетъ въ его движеніи, и потому мы назовемъ ее **подвижною** системою среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла; послѣдовательныя же положенія этихъ осей въ пространствѣ образуютъ нѣкоторую совокупность неподвижныхъ прямыхъ линій: B_1D_1, B_2D_2, ... B_nD_n, которую мы назовемъ **неподвижною** системою среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла, причемъ послѣдовательныя перемѣщенія движущагося твердаго тѣла могутъ быть воспроизведены **угловыми перемѣщеніями**, соединенными **со скольженіями** подвижной системы винтовыхъ осей около послѣдовательныхъ линій неподвижной системы винтовыхъ осей, притомъ такъ, что въ теченіе каждаго промежутка времени обѣ эти системы осей имѣютъ **общую** образующую и въ концѣ каждаго промежутка времени **двѣ** послѣдовательныя ихъ образующія приходятъ въ совпаденіе; слѣдовательно приходятъ въ совпаденіе и **кратчайшія разстоянія:**

$$l_{1,2},\ l_{2,3},\ \ldots.\ l_{n-1,n} \quad \text{и} \quad L_{1,2},\ L_{2,3},\ \ldots.\ L_{n-1,n}$$

между послѣдовательными образующими подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей.

Станемъ теперь безпредѣльно увеличивать число дѣленій n дан-

наго промежутка времени $t - t_0$; въ такомъ случаѣ подвижная и неподвижная системы среднихъ винтовыхъ осей обращаются (черт. 70) въ нѣкоторыя подвижную и неподвижную **линейчатыя** поверхности $b_0 d_0\, bd$, и $B_0 D_0\, BD$, называемыя соотвѣтственно **подвижнымъ** и **неподвижнымъ винтовыми аксоидами** даннаго движенія твердаго тѣла; другими словами **подвижной винтовой аксоидъ** *даннаго движенія твердаго тѣла есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей тѣла* **въ самомъ тѣлѣ, неподвижный же винтовой аксоидъ** *осей есть геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей* **въ пространствѣ.**

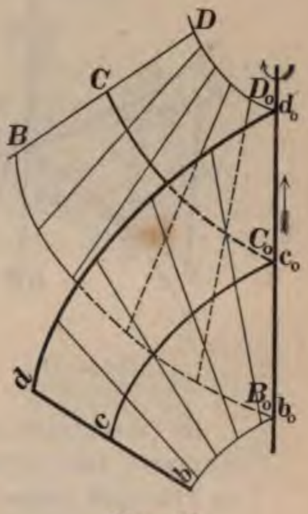
Замѣтимъ наконецъ, что кривыя линіи $\widehat{c_0 c}$ и $\widehat{C_0 C}$, служащія предѣлами ломанныхъ линій

$$l_{1,2},\ l_{2,3},\ \ldots\ l_{n-1,n}$$

и

$$L_{1,2},\ L_{2,3},\ \ldots\ L_{n-1,n}$$

кратчайшихъ разстояній подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла, называются **линіями съуженія** соотвѣтствующихъ имъ **линейчатыхъ** поверхностей, т. е. подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ даннаго движенія твердаго тѣла, а точка пересѣченія C линіи съуженія $\widehat{C_0 C}$ съ образующею BD данной линейчатой поверхности носитъ названіе **центральной точки** этой образующей.



Черт. 70.

Подвижной винтовой аксоидъ даннаго движенія твердаго тѣла, будучи неизмѣнно связанъ съ движущимся тѣломъ, участвуетъ въ его движеніи, и движеніе это по отношенію къ **неподвижному винтовому аксоиду** удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ.

1) *Въ каждый моментъ t подвижной и неподвижный винтовые аксоиды имѣютъ* **общую** *образующую, совпадающую съ предѣльнымъ положеніемъ средней винтовой оси тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t.*

Это свойство очевидно изъ самихъ опредѣленій подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ, какъ предѣловъ, подвижной и неподвижной си-

стемъ среднихъ винтовыхъ осей, имѣющихъ въ теченіи каждаго промежутка времени Δt общую образующую.

2) *Линіи* **съуженія** *подвижного и неподвижнаго аксоидовъ въ каждый моментъ имѣютъ* **общую** *точку, причемъ въ этой точкѣ онѣ, вообще говоря,* **пересѣкаются,** *т. е. касательныя проведенныя къ нимъ въ общей точкѣ составляютъ нѣкоторый* **конечный** *уголъ.*

Что линіи съуженія (черт. 71) $\widehat{c_0c_1}$ и $\widehat{C_0C_1}$ подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ даннаго движенія твердаго тѣла въ каждый данный моментъ имѣютъ **общую** точку; это ясно изъ опредѣленія линій съуженія того и другого аксоидовъ, какъ предѣловъ ломанныхъ линій, образованныхъ послѣдовательно совмѣщающимися кратчайшими разстояніями подвижной и неподвижной системъ среднихъ винтовыхъ осей даннаго движенія твердаго тѣла. Наконецъ нетрудно убѣдиться, что въ ихъ **общей** въ данный моментъ точкѣ (c, C) линіи съуженія, вообще говоря, **пересѣкаются,** т. е. касательныя ck и CK проведенныя къ нимъ въ этой точкѣ составляютъ нѣкоторый **конечный** уголъ.

Черт. 71.

Въ самомъ дѣлѣ (черт. 71), въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ нѣкоторая точка c_1 подвижной линіи съуженія, безконечно близкая къ точкѣ c, совмѣстится съ нѣкоторою точкою C_1 неподвижной линіи съуженія, но мы знаемъ, что перемѣщеніе твердаго тѣла, а слѣдовательно и неизмѣнно съ нимъ связанной линіи съуженія $\widehat{cc_1}$ подвижного винтового аксоида твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, можно воспроизвести винтовымъ перемѣщеніемъ тѣла вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}D_{\Delta t}$, соотвѣтствующей данному промежутку времени Δt, причемъ

$$\overline{CC_1} = \overline{cc_1} + \overline{c_1c_2} + \overline{c_2C_1},$$

гдѣ $\overline{c_1c_2}$ есть векторъ **вращательнаго** перемѣщенія точки c_1 вокругъ средней винтовой оси $B_{\Delta t}D_{\Delta t}$, соотвѣтствующей данному промежутку времени Δt, а $\overline{c_2C_1} = \overline{\Delta\sigma}$ есть векторъ **скольженія** тѣла вдоль той-же средней винтовой оси.

Замѣтивъ наконецъ, что векторъ вращательнаго перемѣщенія $\overline{c_1c_2}$ есть безконечно-малый векторъ **высшаго** порядка, раздѣлимъ предъидущее равенство на Δt и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta t = O$; въ такомъ случаѣ мы

придемъ къ равенству:

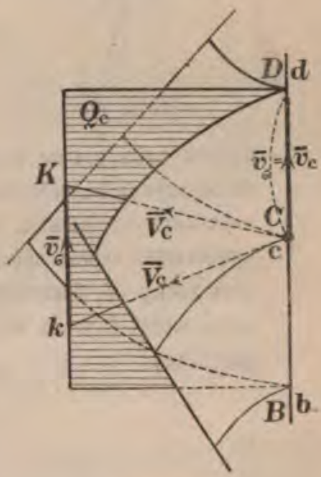
$$\overline{V_C} = \overline{V_c} + \overline{v_\sigma}$$

гдѣ $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$ суть соотвѣтственно скорости перемѣщеній по подвижной и неподвижной линіямъ съуженія ихъ точки пересѣченія (c, C), а $\overline{v_\sigma}$ = пред. $\frac{\overline{\Delta\sigma}}{\Delta t}$ есть скорость скольженія твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ, т. е. $\overline{v_\sigma} = \overline{v_c}$, гдѣ $\overline{v_c}$ есть скорость одной изъ точекъ c мгновенной винтовой оси bd твердаго тѣла въ данный моментъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{V_C} - \overline{V_c} = \overline{v_\sigma} = \overline{v_c},$$

т. е. $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$, вообще говоря, не совпадаютъ; другими словами эти векторы составляютъ между собою нѣкоторый **конечный** уголъ; но направленія скоростей $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$ совпадаютъ съ касательными CK, ck въ общей точкѣ (c, C) подвижной и неподвижной линій съуженія винтовыхъ аксоидовъ; слѣдовательно касательныя эти тоже, вообще говоря, составляютъ между собою нѣкоторый **конечный** уголъ; другими словами *линіи съуженія подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ въ ихъ общей точкѣ* (c, C) **пересѣкаются.**

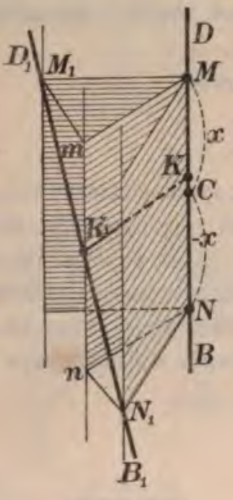


Черт. 72.

3) *Подвижной и неподвижный винтовые аксоиды во* **всѣхъ** *точкахъ ихъ* **общей** *въ данный моментъ образующей имѣютъ* **общія** *касательныя плоскости, т. е. подвижной и неподвижный винтовые аксоиды* **касательны** *другъ къ другу* **вдоль всей** *ихъ общей въ данный моментъ образующей.*

Дѣйствительно, принявъ во вниманіе (черт. 72), что скорость скольженія $\overline{v_\sigma}$ твердаго тѣла въ данный моментъ направлена по его мгновенной винтовой оси BD въ этотъ моментъ, мы приходимъ къ заключенію, что векторы $\overline{V_C}$ и $\overline{V_c}$; другими словами направленія CK, ck касательныхъ къ подвижной и неподвижной линіямъ съуженія въ ихъ точкѣ пересѣченія (c, C) лежатъ въ одной плоскости Q_c, проходящей черезъ общую въ данный моментъ образующую (bd, BD) подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ и потому плоскость Q_c будетъ **касательна** въ точкѣ (c, C) къ тому и другому винтовымъ аксоидамъ.

Такимъ образомъ мы доказали, что подвижной и неподвижный винтовые аксоиды касательны другъ къ другу въ центральной точкѣ (c, C) ихъ общей въ данный моментъ образующей, т. е. въ точкѣ (c, C) пересѣченія въ данный моментъ ихъ линій съуженія. Чтобы доказать теперь что эти линейчатыя поверхности будутъ касательны другъ къ другу во всѣхъ точкахъ ихъ общей образующей (bd, BD) намъ придется предварительно изслѣдовать расположеніе плоскостей касательныхъ къ данной линейчатой поверхности вдоль одной и той-же ея образующей.



Черт. 73.

Съ этою цѣлью возьмемъ нѣкоторую точку M (черт. 73) на образующей BD данной линейчатой поверхности въ разстояніи x отъ центральной точки C этой образующей и, проведя черезъ точку M плоскость перпендикулярную къ этой образующей, замѣтимъ точки пересѣченія M_1, m проведенной плоскости съ безконечно близкою образующею $D_1 B_1$ и съ линіей $K_1 m$, проведенной параллельно данной образующей BD черезъ точку K_1 кратчайшаго разстоянія KK_1 между этими образующими BD и $B_1 D_1$; въ такомъ случаѣ, обозначивъ соотвѣтственно черезъ Q_C и Q_M предѣльныя положенія плоскостей BDK_1 и BDM_1, мы знаемъ, что эти плоскости Q_C и Q_M будутъ касательны къ линейчатой поверхности въ точкахъ C и M данной ея образующей BD, ибо плоскость касательная къ данной линейчатой поверхности въ данной ея точкѣ M есть предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ образующую BD, соотвѣтствующую этой точкѣ M и черезъ точку M_1 безконечно близкую къ той-же точкѣ M, и потому, обозначивъ черезъ θ уголъ между этими плоскостями Q_C и Q_M, мы приходимъ къ равенству

$$\theta = \text{пред.} \angle mMM_1.$$

Но

$$tg\,(mMM_1) = \frac{M_1 m}{Mm},$$

причемъ по построенію:

$$M_1 m = K_1 M_1 tg\,(M_1 K_1 m) = K_1 M_1\, tg\,(BD, B_1 D_1) \text{ и } Mm = KK_1;$$

слѣдовательно

$$tg\,\theta = \text{пред.}\ \frac{K_1 M_1\, tg\,(BD, B_1 D_1)}{KK_1} = \text{пред.}\, K_1 M_1 .\ \text{пред.}\ \frac{tg\,(BD, B_1 D_1)}{KK_1} =$$

$$= CM\ \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1 D_1)}{KK_1} = CM . \chi = x . \chi ,$$

гдѣ
$$\chi = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1}.$$

Этотъ предѣлъ отношенія χ угла между безконечно близкими образующими данной линейчатой поверхности къ кратчайшему разстоянію между тѣми-же образующими, когда образующая B_1D_1 стремится совмѣститься съ данною образующею BD называется **параметромъ** данной линейчатой поверхности, **вдоль** этой образующей.

Взявъ наконецъ точку N въ разстояніи x по другую сторону центральной точки C данной образующей BD и повторивъ тѣже разсужденія, мы убѣдимся, что предѣльное положеніе Q_N плоскости BDN_1, т. е. плоскость касательная къ линейчатой поверхности въ этой точкѣ N, будетъ **симметрична** плоскости Q_M относительно плоскости Q_C и потому, условившись разстояніямъ точекъ M и N, находящимся по различныя стороны центральной точки C данной образующей BD, приписывать **различные** знаки, мы приходимъ къ равенству:

$$tg\,\theta = x\chi,$$

справедливому по величинѣ и по знаку, если только условиться угламъ отклоненія θ приписывать знакъ совпадающій со знакомъ x.

Итакъ

$$tg\,\theta = \chi x,$$

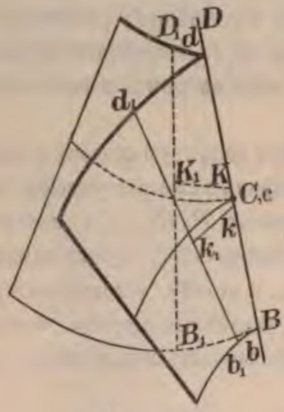
т. е. углы отклоненія θ касательныхъ плоскостей вдоль одной и той-же образующей данной линейчатой поверхности **пропорціональны разстоянію** *x точки касанія M отъ* **центральной** *точки C разсматриваемой образующей, причемъ коэффиціентъ пропорціональности равенъ* **параметру** *χ данной линейчатой поверхности* **вдоль** *этой образующей, т. е.*

$$\chi = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1D_1)}{KK_1},$$

гдѣ (BD, B_1D_1) есть уголъ между образующею BD и безконечно близкою къ ней образующею B_1D_1, а KK_1 есть кратчайшее разстояніе между тѣми-же образующими.

Возвращаясь снова къ подвижному и неподвижному винтовымъ аксоидамъ даннаго движенія твердаго тѣла, нетрудно убѣдиться, что **параметры** *этихъ линейчатыхъ поверхностей будутъ соотвѣтственно* **равны**. Дѣйствительно по истеченіи промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t (черт. 74) образующая b_1d_1 подвижного винтового аксоида совмѣстится съ соотвѣтствующею образующею B_1D_1 неподвижнаго винтового аксоида; съ другой стороны изъ предыдущаго параграфа мы знаемъ, что сообщивъ твердому тѣлу нѣкоторое безконечно малое винтовое перемѣщеніе вокругъ его

мгновенной винтовой оси BD въ данный моментъ т. е. вокругъ общей въ данный моментъ образующей (bd, BD) подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ, твердое тѣло, а слѣдовательно и неизмѣнно связанный съ нимъ подвижной аксоидъ винтовыхъ осей можно привести въ такое положеніе, что перемѣщенія всѣхъ точекъ его будутъ **геометрически эквивалентны** дѣйствительнымъ ихъ перемѣщеніямъ за тотъ-же промежутокъ времени Δt; слѣдовательно разстоянія точекъ образующей $b_1 d_1$ при этомъ новомъ положеніи до образующей $B_1 D_1$ будутъ безконечно малыми величинами **высшаго** порядка, а потому *уголъ и кратчайшее разстояніе между образующими* $(bd, b_1 d_1)$ *подвижного винтового аксоида, могутъ отличаться отъ угла и кратчайшаго разстоянія между образующими* $(BD, B_1 D_1)$ *неподвижнаго винтового аксоида лишь на безконечно малыя величины* **высшаго** *порядка;* слѣдовательно



Черт. 74.

$$\text{пред.}\ \frac{(bd, b_1 d_1)}{kk_1} = \text{пред.}\ \frac{(BD, B_1 D_1)}{KK_1} = \chi,$$

т. е. **параметры** *подвижнаго и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ, соотвѣтствующіе* **общей** *ихъ въ данный моментъ образующей* (bd, BD), **равны**.

Итакъ параметры подвижного и неподвижнаго винтовыхъ аксоидовъ соотвѣтствующіе ихъ **общей** въ данный моментъ образующей (bd, BD) **равны**; кромѣ того эти линейчатыя поверхности имѣютъ **общую** (черт. 72) касательную плоскость Q_c въ **центральной** точкѣ (c, C) этой образующей; слѣдовательно *подвижной и неподвижный винтовые аксоиды будутъ имѣть* **общія** *касательныя плоскости* **во всѣхъ** *точкахъ ихъ* **общей** *образующей* (bd, BD), *т. е. будутъ* **касательны** *вдоль* **всей** *ихъ общей въ данный моментъ образующей.*

Примѣчаніе. Если параметръ $\chi = o$, то линейчатая поверхность можетъ быть безъ складокъ и разрывовъ развернута на плоскость и потому такія линейчатыя поверхности называются **развертывающимися** въ противномъ-же случаѣ ихъ называютъ **косыми**. Такимъ образомъ *подвижной и неподвижный винтовые аксоиды должны быть* **однородными** *линейчатыми поверхностями, т. е. либо* **оба развертывающимися**, *либо* **оба косыми** *линейчатыми поверхностями.*

Такое движеніе подвижного винтового аксоида по неподвижному называется **катаніемъ** первой линейчатой поверхности по второй соединеннымъ **со скольженіемъ** первой линейчатой поверхности вдоль образующихъ второй.

Итакъ *при всякомъ* **общемъ** *случаѣ движенія твердаго тѣла неизмѣнно связанный съ тѣломъ* **подвижной винтовой аксоидъ** *этого движенія,* **катится** *и* **скользитъ** *по* **неподвижному винтовому аксоиду** *того-же движенія; наоборотъ всякій* **общій** *случай движенія твердаго тѣла можно воспроизвести* **катаніемъ** *соединеннымъ* **со скольженіемъ** *нѣкоторой неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ линейчатой поверхности по нѣкоторой неподвижной линейчатой поверхности, причемъ первая линейчатая поверхность будетъ* **подвижнымъ винтовымъ аксоидомъ** *даннаго движенія, а вторая*—**неподвижнымъ**.

Примѣчаніе. При движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси, неподвижной точки и параллельно неподвижной плоскости *скольженія тѣла равны* **нулю** и подвижной и неподвижный **винтовые аксоиды** этихъ движеній обращаются:

1) въ первомъ случаѣ въ **прямую линію** совпадающую съ неподвижною осью;

2) во второмъ случаѣ въ **коническія поверхности** (аксоиды), имѣющіе общую вершину, совпадающую съ неподвижной точкою; и наконецъ

3) въ третьемъ случаѣ въ **цилиндрическія поверхности**, образующія которыхъ перпендикулярны къ неподвижной плоскости и основаніями которыхъ служатъ подвижная и неподвижная **центроиды**.

§ 6. Выраженіе скоростей точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

Взявъ нѣкоторую точку M движущагося твердаго тѣла S, мы знаемъ, что скорость $\overline{v}$ этой точки выражается равенствомъ:

$$v = \text{пред.} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t},$$

причемъ (черт. 65)

$$\overline{MM_1} = \overline{MM_2} + \overline{M_2M_1} = \overline{PP_1} + \overline{MM_3},$$

гдѣ $\overline{PP_1}$ есть векторъ перемѣщенія выбраннаго полюса P твердаго

тѣла за промежутокъ времени Δt, а $\overline{MM}_3$ есть векторъ перемѣщенія за тотъ же промежутокъ времени точки M, если бы полюсъ P оставался **неподвижнымъ**, а твердое тѣло вращалось бы вокругъ этой неподвижной точки по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія тѣла въ его дѣйствительномъ движеніи, т. е. каждому промежутку времени Δt въ этомъ воображаемомъ движеніи твердаго тѣла соотвѣтствуетъ средняя ось PA параллельная средней оси P_1A_1 дѣйствительнаго движенія твердаго тѣла за тотъ же промежутокъ времени и то же угловое перемѣщеніе $\Delta\theta$ вокругъ этой оси; слѣдовательно

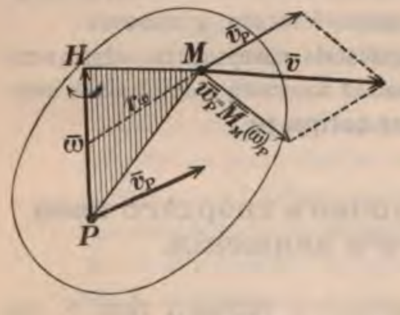
$$\overline{v} = \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{PP}_1}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{MM}_3}{\Delta t}.$$

Но пред. $\frac{\overline{PP}_1}{\Delta t}$ есть скорость $\overline{v}_P$ полюса P и пред. $\frac{\overline{MM}_3}{\Delta t} = \overline{w}_P$ по предположенію есть скорость точки M въ воображаемомъ движеніи твердаго тѣла, совершающемся вокругъ **неподвижной** точки, совпадающей съ положеніемъ полюса P въ данный моментъ по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія твердаго тѣла въ его дѣйствительномъ движеніи; слѣдовательно:

$$\overline{w}_P = \overline{M}_M\,(\overline{\omega})_P$$

и потому

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{w}_P = \overline{v}_P + \overline{M}_M\,(\overline{\omega})_P,$$



Черт. 75.

т. е. въ **общемъ** *случаѣ движенія твердаго тѣла скорость* $\overline{v}$ *любой его точки* M (черт. 75), *вообще говоря, есть геометрическая сумма* **двухъ** *скоростей*:

1) **скорости** $\overline{v}_P$ **выбраннаго полюса** P *движущагося тѣла и, такъ называемой,*

2) **вращательной скорости** $\overline{w}_P$ *точки* M *относительно выбраннаго полюса* P, причемъ вращательная скорость $\overline{w}_P$ по величинѣ и направленію выражается линейнымъ моментомъ $\overline{M}_M\,(\overline{\omega})_P$ относительно разсматриваемой точки M угловой скорости $\overline{\omega}$ твердаго тѣла,

отложенной отъ выбраннаго полюса P; другими словами, **величина** вращательной скорости w_P равна произведенію ωr_ω величины угловой скорости ω въ данный моментъ на разстояніе r_ω точки M до угловой скорости тѣла, отложенной отъ выбраннаго полюса P, **направленіе** же $\overline{w}_P$ перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ отложенную такимъ образомъ угловую скорость $(\overline{\omega})_P$ и разсматриваемую точку M, причемъ относительно $\overline{\omega}$ оно идетъ **слѣва направо**.

§ 7. Свойства скоростей точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

Приведемъ здѣсь нѣкоторыя изъ свойствъ скоростей точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

1) *Скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла, лежащихъ на линіи параллельной угловой скорости* $\overline{\omega}$, *или мгновенной винтовой оси тѣла въ данный моментъ*, **геометрически равны**, ибо вращательныя скорости такихъ точекъ относительно любого полюса P геометрически равны, такъ какъ ни величина, ни направленіе линейнаго момента $\overline{M}_M(\overline{\omega})_P$ не зависятъ отъ перенесенія точки M по линіи параллельной $\overline{\omega}$.

2) *Проекціи скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла на направленіе угловой скорости* $\overline{\omega}$, *или мгновенной винтовой оси тѣла въ данный моментъ равны между собою и равны* $\pm v_\sigma$, *т. е. равны взятой съ тѣмъ или другимъ знакомъ* **скорости скольженія** v_σ *твердаго тѣла въ этотъ моментъ.*

Дѣйствительно, принявъ во вниманіе, что вращательная скорость $\overline{w}_P = \overline{M}_M(\overline{\omega})_P$ точки M перпердикулярна къ $\overline{\omega}$, мы приходимъ къ равенству

$$v_\omega = v\cos(v, \omega) = v_P\cos(v_P, \omega),$$

т. е. проекція скорости любой точки твердаго тѣла на направленіе мгновенной оси равна проекціи на то же направленіе скорости $\overline{v}_P$, выбраннаго полюса P.

Принявъ наконецъ за полюсъ твердаго тѣла въ данный моментъ одну изъ точекъ c мгновенной винтовой оси тѣла въ этотъ моментъ, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$v_\omega = v\cos(v, \omega) = v_c\cos(v_c, \omega) = v_\sigma\cos(v_\sigma, \omega) = \pm v_\sigma,$$

ибо скорость скольженія $\overline{v}_\sigma$ твердаго тѣла въ данный моментъ направлена въ ту или другую сторону по мгновенной винтовой оси тѣла въ этотъ моментъ, т. е. параллельна $\overline{\omega}$, и потому $cos\,(v_\sigma, \omega) = \pm 1$.

3) *Геометрическая разность* $\overline{v}_M - \overline{v}_N$ *скоростей двухъ точекъ* M *и* N *твердаго тѣла въ данный моментъ есть* **вращательная** *скорость первой точки относительно второй, т. е. выражается линейнымъ моментомъ* $\overline{M}_M(\overline{\omega})_N$ *относительно первой точки* M *угловой скорости твердаго тѣла* $\overline{\omega}$, *отложенной отъ второй точки* N. Дѣйствительно, принявъ точку N за полюсъ, мы имѣемъ равенство:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_N + \overline{M}_M(\overline{\omega})_N;\ \text{слѣдовательно}\ \overline{v}_M - \overline{v}_N = \overline{M}_M(\overline{\omega})_N.$$

§ 8. Построеніе угловой скорости и мгновенной винтовой оси движущагося твердаго тѣла въ данный моментъ.

Отложивъ въ данный моментъ (черт. 76) отъ выбраннаго полюса P векторы $\overline{Pp}$, $\overline{Pm}$, $\overline{Pn}$ геометрически равные скоростямъ $\overline{v}_P$, $\overline{v}_M$, $\overline{v}_N$ этого полюса P и двухъ произвольныхъ точекъ M и N твердаго тѣла, соединимъ концы m, n, p этихъ векторовъ и опустимъ изъ полюса P перпендикуляръ PA на плоскость mnp; въ такомъ случаѣ направленіе угловой скорости $\overline{\omega}$ твердаго тѣла въ данный моментъ пойдетъ въ ту или другую сторону по этой линіи PA; дѣйствительно:

$$\overline{pm} = \overline{Pm} - \overline{Pp} = \overline{v}_M - \overline{v}_P = \overline{M}_M(\overline{\omega})_P;$$

$$\overline{pn} = \overline{Pn} - \overline{Pp} = \overline{v}_N - \overline{v}_P = \overline{M}_N(\overline{\omega})_P;$$

слѣдовательно *угловая скорость* $\overline{\omega}$ *перпендикулярна къ векторамъ* $\overline{pm}$ и $\overline{pn}$, *т. е.* **перпендикулярна** *къ плоскости* mnp.

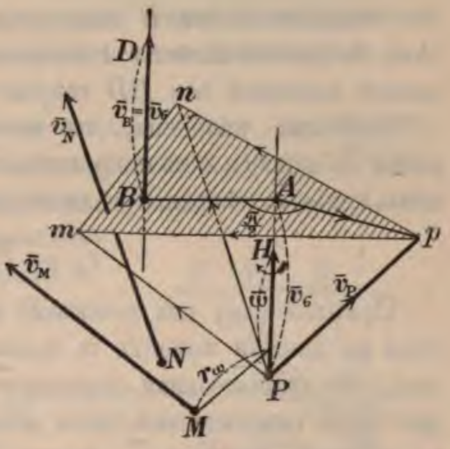
Замѣтивъ наконецъ, что величина вектора $\overline{pm} = \overline{M}_M(\overline{\omega})_P$ равна произведенію ωr_ω, гдѣ r_ω есть разстояніе точки M до направленія угловой скорости $\overline{\omega}$ отложенной отъ полюса P, т. е.—до построеннаго направленія PA, мы приходимъ къ заключенію, что величина угловой скорости $\overline{\omega}$ численно равна отношенію $\frac{pm}{r_\omega}$ и потому, отложивъ отъ полюса P векторъ $\overline{PH}$, численно равный $\frac{pm}{r_\omega}$ и направ-

ленный въ ту сторону, относительно которой вращательная скорость

$$\overline{w}_P = \overline{v}_M - \overline{v}_P = \overline{pm}$$

точки M относительно полюса P идетъ слѣва направо, мы получимъ угловую скорость $\overline{\omega} = \overline{PH}$ твердаго тѣла въ данный моментъ.

Построивъ такимъ образомъ угловую скорость $\overline{\omega} = \overline{PH}$ твердаго тѣла въ данный моментъ, нетрудно построить мгновенную винтовую ось BD тѣла въ тотъ же моментъ, т. е. такую прямую, скорости точекъ которой въ данный моментъ параллельны угловой скорости $\overline{\omega}$ твердаго тѣла въ этотъ моментъ; для этого достаточно построить лишь одну такую точку B, такъ какъ скорости всѣхъ точекъ, лежащихъ на прямой параллельной угловой скорости $\overline{\omega}$ твердаго тѣла въ данный моментъ, какъ мы знаемъ, равны и параллельны.



Черт. 76.

Съ этою цѣлью, соединимъ точку A съ точкою p векторомъ $\overline{Ap}$ и возставимъ въ плоскости mnp перпендикуляръ $AB = \dfrac{Ap}{\omega}$ къ этому вектору $\overline{Ap}$ въ точкѣ его A, притомъ въ ту сторону, чтобы, ставъ въ точкѣ B на плоскость mnp по направленію угловой скорости $\overline{\omega}$ т. е. по направленію $\overline{BD}$, мы видѣли бы векторъ $\overline{Ap}$ идущимъ слѣва направо; въ такомъ случаѣ нетрудно убѣдиться, что *точка B будетъ принадлежать* **мгновенной винтовой оси** *BD твердаго тѣла въ данный моментъ.*

Дѣйствительно скорость v_B точки B удовлетворяетъ равенству

$$\overline{v}_B = \overline{v}_P + \overline{M}_B\,(\overline{\omega})_P,$$

но

$$\overline{v}_P = \overline{PA} + \overline{Ap}$$

и

$$\overline{M}_B\,(\overline{\omega})_P = -\,\overline{Ap},$$

ибо величина этого линейнаго момента численно равна произведенію:

$$\omega \, . \, AB = \omega \frac{Ap}{\omega} = Ap,$$

что же касается до его направленія, то оно, будучи перпендикулярно къ плоскости BAP и идя относительно $\overline{\omega}$ слѣва направо будетъ противоположно направленію $\overline{Ap}$, и потому

$$\overline{v}_B = \overline{PA} + \overline{Ap} - \overline{Ap} = \overline{PA},$$

т. е. скорость точки B параллельна угловой скорости $\overline{\omega}$ твердаго тѣла въ данный моментъ; слѣдовательно точка B принадлежитъ мгновенной винтовой оси BD твердаго тѣла въ этотъ моментъ.

Замѣтимъ наконецъ, что векторъ $\overline{PA}$, будучи проекціей скорости $\overline{v}_P$ полюса P на направленіе $\overline{\omega}$, геометрически равенъ скорости скольженія $\overline{v}_\sigma$ твердаго тѣла въ данный моментъ, и потому

$$\overline{v}_B = \overline{PA} = \overline{v}_\sigma.$$

Принявъ одну изъ точекъ B мгновенной винтовой оси твердаго тѣла въ данный моментъ за полюсъ тѣла въ этотъ моментъ, и замѣтивъ, что вращательная скорость $\overline{w}_B = \overline{M}_M(\overline{\omega})_B$ любой точки M твердаго тѣла относительно этого полюса B, будучи перпендикулярна къ угловой скорости $\overline{\omega}$, будетъ перпендикулярна къ скорости $\overline{v}_B$ точки B, мы приходимъ къ равенствамъ: (черт. 77):

Черт. 77

$$v^2 = v_B{}^2 + w_B{}^2 = v^2_\sigma + r^2\omega^2,$$

гдѣ v_σ есть скорость **скольженія** твердаго тѣла въ данный моментъ, а r есть разстояніе точки M до его мгновенной винтовой оси BD въ этотъ моментъ; слѣдовательно скорости точекъ твердаго тѣла, лежащихъ на его мгновенной винтовой оси BD въ данный моментъ, будутъ **наименьшими** изъ скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла въ этотъ моментъ; поэтому **мгновенная винтовая ось** *твердаго тѣла въ данный моментъ есть* **геометрическое мѣсто** *тѣхъ точекъ твердаго тѣла, скорости которыхъ въ данный моментъ имѣютъ* **наименьшую** *величину.*

Изъ тѣхъ же равенствъ видно, что *скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла, лежащихъ на круговой цилиндрической поверхности, описанной около мгновенной винтовой оси тѣла въ данный моментъ,* **равны** *по величинѣ и наклонены подъ* **однимъ и тѣмъ** *же угломъ* φ *къ направленію мгновенной* **винтовой** *оси тѣла въ этотъ моментъ, причемъ:*

$$tg\,\varphi = \frac{v_B}{w_B} = \frac{v_\tau}{r\omega}.$$

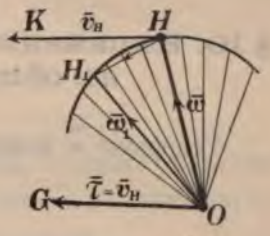
§ 9. Угловое ускореніе твердаго тѣла въ данный моментъ въ общемъ случаѣ его движенія.

Угловая скорость $\overline{\omega}$ движущагося твердаго тѣла съ теченіемъ времени измѣняетъ, вообще говоря, свою величину и направленіе.

Предѣлъ отношенія **геометрическаго** *приращенія угловой скорости твердаго тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt, *т. е.*

$$\overline{\tau} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}{\Delta t}$$

называется **угловымъ ускореніемъ** *твердаго тѣла въ данный моментъ.*



Черт. 78.

Построивъ **въ пространствѣ** около произвольной точки O (черт. 78) **годографъ** $\widehat{HH}_1$ **угловой скорости** твердаго тѣла, другими словами, отложивъ, отъ этой точки O векторы $\overline{OH}$, $\overline{OH}_1$, ... геометрически равные угловымъ скоростямъ $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}_1$ .... твердаго тѣла въ послѣдовательные моменты времени, мы видимъ, что

$$\overline{\tau} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{OH}_1 - \overline{OH}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{HH}_1}{\Delta t} = \overline{v}_H,$$

т. е. **угловое ускореніе** *твердаго тѣла въ данный моментъ по величинѣ и направленію выражается* **скоростью** $\overline{v}_H$ *точки* H, *чертящей годографъ* **угловой** *скорости тѣла.*

Угловое ускореніе $\overline{\tau} = \overline{PG}$ (черт. 80) какъ и угловую скорость $\overline{\omega} = \overline{PH}$ твердаго тѣла въ данный моментъ откладываютъ обыкно-

венно отъ выбраннаго полюса P твердаго тѣла, но, такъ какъ за полюсъ твердаго тѣла можно взять любую изъ его точекъ, то, собственно говоря, угловая скорость $\overline{\omega}$ и угловое ускореніе $\overline{\tau}$ твердаго тѣла не имѣютъ въ тѣлѣ **опредѣленной** точки приложенія.

Замѣтивъ наконецъ, что равенство

$$\overline{\tau} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t}$$

можно переписать безъ знака предѣла подъ видомъ:

$$\overline{\Delta\omega} = \overline{\tau}\Delta t + \overline{\varepsilon}\Delta t,$$

мы приходимъ къ заключенію, что произведеніе $\overline{\tau}\Delta t$ **геометрически эквивалентно** безконечно-малому **геометрическому** приращенію $\overline{\Delta\omega}$ угловой скорости твердаго тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t.

§ 10. Выраженіе ускореній точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія.

Ускореніе $\overline{u}$ всякой точки M выражается равенствомъ:

$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t}.$$

Если точка M принадлежитъ движущемуся твердому тѣлу, то по предъидущему (черт. 79)

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{w}_P \quad \text{и} \quad \overline{v}_1 = \overline{v}_{P_1} + \overline{w}_{P_1},$$

гдѣ $\overline{v}_P$ и $\overline{v}_{P_1}$ суть скорости выбраннаго полюса P въ моменты t и $t_1 = t + \Delta t$, а $\overline{w}_P$ и $\overline{w}_{P_1}$ суть вращательныя скорости въ тѣ же моменты точки M относительно того же полюса P; слѣдовательно

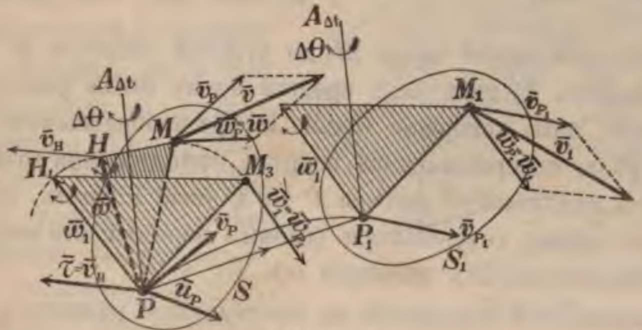
$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_1 - \overline{v}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{P_1} - \overline{v}_P}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{w}_{P_1} - \overline{w}_P}{\Delta t}.$$

Разсмотримъ каждый изъ этихъ предѣловъ въ отдѣльности.

а) Первый изъ этихъ предѣловъ очевидно есть ускореніе $\overline{u}_P$ выбраннаго полюса P, т. е.

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{P_1} - \overline{v}_P}{\Delta t} = \overline{u}_P.$$

b) Для выясненія величины и направленія второго предѣла обратимся опять къ **воображаемому** вращенію твердаго тѣла вокругъ **неподвижной** точки, совпадающей съ положеніемъ полюса P въ разсматриваемый моментъ, и совершающемуся по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія тѣла въ его дѣйствительномъ движеніи послѣ разсматриваемаго момента времени t, т. е. для всякаго промежутка времени Δt среднія оси $PA_{\Delta t}$ и $P_1A_{\Delta t}$ угловыхъ перемѣщеній въ этихъ двухъ движеніяхъ параллельны и угло-



Черт. 79.

выя перемѣщенія $\Delta\theta$ вокругъ этихъ осей равны, поэтому угловыя скорости $\overline{\omega}$, а слѣдовательно и угловыя ускоренія $\overline{\tau}$ въ этихъ двухъ движеніяхъ будутъ оставаться геометрически равными.

Обозначивъ черезъ $\overline{w}$ скорость точки M въ этомъ воображаемомъ движеніи въ данный моментъ t, мы видимъ, что

$$\overline{w} = \overline{M}_M\,(\overline{\omega})_P = \overline{w}_P.$$

Въ слѣдующій моментъ $t_1 = t + \Delta t$ отрѣзокъ PM въ указанномъ воображаемомъ движеніи твердаго тѣла займетъ положеніе PM_3 параллельное положенію P_1M_1 того же отрѣзка PM въ тотъ же моментъ t_1 при дѣйствительномъ движеніи твердаго тѣла, ибо по предположенію угловыя перемѣщенія твердаго тѣла за всякій промежутокъ времени Δt въ дѣйствительномъ его движеніи и въ этомъ воображаемомъ совершаются на равные углы $\Delta\theta$ вокругъ параллельныхъ и одинаково направленныхъ среднихъ осей $PA_{\Delta t}$, $P_1A_{\Delta t}$.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что угловыя скорости этихъ двухъ движеній тоже остаются геометрически равными, мы приходимъ къ заключенію, что вращательная скорость $\overline{w}_1$ точки M_3, т. е.

точки M въ моментъ t_1 въ **воображаемомъ** движеніи будетъ геометрически равна вращательной скорости $\overline{w}_{P_1}$ той же точки M въ въ тотъ же моментъ $t_1 = t + \Delta t$ въ **дѣйствительномъ** движеніи твердаго тѣла, ибо

$$\overline{w}_1 = \overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1)_P = \overline{M}_{M_1}(\overline{\omega}_1)_{P_1} = \overline{w}_{P_1};$$

поэтому

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{w}_{P_1} - \overline{w}_P}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{w}_1 - \overline{w}}{\Delta t} = \overline{\omega^2 r_\omega} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_P,$$

гдѣ r_ω есть разстояніе точки M до угловой скорости ω, отложенной отъ полюса P, такъ какъ средній членъ этихъ равенствъ есть не что иное, какъ ускореніе точки M при воображаемомъ движеніи твердаго тѣла, совершающемся вокругъ **неподвижной** точки, совпадающей съ положеніемъ полюса P въ данный моментъ, по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія твердаго тѣла въ его дѣйствительномъ движеніи (см. III. § 9).

Подставивъ эти выраженія въ предъидущее равенство, мы приходимъ къ равенству:

$$\overline{u} = \overline{u}_P + \overline{\omega^2 r_\omega} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_P,$$

т. е. ускореніе (черт. 80) *точки M твердаго тѣла въ* **общемъ** *случаѣ его движенія есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **трехъ** *ускореній*:

1) **ускоренія** $\overline{u}_p$ **выбраннаго полюса** *P твердаго тѣла*;

2) **осестремительнаго ускоренія** $\overline{\omega^2 r_\omega}$ *равнаго произведенію квадрата угловой скорости ω^2 на разстояніе r_ω точки M до направленія угловой скорости твердаго тѣла, отложенной отъ выбраннаго полюса P;*

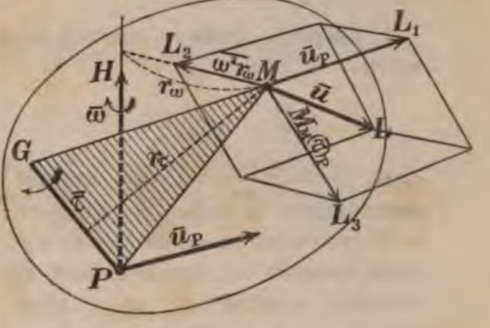
3) **вращательнаго ускоренія точки M относительно выбраннаго полюса** P, *выражаемаго по величинѣ и направленію линейнымъ моментомъ $M_M(\overline{\tau})_P$ относительно разсматриваемой точки углового ускоренія тѣла $\overline{\tau}$, отложеннаго отъ выбраннаго полюса P; другими словами* **величина** *вращательнаго ускоренія равна произведенію величины углового ускоренія тѣла на разстояніе $\overline{r}_\tau$ точки M до направленія углового ускоренія $\overline{\tau}$, отложеннаго отъ выбраннаго полюса P,* **направленіе** *же вращательнаго ускоренія перпендикулярно*

къ плоскости проходящей черезъ точку M и угловое ускореніе $\overline{\tau}$ и идетъ относительно направленія $\overline{\tau}$ слѣва направо.

Такимъ образомъ (черт. 80), отложивъ отъ точки M векторы

$$\overline{ML_1} = \overline{u}_P,\ \overline{ML_2} = \overline{\omega^2 r_\omega} \text{ и } \overline{ML_3} = \overline{M}_M(\overline{\tau})_P,$$

мы видимъ, что ускореніе $\overline{u} = \overline{ML}$ точки M выразится діагональю параллелепипеда, построеннаго на этихъ векторахъ.



Черт. 80.

Итакъ подобно тому, какъ движущаяся точка въ каждый моментъ обладаетъ скоростью $\overline{v}$ и ускореніемъ $\overline{u}$, движущееся твердое тѣло въ каждый моментъ, вообще говоря, обладаетъ угловою скоростью $\overline{\omega}$ и угловымъ ускореніемъ $\overline{\tau}$. Угловая скорость $\overline{\omega}$ и угловое ускореніе $\overline{\tau}$ твердаго тѣла въ данный не имѣютъ въ немъ, какъ мы уже замѣтили, опредѣленной точки приложенія; но, отложивъ эти векторы (черт. 80):

$$\overline{PH} = \overline{\omega} \text{ и } \overline{PG} = \overline{\tau}$$

отъ нѣкоторой точки P твердаго тѣла, называемой въ такомъ случаѣ **полюсомъ** тѣла, мы видимъ, что скорости и ускоренія всѣхъ остальныхъ точекъ твердаго тѣла выражаются соотвѣтственно черезъ скорость $\overline{v}_P$, ускореніе $\overline{u}_P$ этого полюса P, и угловую скорость $\overline{\omega}$ и угловое ускореніе $\overline{\tau}$ твердаго тѣла въ данный моментъ, отложенныя отъ того же полюса P, а именно:

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{M}_M(\overline{\omega})_P$$

и

$$\overline{u} = \overline{u}_P + \overline{\omega^2 r_\omega} + \overline{M}_M(\overline{\tau})_P.$$

Примѣчаніе. Въ заключеніе обратимъ вниманіе на полную **аналогію** понятій о **скорости** и **ускореніи** въ данный моментъ движущейся точки и— **угловой скорости** и **угловомъ ускореніи** въ данный моментъ движущагося твердаго тѣла.

Дѣйствительно, отложивъ отъ выбраннаго полюса P твердаго тѣла по направленію средней оси $PA_{\Delta t}$ перемѣщенія тѣла за промежутокъ времени

Δt, прилегающій къ данному моменту t, векторъ $\overline{\Delta\theta}$ численно равный угловому перемѣщенію $\Delta\theta$ твердаго тѣла за этотъ промежутокъ времени Δt, такой векторъ $\overline{\Delta\theta}$ можно назвать **векторомъ углового перемѣщенія** тѣла за этотъ промежутокъ времени Δt, причемъ ясно что

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\theta}}{\Delta t} = \overline{\omega};$$

такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующимъ **аналогичнымъ** опредѣленіямъ:

1) **Скорость точки** *въ данный моментъ:*

$$\overline{v} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t}$$

есть предѣлъ отношенія **вектора перемѣщенія** $\overline{\Delta s}$ *движущейся точки за безконечно - малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt.

2) **Ускореніе точки** *въ данный моментъ:*

$$\overline{u} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$$

есть предѣлъ отношенія **геометрическаго** *приращенія* $\overline{\Delta v}$ *скорости точки за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt.

3) **Ускореніе точки** *въ данный моментъ* **геометрически равно скорости** *въ тотъ же моментъ точки, чертящей* **годографъ скорости** *даннаго движенія точки.*

1) **Угловая скорость твердаго тѣла** *въ данный моментъ:*

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{\Delta\theta}}{\Delta t}$$

есть предѣлъ отношенія **вектора углового перемѣщенія** $\overline{\Delta\theta}$ *твердаго тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt.

2) **Угловое ускореніе твердаго тѣла** *въ данный моментъ:*

$$\overline{\tau} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}}{\Delta t}$$

есть предѣлъ отношенія **геометрическаго** *приращенія* $\overline{\Delta\omega}$ *угловой скорости твердаго тѣла за безконечно-малый промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку времени* Δt.

3) **Угловое ускореніе твердаго тѣла** *въ данный моментъ* **геометрически равно, скорости** *въ тотъ же моментъ точки, чертящей* **годографъ угловой скорости** *даннаго движенія твердаго тѣла.*

Приведеныя здѣсь **общія** опредѣленія остаются справедливыми при всѣхъ **частныхъ** случаяхъ движенія точки и твердаго тѣла и соотвѣтствующія имъ понятія составляютъ **основныя** кинематическія понятія.

ГЛАВА III.

Соединеніе и разложеніе движеній точекъ и твердыхъ тѣлъ.

I. Соединеніе и разложеніе движеній точки.

§ 1. Относительное движеніе точки по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу. Скорость и ускореніе относительнаго движенія точки.

Относительнымъ движеніемъ *точки M по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу S называется послѣдовательный переходъ точки M черезъ точки этого тѣла S.*

Твердое тѣло неограниченныхъ размѣровъ и проницаемое для точекъ и другихъ твердыхъ тѣлъ называютъ иногда **неизмѣняемою средою**.

Геометрическое мѣсто $\widehat{AB}$ всѣхъ тѣхъ точекъ твердаго тѣла или неизмѣняемой среды S (черт. 81), съ которыми послѣдовательно совмѣщается точка M, называется **траекторіей относительнаго движенія** или **относительною траекторіей** точки M.

Векторъ $\overline{AB}$, соединяющій точки A и B твердаго тѣла, съ которыми совмѣщается точка M въ началѣ и въ концѣ даннаго промежутка времени Δt, мы будемъ называть **векторомъ относительнаго перемѣщенія** точки M за этотъ промежутокъ времени Δt а пред. $\dfrac{\overline{AB}}{\Delta t}$, т. е. *предѣлъ отношенія вектора* **относительнаго** *перемѣщенія точки за безконечно-малый промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, къ самому этому промежутку времени называется* **относительною скоростью** *точки въ данный моментъ.*

Изъ этого опредѣленія ясно, что **величина** *относительной скорости $\overline{v}_r$ (v.relative) точки M равна пред. $\dfrac{\widehat{AB}}{\Delta t}$, т. е. предѣлу отно-*

шенія пути пройденнаго точкою по ея относительной траекторіи въ теченіе безконечно-малаго промежутка времени Δt, прилегающаго къ данному моменту t, къ самому этому промежутку Δt; **направленіе же** $\overline{v}_r$ *идетъ отъ точки M по касательной къ ея относительной траекторіи, въ сторону относительнаго перемѣщенія разсматриваемой точки.*

Съ теченіемъ времени величина относительной скорости $\overline{v}_r$ точки M и ея направленіе внутри тѣла, вообще говоря, измѣняются, причемъ *предѣлъ отношенія* **геометрическаго** *приращенія относительной скорости точки M* **внутри** *твердаго тѣла за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, къ самому этому промежутку Δt называется* **относительнымъ ускореніемъ** $\overline{u}_r$ *точки M въ данный моментъ.*

Чтобы нагляднѣе представить это опредѣленіе, надо выбрать въ твердомъ тѣлѣ нѣкоторую неизмѣнно съ нимъ связанную точку P и, отложивъ внутри тѣла отъ этой точки векторъ $\overline{Ph}$ геометрически равный относительной скорости $\overline{v}_r$ точки M въ этотъ моментъ, продѣлать такое построеніе для всѣхъ моментовъ времени.

Геометрическое мѣсто $\widehat{hh_1}$ всѣхъ точекъ твердаго тѣла, такимъ образомъ построенныхъ, мы назовемъ **относительнымъ гидографомъ относительной скорости** точки M, причемъ относительное ускореніе $\overline{u}_r$ точки M опредѣлится изъ равенствъ:

$$\overline{u}_r = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{r,1} - \overline{v}_r}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{hh}_1}{\Delta t} = \overline{v}_{r,h},$$

т. е. **относительное ускореніе** $\overline{u}_r$ *точки M въ данный моментъ геометрически равно* **относительной скорости** $\overline{v}_{r,h}$ *въ тотъ же моментъ точки h, чертящей* **внутри твердаго тѣла** *годографъ* $\widehat{hh_1}$ **относительной** *скорости точки M.*

Движеніе точки **въ пространствѣ** для отличія отъ **относительнаго движенія** называютъ еще **абсолютнымъ** *(mouvement absolu)* движеніемъ точки.

Изъ высказанныхъ опредѣленій ясно, что **данное** относительное движеніе точки можетъ совершаться при **какомъ угодно** движеніи твердаго тѣла или неизмѣняемой среды, въ которыхъ оно происходитъ; кромѣ того если твердое тѣло или неизмѣняемая среда, въ ко-

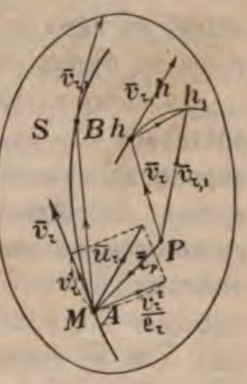
торыхъ совершается данное относительное движеніе точки, **неподвижны** или предположить ихъ таковыми, то **относительное** движеніе точки совпадетъ съ ея **абсолютнымъ** движеніемъ.

Такимъ образомъ можно сказать, что скорость и ускореніе въ данный моментъ даннаго **относительнаго** движенія точки суть соотвѣтственно скорость и ускореніе въ тотъ же моментъ того **абсолютнаго** движенія точки, которое она совершала бы, если твердое тѣло или неизмѣняемую среду, въ которыхъ происходитъ данное относительное движеніе, начиная съ этого момента предположить **неподвижными**.

Послѣднее замѣчаніе даетъ намъ возможность, не повторяя разсужденій вполнѣ аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались при установленіи различныхъ теоремъ **абсолютнаго** движенія точки, распространить соотвѣтствующимъ образомъ каждую изъ этихъ теоремъ на **относительное** движеніе точки.

Приведемъ здѣсь важнѣйшія изъ этихъ теоремъ.

1) **Проекціи** *относительной скорости и относительнаго ускоренія точки на плоскость и ось неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ, въ которомъ совершается данное относительное движеніе точки, геометрически равны соотвѣтственно относительной скорости и относительному ускоренію движеній* **проекцій** *этой точки на той же плоскости и той же оси.*



Черт. 81.

2) **Относительное ускореніе** $\overline{u_r}$ (черт. 81) *точки M въ данный моментъ есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **двухъ** *ускореній:*

a) **относительнаго касательнаго ускоренія**, *численно равнаго абсолютной величинѣ* $\pm v'_r$ *производной отъ величины* v_r *относительной скорости точки и направленнаго въ ту или другую сторону по касательной къ относительной траекторіи, и*

b) **относительнаго нормальнаго** *или* **центростремительнаго ускоренія**, *численно равнаго* $\frac{v_r^2}{\rho_r}$, *т. е. отношенію квадрата относительной скорости точки* v_r^2 *къ радіусу кривизны* ρ_r *ея относительной траекторіи въ разсматриваемой точкѣ и направленнаго по этому радіусу.*

3) **Проекціи** *относительной скорости и относительнаго ускоренія точки на ось, неизмѣнно связанную съ твердымъ тѣломъ, въ которомъ совершается данное относительное движеніе, выражаются соотвѣтственно первою и второю производными отъ проекціи на ту же ось радіуса вектора* (черт. 81) $r_p = PM$, *идущаго изъ нѣкоторой точки P этого твердаго тѣла къ движущейся точкѣ M.*

Справедливость этихъ теоремъ очевидна, ибо, предположивъ твердое тѣло или неизмѣняемую среду, въ которыхъ совершается данное относительное движеніе, начиная съ даннаго момента **неподвижными**, мы знаемъ, что **относительное** движеніе точки совпадетъ съ ея **абсолютнымъ** движеніемъ, а неизмѣнно связанныя съ этимъ твердымъ тѣломъ точки, плоскости и оси обратятся въ таковые же **неподвижныя**, для абсолютнаго же движенія точки приведенныя здѣсь теоремы нами уже доказаны.

Если твердое тѣло, внутри котораго совершается данное относительное движеніе точки, **неподвижно**, то **относительное** движеніе точки, какъ мы замѣтили, совпадаетъ съ ея **абсолютнымъ** движеніемъ, если же твердое тѣло **движется**, то относительная траекторія точки, будучи неизмѣнно связана съ этимъ тѣломъ, **переносится** вмѣстѣ съ нимъ въ пространствѣ и потому **абсолютное** движеніе точки не будетъ совпадать съ ея **относительнымъ** движеніемъ.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что **абсолютное** движеніе точки есть **составное** изъ ея **относительнаго** движенія *(mouvement relatif)* и **переноснаго** *(mouvement d'entraînement)* вмѣстѣ съ твердымъ тѣломъ, причемъ скорость и ускореніе $\overline{v}_A$, $\overline{u}_A$ той точки A твердаго тѣла, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ точка M называютъ соотвѣтственно скоростью и ускореніемъ **переноснаго** *(d'entraînement)* движенія точки M, мы будемъ обозначать ихъ соотвѣтственно черезъ $\overline{v}_e$ и $\overline{u}_e$; такимъ образомъ

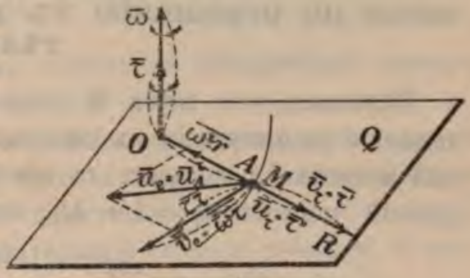
$$\overline{v}_e = \overline{v}_A \text{ и } \overline{u}_e = \overline{u}_A.$$

Примѣръ. *Положимъ, что точка M* (черт. 82) *совершаетъ нѣкоторое движеніе по прямой OR, а эта прямая въ свою очередь вращается съ угловою скоростью $\overline{\omega}$ въ плоскости Q вокругъ неподвижной точки O.*

Въ этомъ случаѣ движеніе точки M будетъ **составнымъ** изъ **относительнаго** движенія по прямой OR и изъ **переноснаго** движенія вмѣстѣ съ этою прямою.

Относительная траекторія точки M будетъ прямая линія, т. е. относительное движеніе точки будетъ **прямолинейное**, траекторія же абсолютнаго движенія точки M, вообще говоря, будетъ нѣкоторая кривая, лежащая въ плоскости Q.

Наоборотъ, если точка M совершаетъ нѣкоторое движеніе въ плоскости Q, то, проведя черезъ произвольную точку O этой плоскости и движущуюся точку M прямую OR, мы видимъ, что при движеніи точки M прямая OR будетъ, вообще говоря, совершать нѣкоторое вращательное движеніе вокругъ неподвижной точки O, а точка M будетъ совершать нѣкоторое относительное движеніе по прямой OR.



Черт. 82.

Такимъ образомъ всякое движеніе точки M въ плоскости Q можно **разложить** на ея **относительное** движеніе по прямой OR, вращающейся въ этой плоскости вокругъ неподвижной точки O и на **переносное** движеніе вмѣстѣ съ этою прямою OR.

Найдемъ величину и направленіе скорости и ускоренія **относительнаго** и **переноснаго** движеній точки M въ разсматриваемомъ случаѣ.

Величина **относительной скорости** $\overline{v_r}$ точки M выразится абсолютнымъ значеніемъ $\pm r'$ производной отъ разстоянія $r = OM$ точки M отъ точки O, направленіе же ея идетъ въ ту или другую сторону по прямой OR, смотря по знаку производной r', а именно въ сторону возрастанія r, если $r' > 0$ и въ противоположную сторону, если $r' < 0$, ибо r' по величинѣ и по знаку есть **проекція** относительной скорости точки на направленіе OR.

Величина **относительнаго ускоренія** $\overline{u_r}$ точки M выразится абсолютнымъ значеніемъ $\pm r''$ второй производной отъ разстоянія $r = OM$; направленіе $\overline{u_r}$ пойдетъ въ ту или другую сторону по прямой OR, смотря по знаку r'', причемъ r'' по величинѣ и по знаку будетъ **проекціей** $\overline{u_r}$ на направленіе OR.

Величина и направленіе **переносной скорости** $\overline{v_e}$ и **переноснаго ускоренія** $\overline{u_e}$ точки M, какъ скорость и ускореніе той точки A прямой OR, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ точка M, опредѣлятся изъ равенствъ

$$\overline{v_e} = \overline{v_A} = \overline{M}_M (\overline{\omega})_0$$

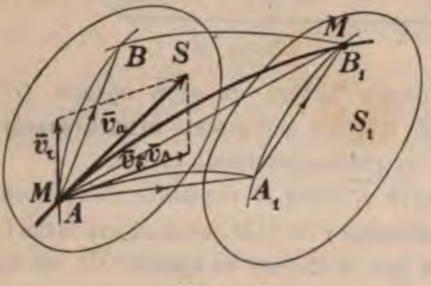
$$\overline{u_e} = \overline{u_A} = \overline{\omega^2 r} + \overline{M}_M (\overline{\tau})_0,$$

гдѣ $\overline{\omega}$ и $\overline{\tau}$ суть соотвѣтственно угловая скорость и угловое ускореніе прямой OR.

Найдемъ теперь зависимость между скоростями и ускореніями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки, совершающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу.

§ 2. Зависимость между скоростями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки, совершающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу.

Положимъ, что точка M (черт. 83) совершаетъ относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу S и въ данный моментъ t совпадаетъ съ нѣкоторою его точкою A, а въ слѣдующій моментъ $t_1 = t + \Delta t$, описавъ по своей относительной траекторіи дугу $\widehat{AB}$, приходитъ въ совпаденіе съ нѣкоторою другою его точкою B.



Черт. 83.

Въ концѣ того же промежутка времени движущееся тѣло S займетъ въ пространствѣ нѣкоторое новое положеніе S_1 и неизмѣнно связанная съ тѣломъ дуга $\widehat{AB}$ относительной траекторіи точки M перемѣстится въ положеніе $\widehat{A_1B_1}$, такъ что точка M, описавъ въ пространствѣ дугу $\widehat{MM_1}$, займетъ въ немъ нѣкоторое положеніе M_1, совпадающее съ положеніемъ B_1 въ тотъ же моментъ точки B твердаго тѣла, причемъ изъ чертежа (83) видно, что

$$\overline{MM_1} = \overline{AA_1} + \overline{A_1B_1};$$

кромѣ того ясно, что векторъ $\overline{A_1B_1}$ **геометрически эквивалентенъ** вектору $\overline{AB}$, такъ векторы эти безконечно-малы, равны по величинѣ и составляютъ между собою безконечно-малый уголъ; поэтому, раздѣливъ всѣ члены послѣдняго равенства на Δt и переходя къ предѣламъ при $\Delta t = 0$, мы придемъ къ равенствамъ:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{A_1B_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$$

Но

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{v}_a;$$

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} = \overline{v}_A = \overline{v}_e;$$

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \overline{v}_r,$$

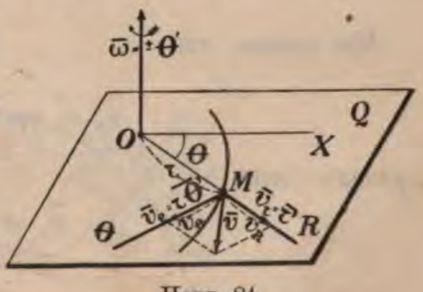
гдѣ черезъ $\overline{v}_a$ (*vitesse absolue*) мы обозначили **абсолютную** скорость точки M, т. е. скорость движенія этой точки въ пространствѣ, черезъ $\overline{v}_e$ (*vitesse d'entraînement*) мы обозначили **переносную** скорость точки M, т. е. скорость $\overline{v}_A$ той точки A твердаго тѣла, съ которою **въ данный моментъ** совпадаетъ движущаяся точка M, и наконецъ черезъ $\overline{v}_r$ (*vitesse relative*) **относительную** скорость точки M въ данный моментъ.

Подставивъ эти величины въ предъидущее равенство, мы приходимъ къ равенству:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

т. е. **абсолютная** *скорость точки M равна* **геометрической суммѣ** *ея* **относительной** *скорости* $\overline{v}_r$ *по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу и ея* **переносной** *скорости* $\overline{v}_e = \overline{v}_A$, *геометрически равной скорости той точки A твердаго тѣла, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ точка M.*

Примѣръ. *Проекціи скорости точки, движущейся въ нѣкоторой плоскости, на* **оси полярныхъ координатъ.**



Черт. 84.

Положимъ, что точка M (черт. 84) движется въ нѣкоторой плоскости Q. Выбравъ на этой плоскости неподвижную точку O и неподвижную ось OX, соединимъ эту точку O съ движущеюся точкою M; въ такомъ случаѣ величина радіуса вектора $r = OM$ и уголъ его наклоненія $\theta = \angle MOX$ къ оси OX вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки M на плоскости Q и называются поэтому **полярными коорди-**

натами точки M, причемъ $r = OM$ называютъ **радіусомъ векторомъ**, а $\theta = \angle MOX$ **аргументомъ** точки M; наконецъ продолженіе MR радіуса вектора OM и перпендикуляръ $M\theta$, возставленный въ точкѣ M къ радіусу вектору OM въ сторону **возрастанія** угла θ, называются **осями полярныхъ координатъ**.

Для нахожденія проекцій v_R и v_θ скорости $\overline{v}$ точки M на оси MR и $M\theta$ ея полярныхъ координатъ мы напомнимъ, что на всякое движеніе точки M въ плоскости Q можно смотрѣть какъ на **составное** изъ движенія точки по прямой OR и изъ вращательнаго движенія этой прямой вокругъ неподвижной точки O, поэтому

$$\overline{v} = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

гдѣ

$$v_r = \pm r' \quad \text{и} \quad v_e = \pm r\theta',$$

причемъ $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$ направлены соотвѣтственно въ ту или другую стороны по прямымъ MR и $M\theta$, смотря по знакамъ r' и θ'; слѣдовательно:

$$\begin{cases} v_R = r' \\ v_\theta = r\theta' \end{cases} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{v_R{}^2 + v_\theta{}^2} = \sqrt{(r')^2 + (r\theta')^2}.$$

§ 3. Зависимость между ускореніями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки, совершающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу. Добавочное ускореніе такой точки.

Мы знаемъ, что

$$\overline{u}_a = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{a,1} - \overline{v}_a}{\Delta t},$$

причемъ (черт. 85)

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e$$

и

$$v_{a,1} = \overline{v}_{r,1} + \overline{v}_{e,1},$$

гдѣ $\overline{v}_a$, $\overline{v}_r$, $\overline{v}_e$; $\overline{v}_{a,1}$, $\overline{v}_{r,1}$, $\overline{v}_{e,1}$ суть соотвѣтственно абсолютныя, относительныя и переносныя скорости точки M въ моменты t и $t_1 = t + \Delta t$, а $\overline{u}_a$ есть абсолютное ускореніе точки въ данный мо-

ментъ; слѣдовательно

$$\bar{u}_a = \text{пред.}\,\frac{\bar{v}_{a,1} - \bar{v}_a}{\Delta t} = \text{пред.}\,\frac{\bar{v}_{r,1} - \bar{v}_r}{\Delta t} + \text{пред.}\,\frac{\bar{v}_{e,1} - \bar{v}_e}{\Delta t}.$$

Найдемъ величину и направленіе каждаго изъ этихъ предѣловъ въ отдѣльности.

1) Для нахожденія **перваго** искомаго предѣла (черт. 85)

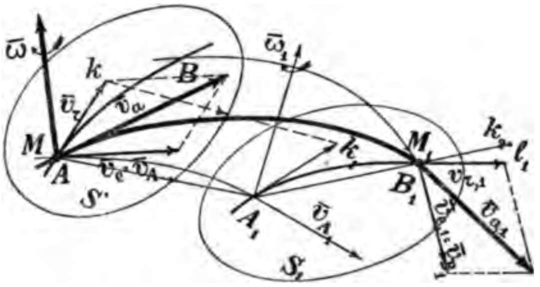
$$\text{пред.}\,\frac{\bar{v}_{r,1} - \bar{v}_r}{\Delta t} = \text{пред.}\,\frac{\overline{B_1 l_1} - \overline{Ak}}{\Delta t}$$

введемъ въ разсмотрѣніе векторъ $\overline{A_1 k_1}$, совпадающій съ положеніемъ вектора $\overline{Ak}$ въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$; въ такомъ случаѣ мы можемъ написать, что

$$\text{пред.}\,\frac{\bar{v}_{r,1} - \bar{v}_r}{\Delta t} = \text{пред.}\,\frac{\overline{B_1 l_1} - \overline{A_1 k_1} + \overline{A_1 k_1} - \overline{Ak}}{\Delta t} =$$

$$= \text{пред.}\,\frac{\overline{B_1 l_1} - \overline{A_1 k_1}}{\Delta t} + \text{пред.}\,\frac{\overline{A_1 k_1} - \overline{Ak}}{\Delta t}.$$

Но, пред. $\frac{\overline{B_1 l_1} - \overline{A_1 k_1}}{\Delta t}$ есть предѣлъ отношенія геометриче-



Черт. 85.

скаго приращенія **внутри** тѣла относительной скорости точки M за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, къ самому этому промежутку времени; слѣдовательно этотъ предѣлъ по величинѣ и направленію есть не что иное, какъ **относительное уско-**

реніе $\overline{u}_r$ точки M, т. е.

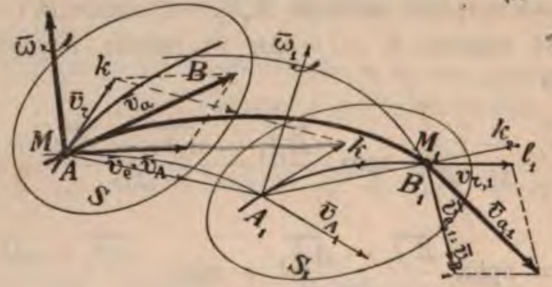
$$\text{пред.}\ \frac{\overline{B_1 l_1} - \overline{A_1 k_1}}{\Delta t} = \overline{u}_r.$$

Что же касается

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{A_1 k_1} - \overline{Ak}}{\Delta t},$$

то изъ очевиднаго геометрическаго равенства (черт. 85а):

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1 k_1} = \overline{Ak} + \overline{kk_1}$$



Черт. 85а.

мы видимъ, что

$$\overline{A_1 k_1} - \overline{Ak} = \overline{kk_1} - \overline{AA_1};$$

слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{A_1 k_1} - \overline{Ak}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{kk_1}}{\Delta t} - \text{пред.}\ \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} =$$

$$= \overline{v}_k - \overline{v}_A = \overline{M}_k(\overline{\omega})_A,$$

ибо разность скоростей двухъ точекъ k и A твердаго тѣла въ данный моментъ выражается, какъ мы знаемъ, линейнымъ моментомъ относительно первой точки k угловой скорости $\overline{\omega}$, отложенной отъ второй точки A.

Замѣтивъ наконецъ, что точка A есть та точка твердаго тѣла, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ движущаяся точка M, мы приходимъ къ равенству:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{A_1k_1} - \overline{Ak}}{\Delta t} = \overline{M}_k(\overline{\omega})_M$$

и потому

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{r,1} - \overline{v}_r}{\Delta t} = \overline{u}_r + \overline{M}_k(\overline{\omega})_M.$$

2) Для нахожденія **второго** искомаго предѣла замѣтимъ, что (черт. 85a)

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{e,1} - \overline{v}_e}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1} - \overline{v}_A}{\Delta t},$$

такъ какъ по опредѣленію переносная скорость точки M есть скорость той точки твердаго тѣла, съ которою она совпадаетъ въ данный моментъ.

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе скорость $\overline{v}_{A_1}$ точки A твердаго тѣла въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$; въ такомъ случаѣ мы можемъ написать, что

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{e,1} - \overline{v}_e}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1} - \overline{v}_{A_1} + \overline{v}_{A_1} - \overline{v}_A}{\Delta t} =$$

$$= \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1} - \overline{v}_{A_1}}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{A_1} - \overline{v}_A}{\Delta t}.$$

Но, $\overline{v}_{B_1} - \overline{v}_{A_1}$, какъ геометрическая разность въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ скоростей точекъ B_1 и A_1 твердаго тѣла, выражается, какъ мы уже замѣтили, линейнымъ моментомъ $\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1}$ относительно точки B_1 угловой скорости $\overline{\omega}_1$ твердаго тѣла въ этотъ моментъ $t_1 = t + \Delta t$, отложенной отъ точки A_1; слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1} - \overline{v}_{A_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1}}{\Delta t} = \text{пред.}\ \left[\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1} \cdot \frac{1}{\Delta t}\right],$$

причемъ увеличенія линейнаго момента $\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1}$ въ $\frac{1}{\Delta t}$ разъ можно достигнуть перенесеніемъ его центра B_1 въ точку k_2, лежащую на продолженіи прямой $\overline{A_1B_1}$ въ разстояніи $A_1k_2 = A_1B_1\ \frac{1}{\Delta t}$ отъ точки A_1, т. е. $\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \overline{M}_{k_2}(\overline{\omega}_1)_{A_1}$.

Дѣйствительно, величина линейнаго момента $\overline{M}_{k_2}(\overline{\omega}_1)_{A_1}$ будетъ въ $\frac{1}{\Delta t}$ разъ болѣе величины линейнаго момента $\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1}$, ибо по построенію разстояніе точки k_2 до угловой скорости $\overline{\omega}_1$, отложенной отъ точки A_1, будетъ въ $\frac{1}{\Delta t}$ разъ больше разстоянія точки B_1 до той же угловой скорости; что же касается до направленій этихъ линейныхъ моментовъ, то они, будучи перпендикулярны къ одной и той же плоскости $(k_2, \overline{\omega}_1)$ и идя отъ нея въ одну и ту же сторону; слѣва на право относительно $\overline{\omega}_1$, будутъ параллельны и одинаково направлены; слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1}-\overline{v}_{A_1}}{\Delta t}=\text{пред.}\left[\overline{M}_{B_1}(\overline{\omega}_1)_{A_1}\cdot\frac{1}{\Delta t}\right]=\text{пред.}\ \overline{M}_{k_2}(\overline{\omega}_1)_{A_1}.$$

Принявъ наконецъ во вниманіе, что точка k_2 въ предѣлѣ совпадетъ съ концомъ k относительной скорости $\overline{v}_r$ точки M, ибо по построенію

$$\text{пред.}\ \overline{A_1k_2}=\text{пред.}\ \frac{\overline{A_1B_1}}{\Delta t}=\text{пред.}\ \frac{\overline{AB}}{\Delta t}=\overline{v}_r$$

и что $(\overline{\omega}_1)_{A_1}$ въ предѣлѣ обратится въ $(\overline{\omega})_A$, т. е. въ угловую скорость $\overline{\omega}$ твердаго тѣла въ данный моментъ, отложенную отъ той его точки A, съ которою въ этотъ моментъ совпадаетъ движущаяся точка M, мы приходимъ къ заключенію, что

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1}-\overline{v}_{A_1}}{\Delta t}=\overline{M}_k(\overline{\omega})_M.$$

Что же касается

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{A_1}-\overline{v}_A}{\Delta t},$$

то предѣлъ этотъ очевидно есть не что иное, какъ ускореніе $\overline{u}_A$ въ данный моментъ, той точки A твердаго тѣла, съ которою совпадаетъ въ этотъ моментъ движущаяся точка M, т. е. этотъ предѣлъ есть **переносное ускореніе** *(accélération d'entraînement)* $\overline{u}_e$ точки M.

Итакъ

$$\frac{\overline{v}_{A_1}-\overline{v}_A}{\Delta t}=\overline{u}_A=\overline{u}_e;$$

слѣдовательно

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{e,1}-\overline{v}_e}{\Delta t}=\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{B_1}-\overline{v}_{A_1}}{\Delta t}+\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{A_1}-\overline{v}_A}{\Delta t}=$$

$$=\overline{M}_k(\overline{\omega})_M+\overline{u}_e.$$

Подставивъ найденные **два предѣла**:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{r,1}-\overline{v}_r}{\Delta t}=\overline{u}_r+\overline{M}_k(\overline{\omega})_M,$$

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{e,1}-\overline{v}_e}{\Delta t}=\overline{u}_e+\overline{M}_k(\overline{\omega})_M$$

въ равенство:

$$\overline{u}_a=\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{r,1}-\overline{v}_r}{\Delta t}+\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_{e,1}-\overline{v}_e}{\Delta t},$$

мы приходимъ къ равенству:

$$\overline{u}_a=\overline{u}_r+\overline{u}_e+2\overline{M}_k(\overline{\omega})_M.$$

Обозначивъ наконецъ для большей наглядности символомъ

$$[\overline{\omega},\overline{v}_r]_M$$

векторъ $\overline{MN}$ (черт. 86) численно равный **площади** параллелограмма построеннаго на векторахъ $\overline{\omega}$ и $\overline{v}_r$, отложенныхъ отъ точки M и направленный **по перпендикуляру**, возставленному изъ точки M къ плоскости этого параллелограмма, притомъ **направо** относительно наблюдателя, стоящаго по направленію перваго вектора $\overline{\omega}$ и обращеннаго лицомъ ко второму вектору $\overline{v}_r$, ясно, что

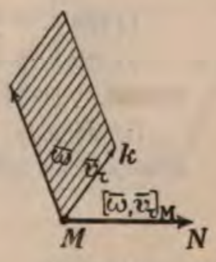
$$\overline{M}_k(\overline{\omega})_M=[\overline{\omega},\overline{v}_r]_M$$

Итакъ

$$\overline{u}_a=\overline{u}_r+\overline{u}_e+\overline{u}_c,$$

гдѣ

$$\overline{u}_c=2\overline{M}_k(\overline{\omega})_M=2[\overline{\omega},\overline{v}_r]_M,$$



Черт. 86.

т. е. **абсолютное** *ускореніе* $\overline{u}_a$ *точки* M, *совершающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу, есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **трехъ** *ускореній*:

1) **относительнаго** *ускоренія* $\overline{u}_r$ *точки* M, *ея*

2) **переноснаго** *ускоренія* $\overline{u}_e$, *геометрически равнаго ускоренію* $\overline{u}_A$ *той точки* A *твердаго тѣла, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ движущаяся точка и, такъ называемаго,*

3) **добавочнаго** или **дополнительнаго** *ускоренія* $\overline{u}_c$ *точки* M, **геометрически** *равнаго удвоенному линейному* $2\overline{M}_k(\overline{\omega})_M$, *угловой скорости* $\overline{\omega}$ *твердаго тѣла, отложенной отъ движущейся точки* M, *относительно конца* k *ея относительной скорости* $\overline{v}_r$, *другими словами численно равнаго удвоенной площади параллелограмма, построеннаго на угловой скорости* $\overline{\omega}$ *твердаго тѣла, отложенной отъ разсматриваемой точки* M *и на относительной скорости* v_r *этой точки, т. е. равнаго*

$$2\omega v_r \sin(\omega, v_r)$$

и направленнаго отъ точки M *по перпендикуляру къ плоскости этого параллелограмма* **направо** *относительно наблюдателя, стоящаго по направленію угловой скорости* $\overline{\omega}$, *отложенной отъ этой точки и обращеннаго лицомъ къ ея относительной скорости* $\overline{v}_r$.

Такимъ образомъ величина **добавочнаго ускоренія**

$$u_c = 2\omega v_r \sin(\omega, v_r)$$

обращается въ **нуль** въ **трехъ** случаяхъ;

1) при $\omega = 0$, т. е. когда угловая скорость твердаго тѣла равна нулю, напр. при **поступательномъ** движеніи твердаго тѣла;

2) при $v_r = 0$, т. е. когда относительная скорость точки равна нулю;

3) при $\overline{v}_r \parallel \overline{\omega}$, т. е. когда относительная скорость точки **параллельна** угловой скорости твердаго тѣла.

Примѣчаніе. Замѣтимъ наконецъ, что изъ перваго выраженія величины и направленія добавочнаго ускоренія точки M

$$\overline{u}_c = 2\overline{M}_k(\overline{\omega})_M$$

ясно, что оно **геометрически** равно удвоенной вращательной скорости той точки твердаго тѣла, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ конецъ k относительной скорости $\overline{v}_r$ точки M, если точку твердаго тѣла, совпадающую съ этой послѣднею, принять за полюсъ тѣла въ этотъ моментъ.

Итакъ, въ то время какъ абсолютная **скорость** точки

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e$$

равна геометрической суммѣ ея относительной и переносной скоростей, абсолютное **ускореніе** точки

$$\overline{u}_a = \overline{u}_r + \overline{u}_e + \overline{u}_c,$$

вообще говоря, **не равно** геометрической суммѣ ея относительнаго и переноснаго ускореній: здѣсь является еще **добавочное ускореніе**

$$\overline{u}_c = 2\overline{M}_k(\overline{\omega})_M = 2[\overline{\omega}, \overline{v}_r]_M \text{ *)}.$$

Примѣры: 1) *При движеніи точки по образующей круговой цилиндрической поверхности, вращающейся вокругъ ея оси, добавочное ускореніе точки равно нулю, ибо въ этомъ случаѣ* $\overline{v}_r \parallel \overline{\omega}$.

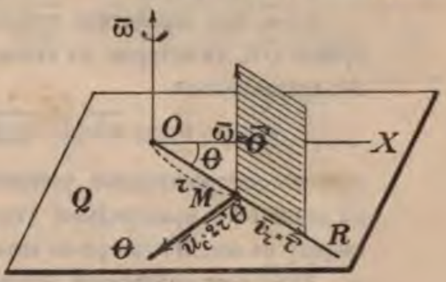
2) *При равномѣрномъ движеніи точки по меридіану шаровой поверхности, равномѣрно вращающейся вокругъ одного изъ своихъ діаметровъ, добавочное ускореніе точки будетъ перпендикулярно къ плоскости этого меридіана, причемъ при прохожденіи точки черезъ полюсы оно будетъ достигать своей наибольшей величины, а при прохожденіи точки черезъ экваторъ будетъ обращаться въ нуль, и измѣнять свое направленіе на противоположное.*

3) *Найти добавочное ускореніе точки M, движущейся по прямой OR, которая въ свою очередь вращается вокругъ неподвижной точки O, съ угловою скоростью $\overline{\omega}$ въ нѣкоторой плоскости Q.*

Въ этомъ случаѣ (черт. 87) относительная скорость $\overline{v}_r$ точки M будетъ перпендикулярна къ угловой скорости $\overline{\omega}$ прямой OR; слѣдовательно

$$u_c = 2\omega v_r = \pm 2\theta' r',$$

где θ есть уголъ наклоненія прямой OR къ нѣкоторой неподвижной оси OX, лежащей въ плоскости Q, а r есть разстояніе точки M отъ неподвижной точки O, т. е. r и θ суть нѣкоторыя функціи времени t.



Черт. 87.

Наконецъ направленіе $\overline{u}_c$, будучи перпендикулярно къ плоскости $(\overline{\omega}, \overline{v}_r)$,

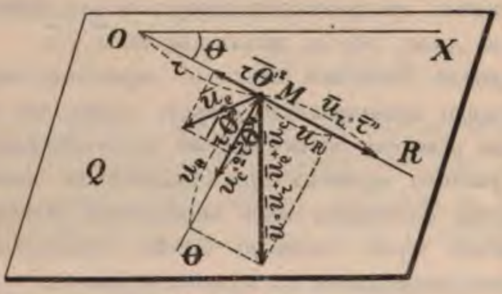
*) Векторъ $-\overline{u}_c$ равный но **прямопротивоположный добавочному ускоренію** точки M названъ проф. *Сомовымъ* **поворотнымъ ускореніемъ**.

будетъ лежать въ плоскости Q и будетъ перпендикулярно къ прямой OR, притомъ пойдетъ направо относительно наблюдателя стоящаго въ точкѣ M по направленію угловой скорости $\overline{\omega}$ и обращеннаго лицомъ по направленію относительной скорости $\overline{v}_r$ точки M, такъ что проекціи $u_{c,R}$ и $u_{c,\theta}$ добавочнаго ускоренія на оси MR и $M\theta$ полярныхъ координатъ точки M опредѣлятся изъ равенствъ:

$$u_{c,R} = 0, \quad u_{c,\theta} = 2r'\theta'.$$

4) *Проекціи ускоренія точки движущейся въ нѣкоторой плоскости на* **оси полярныхъ координатъ.**

Для нахожденія (черт. 88) проекцій u_R и u_θ ускоренія $\overline{u}$ точки M на оси MR и $M\theta$ ея полярныхъ координатъ, мы замѣтимъ, что на всякое движеніе точки M въ плоскости Q можно смотрѣть какъ на составное изъ относительнаго движенія точки по прямой OR, вращающейся въ этой плоскости вокругъ неподвижной точки O и изъ переноснаго движенія вмѣстѣ съ этою прямою; поэтому



Черт. 88.

$$\overline{u} = \overline{u}_r + \overline{u}_e + \overline{u}_c,$$

гдѣ 1) $\overline{u}_r$ есть относительное ускореніе точки M, слѣдовательно величина $\overline{u}_r$ равна $\pm r''$, направленіе же $\overline{u}_r$ идетъ въ ту или другую сторону по оси OR, смотря по знаку r'';

2) $\overline{u}_e$ есть переносное ускореніе точки M, т. е. ускореніе той точки A прямой OR, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ движущаяся точка M; слѣдовательно

$$\overline{u}_e = \overline{\omega^2 r} + \overline{M_A(\tau)}_0 = \overline{r\theta'^2} + \overline{r\theta''},$$

причемъ осестремительное ускореніе $\overline{r\theta'^2}$ точки A направлено отъ точки M къ точкѣ O, а вращательное ускореніе $\overline{r\theta''}$ направлено въ ту или другую сторону по оси $M\theta$ смотря по знаку θ''; наконецъ:

3) $\overline{u}_c$ есть добавочное ускореніе точки M, т. е. величина его равна $\pm 2r'\theta'$ и оно откладывается, какъ мы знаемъ, въ ту или другую сторону по оси $M\theta$, смотря по знаку произведенія $2r'\theta'$.

Итакъ

$$\overline{u} = \overline{r''} + \overline{r(\theta')^2} + \overline{r\theta''} + \overline{2r'\theta'},$$

причемъ первыя два слагаемыхъ правой части этого геометрическаго равен-

ства откладываются указаннымъ образомъ по оси MR, а вторыя—по оси $M\theta$; слѣдовательно

$$u_R = r'' - r(\theta')^2 \text{ и } u_\theta = r\theta'' + 2r'\theta' = \frac{1}{r}(r^2\theta')'.$$

§ 4. Движеніе точки составное изъ движеній n другихъ точекъ.

Движеніемъ точки **составнымъ** *изъ движеній n другихъ точекъ мы будемъ называть такое движеніе точки M, въ которомъ векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$, за каждый промежутокъ времени Δt, равенъ* **геометрической суммѣ** *векторовъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}_1$, $\overline{\Delta s}_2 \ldots \overline{\Delta s}_n$ за тотъ же промежутокъ времени n данныхъ движущихся точекъ M_1, M_2, ... M_n,* т. е.

$$\overline{\Delta s} = \overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \ldots + \overline{\Delta s}_n,$$

причемъ движенія точекъ M_1, $M_2 \ldots M_n$ называются въ такомъ случаѣ **составляющими** *движеніями точки M.*

Въ статьѣ о составныхъ движеніяхъ твердаго тѣла мы увидимъ, какъ составное движеніе точки M можетъ быть **воспроизведено** по заданнымъ составляющихъ его движеніямъ, теперь же обратимъ вниманіе на слѣдующія свойства этого движенія, непосредственно вытекающія изъ его опредѣленія.

Раздѣливъ всѣ члены предъидущаго геометрическаго равенства на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы получимъ равенство:

$$\text{пред.}\frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \text{пред.}\frac{\overline{\Delta s}_1}{\Delta t} + \text{пред.}\frac{\overline{\Delta s}_2}{\Delta t} + \ldots + \text{пред.}\frac{\overline{\Delta s}_n}{\Delta t},$$

т. е.

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n,$$

гдѣ $\overline{v}$ есть скорость въ данный моментъ точки M, а $\overline{v}_1$ $\overline{v}_2 \ldots \overline{v}_n$ суть соотвѣтственно скорости въ тотъ же моментъ n данныхъ точекъ M_1, $M_2, \ldots M_n$.

Такъ какъ предъидущее равенство остается справедливымъ для всѣхъ моментовъ времени, то необходимо, чтобы геометрическія приращенія скоростей этихъ точекъ за промежутокъ времени Δt,

прилегающій къ данному моменту t, удовлетворяли равенству:

$$\overline{\Delta v} = \overline{\Delta v_1} + \overline{\Delta v_2} + \ldots + \overline{\Delta v_n}.$$

Раздѣливъ наконецъ всѣ члены этого геометрическаго равенства на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы получимъ равенство:

$$\text{пред.}\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \text{пред.}\frac{\overline{\Delta v_1}}{\Delta t} + \text{пред.}\frac{\overline{\Delta v_2}}{\Delta t} + \ldots + \text{пред.}\frac{\overline{\Delta v_n}}{\Delta t},$$

т. е.

$$\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \ldots + \overline{u}_n,$$

гдѣ $\overline{u}$ есть ускореніе въ данный моментъ точки M, а $\overline{u}_1\ \overline{u}_2 \ldots \overline{u}_n$ суть соотвѣтственно ускоренія, въ тотъ же моментъ n данныхъ точекъ M_1, $M_2, \ldots M_n$.

Итакъ, *скорость и ускореніе въ каждый данный моментъ движенія точки M* **составного** *изъ движеній n другихъ точекъ M_1, $M_2 \ldots M_n$ выражаются соотвѣтственно* **геометрическими суммами** *скоростей и ускореній* **составляющихъ** *движеній, т. е.*

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_n$$

и

$$\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \ldots + \overline{u}_n.$$

Примѣры:

1) *На всякое движеніе точки* **въ плоскости** *можно смотрѣть какъ на составное изъ* **двухъ** *прямолинейныхъ движеній по двумъ произвольнымъ* **непараллельнымъ** *прямымъ, лежащимъ въ этой плоскости.*

Черт. 89.

Дѣйствительно, положимъ, что точка M (черт. 89) совершаетъ нѣкоторое движеніе въ плоскости Q.

Возьмемъ въ этой плоскости двѣ произвольныя пересѣкающіяся прямыя OA_1 и OA_2 и проведемъ черезъ движущуюся точку M линіи MM_1 и MM_2 параллельныя этимъ прямымъ; въ такомъ случаѣ въ пересѣченіяхъ этихъ линій мы получимъ двѣ точки M_1, M_2, которыя при движеніи точки M въ плоскости Q будутъ совершать соотвѣтственно нѣкоторыя движенія по прямымъ OA_1 и OA_2.

Разложивъ затѣмъ векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s} = \overline{MM'}$ точки M за нѣкоторый промежутокъ времени Δt на два вектора $\overline{MN}$, $\overline{NM'}$, соотвѣтственно параллельные даннымъ двумъ прямымъ OA_1 и OA_2, мы видимъ, что

$$\overline{\Delta s} = \overline{MM'} = \overline{MN} + \overline{NM'} = \overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 ,$$

гдѣ $\overline{\Delta s}_1 = \overline{M_1M'}_1$ и $\overline{\Delta s}_2 = \overline{M_2M'}_2$ суть соотвѣтственно векторы перемѣщеній за тотъ же промежутокъ времени Δt точекъ M_1 и M_2.

Итакъ

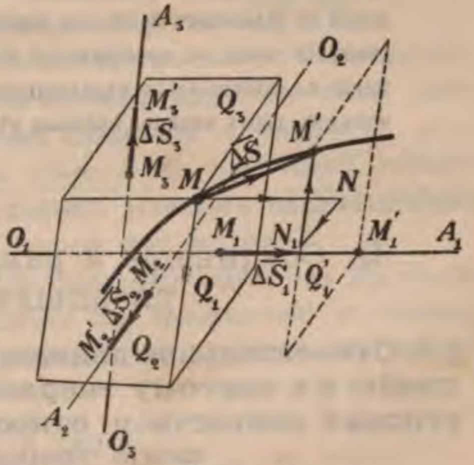
$$\overline{\Delta s} = \overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2,$$

т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ точки M за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ векторовъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}_1$, $\overline{\Delta s}_2$ за тотъ же промежутокъ времени точекъ M_1 и M_2; слѣдовательно движеніе точки M будетъ **составнымъ** изъ движеній точекъ M_1 и M_2 и потому

$$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 \text{ и } \overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2,$$

т. е. скорость и ускореніе точки M будутъ соотвѣтственно равны геометрическимъ суммамъ скоростей и ускореній точекъ M_1 и M_2.

2) *На всякое движеніе точки M въ пространствѣ можно смотрѣть какъ на составное изъ* **трехъ** *прямолинейныхъ движеній по тремъ произвольнымъ* **непараллельнымъ** *и не лежащимъ въ* **одной плоскости** *прямымъ.*



Черт. 90.

Дѣйствительно, положимъ, что точка M (черт. 90) совершаетъ нѣкототорое движеніе.

Возьмемъ въ пространствѣ три произвольныхъ не параллельныхъ и не лежащихъ въ одной плоскости прямыхъ: O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 и проведемъ черезъ движущуюся точку M три плоскости Q_1, Q_2, Q_3 соотвѣтственно параллельная двумъ изъ этихъ прямыхъ до ихъ пересѣченія съ третьею; въ такомъ случаѣ при движеніи точки M эти точки пересѣченій M_1, M_2, M_3 будутъ соотвѣтственно совершать нѣкоторыя движенія по прямымъ O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3.

Разложивъ затѣмъ векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s} = \overline{MM'}$ точки M за нѣкоторый промежутокъ времени Δt на три вектора $\overline{M_1N}$, $\overline{NN_1}$ и $\overline{N_1M'}$ соотвѣт-

ственно параллельные даннымъ тремъ прямымъ, изъ чертежа мы видимъ, что

$$\overline{MN} = \overline{\Delta s_1},$$

гдѣ $\overline{\Delta s_1}$ есть векторъ перемѣщенія за тотъ же промежутокъ времени Δt точки M_1; подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости равенствъ:

$$\overline{NN_1} = \overline{\Delta s_2},\ \overline{N_1M'} = \overline{\Delta s_3},$$

гдѣ $\overline{\Delta s_2}$ и $\overline{\Delta s_3}$ суть соотвѣтственно векторы перемѣщеній за тотъ же промежутокъ времени точекъ M_1 и M_2; слѣдовательно

$$\overline{\Delta s} = MM' = \overline{MN} + \overline{NN_1} + \overline{N_1M'} = \overline{\Delta s_1} + \overline{\Delta s_2} + \overline{\Delta s_3},$$

т. е. движеніе точки M будетъ составнымъ изъ трехъ прямолинейныхъ движеній точекъ M_1, M_2, M_3 и потому

$$\overline{v} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3} \text{ и } \overline{u} = \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_3},$$

т. е. скорость и ускореніе точки M будутъ соотвѣтственно равны геометрическимъ суммамъ скоростей и ускореній точекъ M_1, M_2, M_3.

Примѣчаніе. Нетрудно непосредственно убѣдиться, что разложеніе движенія точки въ данной плоскости болѣе чѣмъ на два прямолинейныхъ движеній по заданнымъ прямымъ, лежащимъ въ этой плоскости, и разложеніе движенія точки въ пространствѣ болѣе чѣмъ на три прямолинейныхъ движеній по заданнымъ не параллельнымъ и не лежащимъ въ одной плоскости прямымъ даютъ неопредѣленныя рѣшенія.

II. Соединеніе и разложеніе движеній твердыхъ тѣлъ.

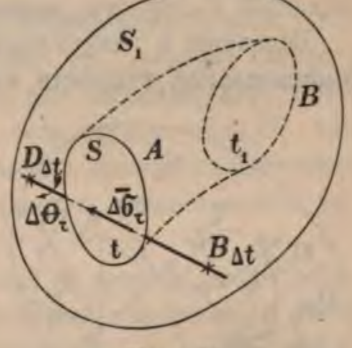
§ 1. Относительное движеніе твердаго тѣла по отношенію къ другому твердому тѣлу. Относительная угловая скорость и относительное угловое ускореніе твердаго тѣла.

Относительнымъ *движеніемъ твердаго тѣла S по отношенію къ твердому тѣлу S_1 называется послѣдовательный переходъ точекъ тѣла S черезъ точки тѣла S_1 или черезъ точки* **неизмѣняемой** *среды, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ S_1.*

Положимъ, что тѣло S (черт. 91) въ нѣкоторый моментъ t занимаетъ въ движущемся тѣлѣ S_1 нѣкоторое положеніе A, а въ моментъ $t_1 = t + \Delta t$ оно занимаетъ въ немъ нѣкоторое положеніе B.

Предположивъ тѣло S_1 неподвижнымъ, мы знаемъ, что тѣло S изъ положенія A можно перевести въ положеніе B **винтовымъ перемѣщеніемъ** его около нѣкоторой **неподвижной** оси $B_{\Delta t}\, D_{\Delta t}$, т. е. поступательнымъ перемѣщеніемъ тѣла вдоль этой оси на нѣкоторый векторъ $\overline{\Delta\sigma}$, называемый скольженіемъ тѣла за этотъ промежутокъ времени Δt, и угловымъ перемѣщеніевъ вокругъ той же оси на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta$, причемъ ось $B_{\Delta t}\, D_{\Delta t}$ называется **среднею винтовою осью** перемѣщенія тѣла за данный промежутокъ времени Δt.

Предположимъ теперь, что ось $B_{\Delta t}\, D_{\Delta t}$ не неподвижна, а **неизмѣнно связана** съ тѣломъ S_1, напр. закрѣплена съ нимъ въ точкахъ $B_{\Delta t}$, $D_{\Delta t}$; въ такомъ случаѣ, сообщивъ тѣлу S **то же** винтовое движеніе вокругъ этой оси, мы видимъ, что оно займетъ **въ тѣлѣ** S_1 требуемое положеніе B **независимо** отъ перемѣщенія этого тѣла S_1.



Черт. 91.

Такимъ образомъ *всякое* **относительное** *перемѣщеніе тѣла S, по отношенію къ тѣлу S_1 можно воспроизвести нѣкоторымъ* **винтовымъ перемѣщеніемъ** *тѣла, около нѣкоторой оси $B_{\Delta t}\, D_{\Delta t}$* **неизмѣнно связанной** *съ тѣломъ S_1, т. е.* **относительнымъ скольженіемъ** *тѣла S на нѣкоторый векторъ $\overline{\Delta\sigma}_r$ вдоль этой оси и* **относительнымъ угловымъ перемѣщеніемъ** *тѣла на нѣкоторый уголъ $\Delta\theta_r$ вокругъ той же оси.*

Предѣльное положеніе $B_r\, D_r$ (черт. 92) *такой оси $B_{\Delta t}\, D_{\Delta t}$ въ тѣлѣ S_1 за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, носитъ названіе* **относительной винтовой оси** *тѣла S въ* **данный моментъ** а

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta\theta_r}{\Delta t}\ \text{и пред.}\ \frac{\Delta\sigma_r}{\Delta t},$$

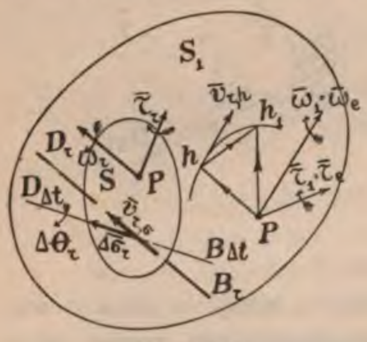
т. е. предѣлы отношеній относительнаго углового перемѣщенія $\Delta\theta_r$ и относительнаго скольженія $\Delta\sigma_r$ тѣла S за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t, къ самому этому проме-

жутку времени Δt, *называются соотвѣтственно* **величинами относительной угловой скорости** *и* **относительной скорости скольженія** *тѣла* S *въ* **данный** *моментъ.*

Относительную угловую скорость тѣла S откладываютъ въ выбранной единицѣ длины [L] отъ его полюса P параллельно относительной винтовой оси тѣла S въ данный моментъ, притомъ въ ту сторону, чтобы относительное угловое перемѣщеніе тѣла $\Delta\theta_r$ относительно этого направленія совершалось **слѣва на право**; наконецъ, относительную скорость скольженія твердаго тѣла откладываютъ по его относительной винтовой оси въ данный моментъ, въ сторону относительнаго скольженія тѣла $\overline{\Delta\sigma}_r$ за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t.

Величины и направленія **относительной угловой скорости** и **относительной скорости скольженія** тѣла въ данный моментъ мы будемъ обозначать соотвѣтственно знаками:

$$\overline{\omega}_r \text{ и } \overline{v}_{r,\sigma}.$$



Черт. 92i

Съ теченіемъ времени величина относительной угловой скорости тѣла S и ея направленіе **внутри тѣла** S_1, вообще говоря, измѣняются, причемъ *предѣлъ отношенія* **геометрическаго** *приращенія* **внутри тѣла** S_1 *относительной угловой скорости тѣла* S *за промежутокъ времени* Δt, *прилегающій къ данному моменту* t, *къ самому этому промежутку называется* **относительнымъ угловымъ ускореніемъ** $\overline{\tau}_r$ *тѣла* S *въ данный моментъ.*

Чтобы нагляднѣе представить это опредѣленіе, надо взять въ твердомъ тѣлѣ S_1 нѣкоторую неизмѣнно съ нимъ связанную точку P_1 и, отложивъ внутри тѣла S_1 векторъ P_1h, геометрически равный относительной угловой скорости $\overline{\omega}_r$ тѣла S въ этотъ моментъ, продѣлать такое построеніе для всѣхъ моментовъ времени.

Геометрическое мѣсто $\widehat{hh_1}$ всѣхъ точекъ тѣла S_1, построенныхъ такимъ образомъ, мы назовемъ **относительнымъ годографомъ относительной угловой скорости** тѣла S, причемъ **относительное угловое ускореніе** $\overline{\tau}_r$ *тѣла* S *по величинѣ и направленію выразится*

пред. $\frac{\overline{hh_1}}{\Delta t} = \overline{v}_{r,h}$, *т. е. будетъ* **геометрически** *равно относительной скорости* $\overline{v}_{r,h}$ *точки* h, *чертящей* **внутри** *твердаго тѣла* S_1 *годографъ* $\widehat{hh_1}$ *относительной угловой скорости тѣла* S.

Данное относительное движенiе твердаго тѣла S въ твердомъ тѣлѣ S_1 можетъ совершаться при какомъ угодно движенiи тѣла S_1; кромѣ того, если твердое тѣло S_1 или неизмѣняемая среда, въ которыхъ совершается данное относительное движенiе тѣла S, **неподвижны**, или предположить ихъ таковыми, то **относительное** движенiе тѣла S совпадаетъ съ его **абсолютнымъ** движенiемъ.

Такимъ образомъ можно сказать, что **относительная** винтовая ось, **относительная** угловая скорость и **относительное** угловое ускоренiе тѣла S суть соотвѣтственно винтовая ось, угловая скорость и угловое ускоренiе въ тотъ же моментъ того **абсолютнаго** движенiя тѣла S, которое оно совершало бы, если твердое тѣло S_1, или неизмѣняемую среду, въ которыхъ происходитъ данное относительное движенiе тѣла S, начиная съ даннаго момента предположить **неподвижными**.

Это замѣчанiе даетъ намъ возможность, не приводя особыхъ доказательствъ, распространить соотвѣтствующимъ образомъ на **относительное** движенiе твердаго тѣла по отношенiю къ другому тѣлу каждую изъ теоремъ **абсолютнаго** движенiя твердаго тѣла.

Приведемъ здѣсь важнѣйшiя изъ этихъ теоремъ.

1) **Относительное** *движенiе твердаго тѣла S по отношенiю къ твердому тѣлу S_1 можно, вообще говоря, воспроизвести* **катанiемъ** *соединеннымъ* **со скольженiемъ** *нѣкоторой линейчатой поверхности, неизмѣнно связанной съ тѣломъ S, по нѣкоторой линейчатой поверхности, неизмѣнно связанной съ тѣломъ S_1, причемъ эти линейчатыя поверхности называются* **винтовыми аксоидами относительнаго движенiя** *тѣла S.*

2) **Относительныя** *скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла S, лежащихъ на его* **относительной** *въ данный моментъ* **винтовой оси** B_rD_r *геометрически равны* **относительной скорости скольженiя** $\overline{v}_{r,\sigma}$ *тѣла S въ данный моментъ.*

3) **Относительная** *скорость* $\overline{v}_r$ *нѣкоторой точки M тѣла S есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **двухъ** *скоростей:*

a) **относительной скорости** $\overline{v}_{r,p}$ **выбраннаго полюса** *P тѣла S, и*

b) **относительной вращательной скорости** $\overline{w}_{r,p} = \overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_p$

точки M вокругъ этого полюса P, выражающейся по величинѣ и направленію линейнымъ моментомъ $\overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_p$ относительно разсматриваемой точки M **относительной** *угловой скорости $\overline{\omega}_r$ тѣла S, отложенной отъ выбраннаго полюса P.*

Такимъ образомъ, подобно скоростямъ точекъ абсолютнаго движенія твердаго тѣла, относительная скорость $\overline{v}_r$ точки M тѣла S выразится равенствомъ:

$$\overline{v}_r = \overline{v}_{r,p} + \overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_p.$$

4) **Относительное ускореніе** $\overline{u}_r$ *нѣкоторой точки M тѣла S есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **трехъ** *ускореній:*

a) **относительнаго ускоренія** $\overline{u}_{r,p}$ **выбраннаго полюса** *P тѣла S,*

b) **относительнаго осестремительнаго ускоренія** $\overline{\omega^2_r r_{\omega_r}}$ *равнаго квадрату относительной угловой скорости ω^2_r тѣла S, умноженному на разстояніе r_{ω_r} разсматриваемой точки до относительной угловой скорости $\overline{\omega}_r$, отложенной отъ выбраннаго полюса P, и*

c) **относительнаго вращательнаго ускоренія** $\overline{M}_M(\overline{\tau}_r)_p$, *выражающагося по величинѣ и направленію линейнымъ моментомъ относительно разсматриваемой точки M* **относительнаго** *углового ускоренія $\overline{\tau}_r$ тѣла S, отложеннаго отъ выбраннаго полюса P.*

Такимъ образомъ, подобно ускореніямъ точекъ абсолютнаго движенія твердаго тѣла, относительное ускореніе $\overline{u}_r$ точки M тѣла S выражается равенствомъ:

$$\overline{u}_r = \overline{u}_{r,p} + \overline{\omega^2_r r_{\omega_r}} + \overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_p.$$

Справедливость всѣхъ этихъ теоремъ очевидна, ибо предположивъ, начиная съ даннаго момента t, тѣло S_1 **неподвижнымъ**, мы знаемъ, что **относительное** движеніе тѣла S совпадетъ съ его **абсолютнымъ** движеніемъ, причемъ винтовые аксоиды, угловая скорость и угловое ускореніе въ данный моментъ **относительнаго** движенія тѣла S совпадутъ соотвѣтственно съ винтовыми аксоидами, угловою скоростью и угловымъ ускореніемъ въ тотъ же моментъ этого **абсолютнаго** движенія тѣла S, для абсолютнаго же движенія твердаго тѣла всѣ высказанныя теоремы нами уже доказаны.

Если тѣло S_1 неподвижно, то, какъ мы замѣтили, относительное движеніе тѣла S совпадаетъ съ его абсолютнымъ движеніемъ; если же тѣло S_1 движется, то тѣло S переносится еще вмѣстѣ съ нимъ въ пространствѣ и относительное движеніе тѣла S въ такомъ случаѣ не совпадаетъ съ его абсолютнымъ движеніемъ. Въ этомъ случаѣ

говорятъ, что **абсолютное** движеніе тѣла S есть **составное** изъ его **относительнаго** движенія въ тѣлѣ S_1 и **переноснаго** движенія вмѣстѣ съ этимъ послѣднимъ, причемъ угловую скорость и угловое ускореніе $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\tau}_1$ тѣла S_1 въ данный моментъ называютъ соотвѣтственно **переносною угловою скоростью** и **переноснымъ угловымъ ускореніемъ** въ тотъ же моментъ тѣла S.

Переносную угловую скорость и **переносное** угловое ускореніе тѣла S въ данный моментъ мы будемъ обозначать соотвѣтственно знаками $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\tau}_e$ *(d'entraînement)*; слѣдовательно

$$\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1 \text{ и } \overline{\tau}_e = \overline{\tau}_1,$$

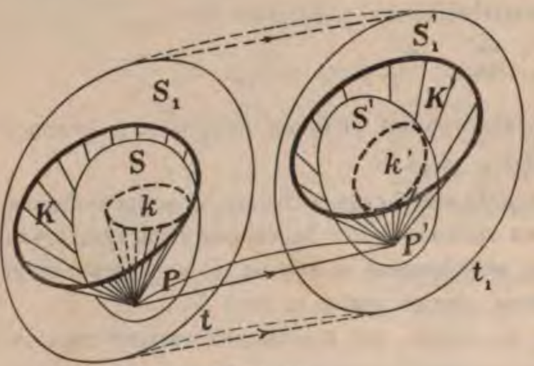
гдѣ $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\tau}_1$ суть соотвѣтственно угловая скорость и угловое ускореніе въ данный моментъ тѣла S_1.

Примѣръ. *На всякій* **общій** *случай движенія твердаго тѣла можно смотрѣть какъ на составное изъ* **переноснаго поступательнаго** *движенія вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P и* **относительнаго вращательнаго** *движенія вокругъ этого полюса P.*

Дѣйствительно, мы знаемъ, что перемѣщеніе твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія за каждый промежутокъ времени можетъ быть воспроизведено вращательнымъ перемѣщеніемъ вокругъ выбраннаго полюса P предполагаемаго **неподвижнымъ** и поступательнымъ перемѣщеніемъ вмѣстѣ съ этимъ полюсомъ; слѣдовательно, если мы заставимъ твердое тѣло S совершать **относительное вращательное** движеніе въ тѣлѣ S_1 вокругъ неизмѣнно съ нимъ связанной точки P по тому же закону, по какому совершаются угловыя перемѣщенія **даннаго** движенія тѣла S; другими словами, если мы заставимъ тѣло S совершать такое относительное вращательное движеніе въ тѣлѣ S_1, что среднія оси **относительныхъ** угловыхъ перемѣщеній за любые промежутки времени будутъ параллельны среднимъ осямъ угловыхъ перемѣщеній за тѣ же промежутки времени **даннаго** движенія тѣла S и угловыя перемѣщенія вокругъ этихъ осей въ **относительномъ** и **данномъ** движеніяхъ за одни и тѣ же промежутки времени тоже будутъ равны и одинаково направлены, и если въ то же время мы сообщимъ тѣлу S_1 поступательное движеніе одинаковое съ движеніемъ выбраннаго полюса P тѣла S, то такое **составное** движеніе тѣла S совпадетъ съ **даннымъ** его движеніемъ; другими словами данное движеніе тѣла S разложится на **относительное вращательное** движеніе въ тѣлѣ S_1 вокругъ неизмѣнно съ нимъ связанной точки P и на **переносное поступательное** движеніе вмѣстѣ съ тѣломъ S_1.

Такое разложеніе даннаго движенія тѣла S можно воспроизвести еще слѣдующимъ образомъ: если мы заставимъ тѣло S совершать вращательное

движеніе около полюса P предполагаемаго неподвижнымъ то тому же закону, по какому совершается вращательное движеніе даннаго движенія твердаго тѣла, то это вращательное движеніе, какъ извѣстно, можно воспроизвести катаніемъ безъ скольженія нѣкотораго **подвижного** конуса k, неизмѣнно связаннаго съ тѣломъ S (черт. 93) по нѣкоторому **неподвижному** конусу K; предположимъ теперь, что конусъ K не неподвиженъ, а неизмѣнно связанъ съ тѣломъ S_1; другими словами сообщимъ конусу K въ то же самое время **поступательное** движеніе одинаковое съ движеніемъ выбраннаго полюса P; въ такомъ случаѣ абсолютное движеніе перваго конуса k совпадетъ съ движеніемъ даннаго тѣла S.



Черт. 93.

Примѣчаніе. Такъ какъ направленія среднихъ осей даннаго движенія твердаго тѣла и угловыя перемѣщенія вокругъ нихъ не зависятъ отъ выбора полюса P, то при разложеніи даннаго движенія твердаго тѣла на **относительное вращательное** движеніе и **переносное поступательное** вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P, первое изъ этихъ движеній не будетъ зависить отъ выбора полюса P и при перемѣнѣ полюса будетъ измѣнятся только **второе**, т. е. **переносное поступательное** движеніе.

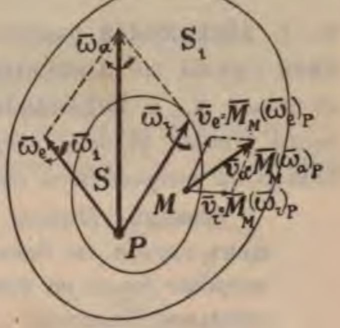
Такимъ образомъ всевозможныя разложенія даннаго движенія твердаго тѣла на относительное вращательное и переносное поступательное движенія могутъ отличаться только ихъ переносными **поступательными** движеніями, относительныя же вращательныя движенія будутъ одни и тѣ же; другими словами при всевозможныхъ такихъ разложеніяхъ даннаго движенія твердаго тѣла указанныя коническія поверхости k, K будутъ однѣ и тѣже и законъ относительнаго катанія первой изъ нихъ по второй будетъ тотъ же самый, **независимо** отъ выбора полюса P.

§ 2. Зависимость между угловыми скоростями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла.

Найдемъ сначала зависимость между угловыми скоростями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движе-

ній твердаго тѣла, когда всѣ эти движенія совершаются вокругъ общаго **неподвижнаго** полюса.

Положимъ, что твердое тѣло S_1 (черт. 94) вращается вокругъ **неподвижной** точки P, а тѣло S совершаетъ въ немъ вокругъ **той же неподвижной** точки нѣкоторое относительное движеніе; въ такомъ случаѣ каждая точка M тѣла S тоже совершаетъ нѣкоторое относительное движеніе въ тѣлѣ S_1, и потому



Черт. 94.

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

т. е. **абсолютная** скорость v_a этой точки M тѣла S равна геометрической суммѣ **относительной** и **переносной** скоростей $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$.

Но мы знаемъ, что

$$\overline{v}_a = \overline{M}_M(\overline{\omega}_a)_P, \quad \overline{v}_r = \overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_P, \quad \overline{v}_e = \overline{M}_M(\overline{\omega}_e)_P,$$

гдѣ черезъ $\overline{\omega}_a$, $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$ мы обозначили соотвѣтственно угловыя скорости абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній тѣла S, причемъ по опредѣленію $\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1$, т. е. **переносная угловая скорость** тѣла S есть угловая скорость $\overline{\omega}_1$ въ тотъ же моментъ тѣла S_1, въ которомъ совершается данное относительное движеніе тѣла S.

Подставивъ эти выраженія въ предыдущее равенство, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$\overline{M}_M(\overline{\omega}_a)_P = \overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_P + \overline{M}_M(\overline{\omega}_e)_P = \overline{M}_M(\overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e)_P,$$

справедливымъ для **всѣхъ** точекъ M тѣла S; слѣдовательно

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

ибо если линейные моменты двухъ векторовъ, отложенныхъ отъ одной и той же точки, относительно всѣхъ центровъ геометрически равны, то и сами эти векторы должны быть **геометрически равны**.

Послѣднее соотношеніе для простоты выведено нами въ предположеніи **неподвижности** общаго полюса P твердыхъ тѣлъ S и S_1, но такъ какъ абсолютная, относительная и переносная угловыя скорости тѣла S **не зависятъ** отъ выбора полюса P и его движенія,

то выведенная нами зависимость остается справедливою при **всевозможныхъ** движеніяхъ тѣлъ S и S_1.

Итакъ, при всякомъ **относительномъ** *движеніи твердаго тѣла S по отношенію къ другому движущемуся твердому тѣлу S_1*

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

т. е. **абсолютная** *угловая скорость $\overline{\omega}_a$ тѣла S равна* **геометрической** *суммѣ его* **относительной** *угловой скорости $\overline{\omega}_r$ по отношенію къ тѣлу S_1 и* **переносной** *угловой скорости $\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1$, геометрически равной угловой скорости $\overline{\omega}_1$ въ данный моментъ тѣла S_1, въ которомъ совершается данное относительное движеніе тѣла S.*

Примѣръ. *Найти выраженіе скоростей точекъ твердаго въ* **общемъ** *случаѣ его движенія, исходя изъ* **разложенія** *даннаго движенія твердаго тѣла на* **относительное вращательное** *и* **переносное поступательное** *движенія.*

Разложивъ данное движеніе твердаго тѣла на относительное вращательное движеніе и переносное поступательное движеніе вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P, мы знаемъ, что скорость $\overline{v}$ всякой точки M твердаго тѣла, какъ скорость составного движенія опредѣлится изъ равенства:

$$\overline{v} = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

но

$$\overline{v}_r = \overline{M}_M (\overline{\omega}_r)_p = \overline{M}_M (\overline{\omega})_p,$$

ибо

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e = \overline{\omega}_r,$$

такъ какъ переносное движеніе **поступательно**, т. е. $\overline{\omega}_e = 0$, кромѣ того по условію разложенія

$$\overline{v}_e = \overline{v}_p;$$

слѣдовательно

$$\overline{v} = \overline{v}_p + \overline{M} (\overline{\omega})_p.$$

Это соотношеніе было выведено нами **непосредственно** въ V § 6 предъидущей главы.

§ 3. Зависимость между угловыми ускореніями абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла.

Найдемъ сначала зависимость между угловыми ускореніями въ данный моментъ абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движе-

ній твердаго тѣла, когда всѣ эти движенія совершаются вокругъ общаго **неподвижнаго** полюса.

Положимъ, что твердое тѣло S_1 (черт. 95) вращается вокругъ **неподвижной** точки P, а тѣло S совершаетъ въ немъ вокругъ **той же неподвижной** точки нѣкоторое относительное движеніе; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

т. е. **абсолютная угловая скорость** тѣла S въ каждый моментъ будетъ равна **геометрической** суммѣ **относительной** и **переносной угловыхъ скоростей** этого тѣла; слѣдовательно и

$$\overline{\Delta\omega}_a = \overline{\Delta\omega}_r + \overline{\Delta\omega}_e,$$

Черт. 95.

гдѣ черезъ $\overline{\Delta\omega}_a$, $\overline{\Delta\omega}_r$, $\overline{\Delta\omega}_e$ мы обозначили соотвѣтствующія геометрическія приращенія угловыхъ скоростей абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній тѣла S за промежутокъ времени Δt, прилегающій къ данному моменту t.

Раздѣливъ всѣ члены послѣдняго геометрическаго равенства на этотъ промежутокъ времени Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы придемъ къ равенству:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}_a}{\Delta t} = \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}_r}{\Delta t} + \text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}_e}{\Delta t}.$$

Но по опредѣленію углового ускоренія твердаго тѣла, ясно, что

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}_a}{\Delta t} = \overline{\tau}_a \ \text{и пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}_e}{\Delta t} = \overline{\tau}_e,$$

гдѣ $\overline{\tau}_a$ и $\overline{\tau}_e$ суть угловыя ускоренія абсолютнаго и переноснаго движеній тѣла S, причемъ подъ **переноснымъ угловымъ ускореніемъ** $\overline{\tau}_e = \overline{\tau}_1$, подобно переносной угловой скорости $\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1$ тѣла S въ данный моментъ, мы подразумѣваетъ угловое ускореніе $\overline{\tau}_1$ въ тотъ же моментъ тѣла S_1, въ которомъ совершается данное относительное движеніе тѣла S.

Такимъ образомъ остается лишь найти выраженіе пред. $\frac{\overline{\Delta\omega}_r}{\Delta t}$,

представляющаго собою скорость $\overline{v}_h$ точки h, чертящей **въ пространствѣ** годографъ относительной скорости $\overline{\omega}_r$ тѣла S, ибо

$$\text{пред.}\frac{\overline{\Delta\omega}_r}{\Delta t}=\text{пред.}\frac{\overline{\omega}_{r,1}-\overline{\omega}_r}{\Delta t}=\text{пред.}\frac{\overline{Ph}_1-\overline{Ph}}{\Delta t}=\text{пред.}\frac{\overline{hh}_1}{\Delta t}=\overline{v}_h.$$

Но на движеніе точки h въ пространствѣ можно смотрѣть какъ на составное изъ **относительнаго** движенія этой точки внутри тѣла S_1 и **переноснаго** движенія вмѣстѣ съ этимъ тѣломъ; слѣдовательно

$$\overline{v}_h=\overline{v}_{r,h}+\overline{v}_{e,h}$$

причемъ по опредѣленію относительнаго углового ускоренія $\overline{\tau}_r$ тѣла S

$$\overline{v}_{r,h}=\overline{\tau}_r,$$

а $\overline{v}_{e,h}$, т. е. переносная скорость въ данный моментъ точки h есть по опредѣленію скорость въ этотъ моментъ той точки тѣла S_1, съ которою совпадаетъ въ данный моментъ точка h; поэтому

$$\overline{v}_{e,h}=\overline{M}_h(\overline{\omega}_e)_P;$$

слѣдоватально

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{\Delta\omega}_r}{\Delta t}=\overline{v}_h=\overline{\tau}_r+\overline{M}_h(\overline{\omega}_e)_P$$

и потому

$$\overline{\tau}_a=\overline{\tau}_r+\overline{\tau}_e+\overline{M}_h(\overline{\omega}_e)_P\,.$$

Это соотношеніе для простоты выведено нами въ предположеніи **неподвижности** общаго полюса P твердыхъ тѣлъ S и S_1, но такъ какъ абсолютная, относительная и переносная угловыя скорости тѣла S, а слѣдовательно и таковыя же угловыя ускоренія этого тѣла **не зависятъ** отъ движенія полюса P, то выведенная нами зависимость остается справедливою при всевозможныхъ движеніяхъ тѣлъ S и S_1.

Обозначивъ наконецъ, подобно предыдущему, для большей наглядности символомъ

$$[\overline{\omega}_e,\ \overline{\omega}_r]_P$$

векторъ $\overline{PN}$ (черт. 95), численно равный площади параллелограмма, построеннаго на $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$, отложенныхъ отъ точки P, и направлен-

ный по перпендикуляру, возставленному изъ точки P къ плоскости этого параллелограмма, **направо** относительно наблюдателя, стоящаго по направленію перваго вектора $\overline{\omega}_e$ и обращеннаго лицомъ къ второму вектору $\overline{\omega}_r$, ясно, что

$$\overline{M}_h(\overline{\omega}_e)_P = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P.$$

Итакъ при всякомъ **относительномъ** *движеніи твердаго тѣла S по отношенію къ другому твердому тѣлу S_1.*

$$\overline{\tau}_a = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e + \overline{\tau}_c,$$

гдѣ

$$\overline{\tau}_c = \overline{M}_h(\overline{\omega}_e)_P = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P,$$

т. е. **абсолютное** *угловое ускореніе $\overline{\tau}_a$ тѣла S есть, вообще говоря, геометрическая сумма* **трехъ** *угловыхъ ускореній:*

1) **относительнаго** *угловаго ускоренія $\overline{\tau}_r$;*

2) **переноснаго** *угловаго ускоренія $\overline{\tau}_e = \overline{\tau}_1$, т. е. угловаго ускоренія $\overline{\tau}_1$ тѣла S_1, въ которомъ совершается данное относительное движеніе тѣла S и такъ называемаго,*

3) **добавочнаго** *или* **дополнительнаго** *угловаго ускоренія $\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P$, численно равнаго площади параллелограмма, построеннаго на переносной и относительной угловыхъ скоростяхъ $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ тѣла S, отложенныхъ отъ выбраннаго полюса P, т. е. равнаго*

$$\omega_e\, \omega_r \sin(\omega_e, \omega_r)$$

и направленнаго по перпендикуляру къ плоскости этого параллелограмма возставленному въ точкѣ P **направо** *относительно наблюдателя, стоящаго по направленію переносной угловой скорости $\overline{\omega}_e$ и обращеннаго лицомъ къ относительной угловой скорости $\overline{\omega}_r$ тѣла S, отложенныхъ отъ выбраннаго посюса P.*

Такимъ образомъ величина **добавочнаго угловаго ускоренія**

$$\tau_c = \omega_e\, \omega_r \sin(\omega_e, \omega_r)$$

обращается въ **нуль** въ **трехъ** случаяхъ:

1) при $\omega_e = 0$, т. е. когда переносная угловая скорость тѣла S равна нулю, напр. при **поступательномъ** движеніи тѣла S_1, въ которомъ совершается данное относительное движеніе тѣла S;

2) при $\omega_r = 0$, т. е. когда относительная угловая скорость тѣла S равна

нулю; напр. при **поступательномъ относительномъ** движеніи тѣла S по отношенію къ тѣлу S_1;

3) при $\overline{\omega}_e \parallel \overline{\omega}_r$, т. е. когда переносная и относительная угловыя скорости тѣла S **параллельны**.

Итакъ, въ то время какъ **абсолютная угловая скорость**

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e$$

твердаго тѣла S, совершающаго относительное движеніе по отношенію къ другому твердому тѣлу S_1, **равна** геометрической суммѣ его относительной и переносной угловыхъ скоростей, **абсолютное угловое ускореніе**

$$\overline{\tau}_a = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e + \overline{\tau}_c,$$

вообще говоря, **не равно** геометрической суммѣ его относительнаго и переноснаго угловыхъ ускореній: здѣсь является еще **добавочное угловое ускореніе**

$$\overline{\tau}_c = \overline{M}_h (\overline{\omega}_e)_p = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P.$$

Обстоятельство вполнѣ аналогичное тому, съ которымъ мы встрѣтились при нахожденіи зависимости между скоростями и ускореніями абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки, совершающей относительное движеніе по отношенію къ движущемуся твердому тѣлу.

Примѣръ. *Найти выраженіе ускореній точекъ твердаго тѣла въ* **общемъ** *случаѣ его движенія, исходя изъ* **разложенія** *даннаго движенія твердаго тѣла на* **относительное вращательное** *и* **переносное поступательное** *движенія.*

Разложивъ данное движеніе твердаго тѣла на относительное вращательное движеніе вокругъ полюса P и переносное поступательное движеніе вмѣстѣ съ этимъ полюсомъ P, мы знаемъ, что ускореніе $\overline{u}$ всякой точки M твердаго тѣла, какъ ускореніе **составного** движенія опредѣлится изъ равенства:

$$\overline{u} = \overline{u}_r + \overline{u}_e + \overline{u}_c.$$

Но такъ какъ въ данномъ случаѣ **переносное** движеніе **поступательно**, то

$$u_c = 0,\ \omega_e = 0,\ \tau_e = 0 \text{ и } \tau_c = 0,$$

слѣдовательно

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e = \overline{\omega}_r$$

и
$$\overline{\tau} = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e + \overline{\tau}_c = \overline{\tau}_r;$$

поэтому
$$\overline{u}_r = \overline{\omega^2_r r_{\omega r}} + \overline{M}_M (\overline{\tau}_r)_p$$
$$= \overline{\omega^2 r_\omega} + \overline{M}_M (\overline{\tau})_p,$$

гдѣ черезъ r_{ω_r} и r_ω мы обозначили соотвѣтственно разстоянія точки M до угловыхъ скоростей $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}$, отложенныхъ отъ выбраннаго полюса P; кромѣ того по условію разложенія
$$\overline{u}_e = \overline{u}_p;$$
слѣдовательно
$$\overline{u} = \overline{u}_p + \overline{\omega^2 r_\omega} + \overline{M}_M (\overline{\tau})_p.$$

Это соотношеніе было выведено нами непосредственно въ предъидущей главѣ V § 10.

§ 4. Зависимость между положеніями мгновенныхъ винтовыхъ осей и между скоростями скольженій абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла.

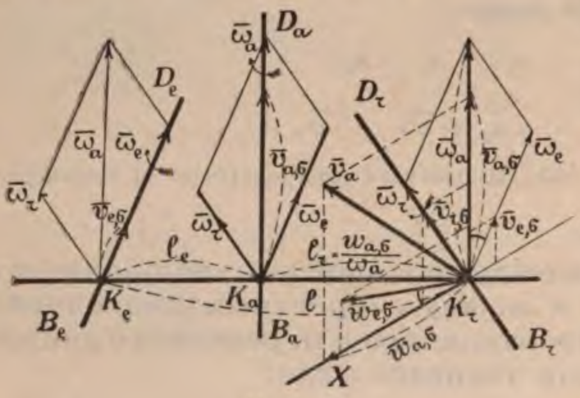
Пусть (черт. 96)
$$B_a D_a,\ B_r D_r,\ B_e D_e$$
будутъ соотвѣтственно положенія **мгновенныхъ винтовыхъ осей** абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла S, совершающаго нѣкоторое относительное движеніе по отношенію къ твердому тѣлу S_1, причемъ подъ мгновенною винтовою осью $B_e D_e$ **переноснаго** движенія тѣла S мы подразумѣваемъ мгновенную винтовую ось въ данный моментъ тѣла S_1; въ такомъ случаѣ нетрудно убѣдиться, что **кратчайшія разстоянія**
$$K_a K_r,\ K_a K_e \text{ и } K_e K_r$$
между этими винтовыми осями въ каждый моментъ лежатъ на **одной** *прямой.*

Дѣйствительно, мы знаемъ (Гл. II, V § 8), что для построенія мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ абсолютнаго движенія тѣла S надо спроектировать абсолютную скорость $\overline{v}_a$ одной изъ его точекъ, напр. конца K_r кратчайшаго разстоянія $K_e K_r = l$ между винтовыми осями $B_e D_e$, $B_r D_r$ переноснаго и относительнаго движеній тѣла S,

на направленіе абсолютной угловой скорости:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e$$

тѣла S въ тотъ же моментъ, отложенной отъ этой точки K_r и построить на полученной проекціи прямоугольникъ съ діагональю $\overline{v}_a$; въ такомъ случаѣ абсолютная скорость $\overline{v}_a$ этой точки разложится на абсолютную скорость скольженія $\overline{v}_{a,\sigma}$ и абсолютную вращательную скорость $\overline{w}_{a,\sigma}$ вокругъ мгновенной винтовой оси B_aD_a абсолютнаго движенія тѣла S, т. е.



Черт. 96.

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{a,\sigma} + \overline{w}_{a,\sigma},$$

и потому, отложивъ отъ этой точки по перпендикуляру къ плоскости построеннаго такимъ образомъ прямоугольника, **направо** относительно наблюдателя расположеннаго по угловой скорости $\overline{\omega}_a$ отложенной отъ точки K_r и обращеннаго лицомъ къ абсолютной скорости $\overline{v}_a$ этой точки, отрѣзокъ

$$K_rK_a = \frac{w_{a,\sigma}}{\omega_a},$$

мы получимъ точку K_a мгновенной винтовой оси B_aD_a абсолютнаго движенія тѣла S.

Докажемъ теперь, что построенная такимъ образомъ точка K_a будетъ лежать на самомъ кратчайшемъ разстояніи $K_eK_r = l$ или на его продолженіяхъ въ ту или другую стороны.

Съ этою цѣлью замѣтимъ, что *абсолютныя скорости* $\overline{v}_a$ *всѣхъ точекъ тѣла* S, *лежащихъ въ данный моментъ на кратчайшемъ разстояніи* $l = K_eK_r$ *или на его продолженіяхъ*, **перпендикулярны** *къ этой прямой*; дѣйствительно, для всѣхъ точекъ тѣла S

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

но

$$\overline{v}_r = \overline{v}_{r,\sigma} + \overline{w}_{r,\sigma} \text{ и } \overline{v}_e = \overline{v}_{e,\sigma} + \overline{w}_{e,\sigma},$$

гдѣ черезъ $\overline{v}_{r,\sigma}$ и $\overline{v}_{e,\sigma}$ мы обозначали соотвѣственно скорости скольженій относительнаго и переноснаго движеній тѣла S въ данный моментъ, а черезъ $\overline{w}_{r,\sigma}$ и $\overline{w}_{e,\sigma}$ — относительную и переносную вращательныя скорости разсматриваемой точки тѣла S вокругъ соотвѣтствующихъ имъ мгновенныхъ винтовыхъ осей B_rD_r, B_eD_e относительнаго и переноснаго движеній этого тѣла, и потому

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{r,\sigma} + \overline{v}_{e,\sigma} + \overline{w}_{r,\sigma} + \overline{w}_{e,\sigma};$$

но для точекъ тѣла S, лежащихъ на кратчайшемъ разстояніи $K_eK_r = l$ или его продолженіяхъ, четыре скорости лѣвой части послѣдняго геометрическаго равенства будутъ очевидно **перпендикулярны** къ этому кратчайшему разстоянію l, слѣдовательно и абсолютныя скорости $\overline{v}_a$ такихъ точекъ будутъ тоже **перпендикулярны** къ этой прямой и потому абсолютная скорость $\overline{v}_a$ точки K_r будетъ лежать въ плоскости перпендикулярной къ l въ этой точкѣ K_r, т. е. въ одной плоскости съ $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_a$, отложенными отъ точки K_r; слѣдовательно l и $K_r K_a$, какъ перпендикуляры въ точкѣ K_r къ одной и той же плоскости, будутъ лежать на одной прямой.

Итакъ, точка K_a лежитъ на кратчайшемъ разстояніи $K_eK_r = l$ или его продолженіяхъ, и потому отрѣзки K_aK_e и K_aK_r будутъ перпендикулярны къ осямъ B_eD_e, B_rD_r, а слѣдовательно и къ оси B_aD_a, т. е. эти отрѣзки будутъ **кратчайшими разстояніями** между осью B_aD_a и осями B_eD_e и B_rD_r; другими словами *кратчайшія разстоянія между мгновенными винтовыми осями абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній твердаго тѣла въ каждый моментъ лежатъ на одной прямой.*

Найдемъ теперь **общія формулы** *для опредѣленія положенія точки K_a и для величины абсолютной скорости скольженія $\overline{v}_{a,\sigma}$ тѣла S.*

Съ этою цѣлью обозначимъ кратчайшее разстояніе K_rK_a (черт. 96) черезъ l_r и условимся это разстояніе l_r считать **положительнымъ** когда оно откладывается въ сторону кратчайшаго разстоянія $l = K_rK_e$ и **отрицательнымъ**, когда оно откладывается въ противоположную сторону; въ такомъ случаѣ нетрудно убѣдиться, что l_r **по величинѣ и по знаку** опредѣлится изъ равенства:

$$l_r = \frac{v_a \cos(v_a, X)}{\omega_a},$$

гдѣ $\overline{v}_a$ есть абсолютная скорость той точки тѣла S, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ точка K_r, а направленіе оси K_rX перпендикулярно

къ плоскости $(l, \overline{\omega}_a)$ и идетъ направо относительно наблюдателя стоящаго по направленію $\overline{\omega}_a$ въ точкѣ K_e кратчайшаго разстоянія $l = K_e K_r$.

Дѣйствительно, такъ какъ ось $K_r X$ перпендикулярна къ l, т. е. лежитъ въ одной плоскости съ абсолютною скоростью $\overline{v}_a$ точки K_r тѣла S и съ его угловою скоростью $\overline{\omega}_a$, отложенною отъ этой точки и кромѣ того перпендикулярна къ $\overline{\omega}_a$, то ясно, что

$$v_a \cos(v_a, X) = \pm w_{a,\sigma},$$

гдѣ $\overline{w}_{a,\sigma}$ есть абсолютная вращательная скорость точки K_r тѣла S, вокругъ мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ абсолютного движенія этого тѣла, причемъ верхній знакъ надо брать, когда направленіе вращательной скорости $\overline{w}_{a,\sigma}$ совпадаетъ съ направленіемъ оси $K_r X$, а нижній знакъ—когда оно противоположно этому направленію. Но изъ построенія точки K_a ясно, что отрѣзокъ l_r, будучи равенъ $\dfrac{w_{a,\sigma}}{\omega_a}$, въ первомъ случаѣ пойдетъ въ сторону l, а во второмъ въ противоположную сторону, т. е. по условію въ первомъ случаѣ будетъ положительнымъ, а во второмъ отрицательнымъ; слѣдовательно равенство

$$l_r = \frac{v_a \cos(v_a, X)}{\omega_a}$$

будетъ справедливо по величинѣ и по знаку.

Принявъ затѣмъ во вниманіе, что для всякой точки тѣла S, какъ мы видѣли:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{r,\sigma} + \overline{v}_{e,\sigma} + \overline{w}_{r,\sigma} + \overline{w}_{e,\sigma}$$

и что для точки K_r этого тѣла

$$w_{r,\sigma} = 0,$$

такъ какъ эта точка лежитъ на мгновенной винтовой оси $B_r D_r$ относительнаго вращенія тѣла S, мы приходимъ къ равенству:

$$v_a \cos(v_a, X) = v_{r,\sigma} \cos(v_{r,\sigma}, X) + v_{e,\sigma} \cos(v_{e,\sigma}, X) +$$
$$+ w_{e,\sigma} \cos(w_{e,\sigma}, X).$$

Въ этой формулѣ величины скоростей скольженія $v_{r,\sigma}$ и $v_{e,\sigma}$ по существу положительны; условимся теперь эти скорости считать положительными или отрицательными, смотря по тому, совпадаютъ ихъ направленія съ направленіями соотвѣтствующихъ имъ угловыхъ скоростей $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$, или противоположны этимъ направленіямъ; кромѣ того условимся углы составляемые направленіями $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$, отложенными отъ точки K_r, съ направленіемъ $\overline{\omega}_a$, отложеннымъ отъ той же точки, считать тоже положительными или отри-

цательными, смотря по тому, идутъ эти направленія направо, или налѣво относительно наблюдателя, стоящаго по направленію $\overline{\omega}_a$ въ точкѣ K_e кратчайшаго разстоянія $K_eK_r = l$; въ такомъ случаѣ нетрудно непосредственно убѣдиться (черт. 96) въ справедливости равенствъ:

$$(v_{r,\sigma}) \cos (v_{r,\sigma}, X) = v_{r,\sigma} \sin (\omega_a, \omega_r),$$

$$(v_{e,\sigma}) \cos (v_{e,\sigma}, X) = v_{e,\sigma} \sin (\omega_a, \omega_e),$$

гдѣ черезъ $(v_{r,\sigma})$ и $(v_{e,\sigma})$ мы обозначали абсолютныя величины скоростей скольженія $v_{r,\sigma}$ и $v_{e,\sigma}$.

Замѣтимъ наконецъ, что для точки K_r

$$w_{e,\sigma} = l\omega_e$$

и что направленіе переносной вращательной скорости $\overline{w}_{e,\sigma}$ этой точки, будучи перпендикулярно къ плоскости (B_eD_e, l), будетъ перпендикулярно къ переносной угловой скорости $\overline{\omega}_e$ тѣла S; слѣдовательно:

$$w_{e,\sigma} \cos (w_{e,\sigma} X) = l\omega_e \cos (\omega_a, \omega_e),$$

и потому, подставивъ найденныя величины въ выраженіе l_r, мы придемъ къ равенству:

$$l_r = \frac{l\omega_e \cos (\omega_a, \omega_e) + [v_{r,\sigma} \sin (\omega_a, \omega_r) + v_{e,\sigma} \sin (\omega_a, \omega_e)]}{\omega_a}$$

***справедливому при вышеуказанныхъ условіяхъ* по величинѣ *и* по знаку.**

Подобнымъ же образомъ, обозначивъ черезъ l_e кратчайшее разстояніе K_eK_a и условившись считать это разстояніе положительнымъ, когда оно откладывается въ сторону кратчайшаго разстоянія $l = K_eK_r$ и отрицательнымъ, когда оно откладывается въ противоположную сторону, мы придемъ къ очевидному равенству:

$$l_e + l_r = l.$$

Принявъ кромѣ того во вниманіе, что въ силу геометрическаго равенства:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

$$\omega_a = \omega_r \cos (\omega_r, \omega_a) + \omega_e \cos (\omega_e, \omega_a)$$

и воспользовавшись предъидущимъ выраженіемъ для l_r, мы получимъ:

$$l_e = \frac{l\omega_r \cos (\omega_a, \omega_r) - [v_{r,\sigma} \sin (\omega_a, \omega_r) + v_{e,\sigma} \sin (\omega_a, \omega_e)]}{\omega_a}.$$

Итакъ мы нашли общія формулы для опредѣленія положенія точки пересѣченія K_a мгновенной винтовой оси абсолютнаго движенія тѣла S съ кратчайшимъ разстояніемъ $l = K_e K_r$ между мгновенными винтовыми осями его переноснаго и относительнаго движеній.

Если относительное и переносное движенія тѣла S не сопровождаются скольженіями, т. е. $v_{r,\sigma} = 0$ и $v_{e,\sigma} = 0$, *то*

$$l_r = \frac{l\omega_e \cos(\omega_a, \omega_e)}{\omega_a} \text{ и } l_e = \frac{l\omega_r \cos(\omega_a, \omega_r)}{\omega_a};$$

слѣдовательно

$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{\omega_e \cos(\omega_a, \omega_e)}{\omega_r \cos(\omega_a, \omega_r)}.$$

Но, въ силу геометрическаго равенства:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

мы знаемъ, что

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{\sin(\omega_a, \omega_r)}{\sin(\omega_a, \omega_e)},$$

гдѣ подъ углами (ω_a, ω_r) и (ω_a, ω_e) мы подразумѣваемъ ихъ абсолютныя величины; слѣдовательно въ этомъ случаѣ

$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{tg(\omega_a, \omega_r)}{tg(\omega_a, \omega_e)},$$

гдѣ подъ углами (ω_a, ω_r) и (ω_a, ω_e) тоже надо подразумѣвать ихъ абсолютныя величины.

Найдемъ теперь величину и направленіе скорости скольженія $\overline{v}_{a,\sigma}$ абсолютнаго движенія тѣла S; условившись съ этою цѣлью величину $v_{a,\sigma}$ абсолютной скорости скольженія тѣла S считать положительною или отрицательною, смотря по тому совпадаетъ ея направленіе съ направленіемъ $\overline{\omega}_a$ абсолютной угловой скорости тѣла S, или противоположно этому направленію, и замѣтивъ, что $\overline{v}_{a,\sigma}$ есть проекція абсолютной скорости

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{r,\sigma} + \overline{v}_{e,\sigma} + \overline{w}_{e,\sigma}$$

точки K_r тѣла S на направленіе $\overline{\omega}_a$, мы приходимъ къ равенствамъ:

$$v_{a,\sigma} = v_a \cos(v_a, \omega_a) =$$

$$= v_{r,\sigma} \cos(\omega_a, \omega_r) + v_{e,\sigma} \cos(\omega_a, \omega_e) - l\omega_e \sin(\omega_a, \omega_e),$$

въ которыхъ величинамъ $v_{a,\sigma}$, $v_{r,\sigma}$, $v_{e,\sigma}$ и угламъ (ω_a, ω_r), (ω_a, ω_e) надо приписывать тѣ или другіе знаки согласно вышеприведеннымъ условіямъ.

Такимъ образомъ, *если*

$$v_{r,\sigma} = 0 \text{ и } v_{e,\sigma} = 0,$$

то

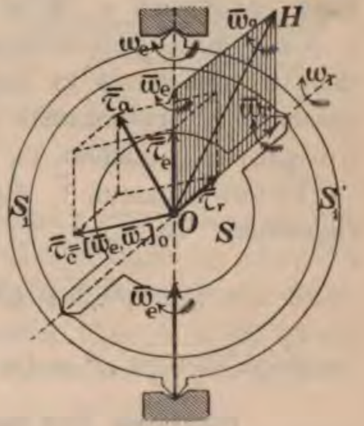
$$v_{a,\sigma} = - l\omega_e \sin(\omega_a, \omega_e),$$

т. е. абсолютное движенiе тѣла S, вообще говоря, сопровождается **скольженiемъ** *даже въ томъ случаѣ, если составляющiя его относительное и переносное движенiя совершаются* **безъ скольженiй,** *но кратчайшее разстоянiе l между осями относительнаго и переноснаго вращенiй не равно нулю и оси эти не параллельны, т. е. если оси переноснаго и относительнаго вращенiй* **не лежатъ въ одной плоскости.**

§ 5. Частные случаи соединенiй двухъ вращенiй твердаго тѣла.

1) *Соединенiе вращенiй твердаго тѣла вокругъ двухъ* **пересѣкающихся** *осей.*

Положимъ, что твердое тѣло S вращается вокругъ оси **неизмѣнно связанной** съ твердымъ тѣломъ S_1, а это послѣднее вращается вокругъ нѣкоторой **неподвижной** оси, причемъ оси эти пересѣкаются въ точкѣ O; напримѣръ (черт. 97) торъ S вращается съ относительною угловою скоростью $\overline{\omega}_r$ въ гнѣздахъ кольца S_1, а это кольцо въ то же время вращается съ угловою скоростью $\overline{\omega}_e$ вокругъ **неподвижной** вертикальной оси.



Черт. 97.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ относительная и переносная скорости точки O тѣла S равны нулю, то будетъ равна нулю и абсолютная скорость этой точки, т. е. абсолютное движенiе тѣла S будетъ вращенiемъ вокругъ **неподвижной** точки O.

Угловая скорость $\overline{\omega}_a$ **абсолютнаго движенiя** *тѣла S опредѣлится изъ равенствъ:*

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e, \quad \omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r\omega_e \cos(\omega_r, \omega_e)}$$

т. е. будетъ діагональю параллелограмма построеннаго на $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$, *причемъ эта же діагональ будетъ* **мгновенною осью** *абсолютнаго движенія тѣла* S.

Угловыя ускоренія $\overline{\tau}_r$, $\overline{\tau}_e$ **относительнаго** и **переноснаго** вращеній тѣла S въ этомъ случаѣ будутъ направлены въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ угловымъ скоростямъ $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$, т. е. соотвѣственно по осямъ относительнаго и переноснаго вращеній тѣла S, причемъ $\tau_r = \pm\, \omega'_r$ и $\tau_e = \pm\, \omega'_e$.

Угловое ускореніе $\overline{\tau}_a$ **абсолютнаго движенія** тѣла S опредѣлится изъ равенства:

$$\overline{\tau}_a = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e + \overline{\tau}_c,$$

гдѣ **дополнительное** угловое ускореніе

$$\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_e,\ \overline{\omega}_r]_0$$

численно равно площади параллелограмма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ тѣла S, отложенныхъ отъ точки O, т. е. $\tau_c = \omega_e \omega_r \sin(\omega_e, \omega_r)$ и направлено по перпендикуляру возставленному въ этой точкѣ къ плоскости этого параллелограмма **направо** относительно наблюдателя стоящаго въ точкѣ O по направленію $\overline{\omega}_e$ и обращеннаго лицомъ къ $\overline{\omega}_r$.

Такимъ образомъ $\overline{\tau}_a$ *будетъ діагональю параллелепипеда построеннаго на* $\overline{\tau}_r$, $\overline{\tau}_e$, $\overline{\tau}_c$, *отложенныхъ отъ точки* O, *т. е.*

$$\tau_a = \sqrt{\tau_r^2 + \tau_e^2 + \tau_c^2 + 2\tau_r \tau_e \cos(\tau_r, \tau_e)} =$$

$$= \sqrt{(\omega_r')^2 + (\omega'_e)^2 + (\omega_e \omega_r)^2 \sin^2(\omega_e, \omega_r) + 2\omega_r' \omega_e' \cos(\omega_r, \omega_e)}.$$

Примѣчаніе. Если относительное и переносное вращенія тѣла S совершаются **равномѣрно**, т. е. $\tau_r = 0$ и $\tau_e = 0$,

то

$$\overline{\tau}_a = \overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_e,\ \overline{\omega}_r]_0;$$

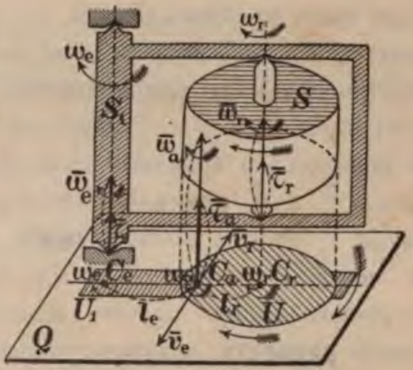
такимъ образомъ въ этомъ случаѣ **абсолютное** угловое ускореніе тѣла S совпадаетъ съ его **дополнительнымъ** ускореніемъ $\overline{\tau}_c$, что и **непосредственно** очевидно, ибо въ этомъ случаѣ угловая скорость $\overline{\omega}_a$ абсолютнаго движенія тѣла S, равномѣрно вращаясь съ угловою скоростью $\overline{\omega}_e$ вокругъ точки O, описываетъ около этой точки круговую коническую поверхность и потому угловое ускореніе $\overline{\tau}_a$ абсолютнаго движенія твердаго тѣла S, какъ скорость

точки H, чертящей годографъ угловой скорости $\overline{\omega}_a$ этого тѣла, будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$\overline{\tau}_a = \overline{v}_H = \overline{M}_H(\overline{\omega}_e)_0 = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_a]_0 = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_0 = \overline{\tau}_e.$$

2) *Соединеніе вращеній твердаго вокругъ двухъ* **параллельныхъ** *осей съ угловыми скоростями одинаково или противоположно направленными.*

Положимъ, что твердое тѣло S вращается вокругъ оси **неизмѣнно связанной** съ тѣломъ S_1, а это послѣднее вращается вокругъ **неподвижной** оси, причемъ оси эти **параллельны**; напр. (черт. 98) цилиндръ S вращается съ относительною угловою скоростью $\overline{\omega}_r$ въ гнѣздахъ рамы S_1, а эта послѣдняя вращается съ угловою скоростью $\overline{\omega}_e$ вокругъ **неподвижной** оси, параллельной оси цилиндра.



Черт. 98.

Такъ какъ переносное и относительное движенія тѣла S въ этомъ случаѣ параллельны неподвижной плоскости Q перпендикулярной къ оси тѣла S_1, то и абсолютное движеніе тѣла S будетъ параллельно этой плоскости, т. е. всѣ его точки лежащія на линіяхъ перпендикулярныхъ къ плоскости Q будутъ совершать **одинаковыя** движенія и потому намъ достаточно разсмотрѣть лишь движенія проекцій тѣлъ S и S_1 на эту плоскость Q; такимъ образомъ вопросъ приводится къ разсмотрѣнію составнаго вращенія плоской фигуры въ ея плоскости.

Итакъ положимъ, что въ плоскости Q имѣется полоса U_1, вращающаяся съ угловою скоростью $\overline{\omega}_e$ вокругъ неподвижнаго центра C_e, и кругъ U вращающійся съ относительною угловою скоростью $\overline{\omega}_e$ вокругъ центра C_r, неизмѣнно связаннаго съ этою полосою; опредѣлить абсолютное движеніе круга U.

Угловая скорость $\overline{\omega}_a$ **абсолютнаго** движенія фигуры U опредѣлится изъ равенства

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

т. е., *если угловыя скорости $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$ будутъ* **одинаково** *направлены,*

то величина угловой скорости $\overline{\omega}_a$ *будетъ равна* **суммѣ** *величинъ угловыхъ скоростей* $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$ *и направленіе ея совпадаетъ съ ихъ* **общимъ** *направленіемъ, въ противномъ же случаѣ величина угловой скорости* $\overline{\omega}_a$ *будетъ равна* **разности** *величинъ угловыхъ скоростей* $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$ *и направленіе ея совпадетъ съ направленіемъ* **большей** *изъ нихъ.*

Угловое ускореніе $\overline{\tau}_a$ **абсолютнаго** движенія фигуры U опредѣлится изъ равенства:

$$\overline{\tau}_a = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e,$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ $\overline{\tau}_c = 0$, ибо $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$ параллельны; кромѣ того $\tau_e = \pm \omega'_e$ и $\tau_r = \pm \omega'_r$ и направленія $\overline{\tau}_e$ и $\overline{\tau}_r$ совпадаютъ или противоположны направленіямъ соотвѣтствующихъ имъ угловыхъ скоростей $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$, т. е. идутъ соотвѣтственно по осямъ относительнаго и переноснаго вращеній тѣла S; слѣдовательно *если угловыя ускоренія* $\overline{\tau}_r$ *и* $\overline{\tau}_e$ **одинаково** *направлены, то величина угловою ускоренія* $\overline{\tau}_a$ *будетъ равна* **суммѣ** *величинъ угловыхъ ускореній* $\overline{\tau}_r$, $\overline{\tau}_e$ *и направленіе его совпадетъ въ ихъ* **общимъ** *направленіемъ, въ противномъ же случаѣ величина углового ускоренія* $\overline{\tau}_a$ *будетъ равна* **разности** *величинъ угловыхъ ускореній* $\overline{\tau}_r$, $\overline{\tau}_e$ *и направленіе его совпадетъ съ направленіемъ* **бо́льшаго** *изъ нихъ.*

Наконецъ нетрудно убѣдиться, что *мгновенный центръ* C_a **абсолютнаго** *движенія фигуры* K *будетъ находиться на линіи, соединяющей центры* C_e *и* C_r *составляющихъ вращеній* **между** *этими центрами, если* $\overline{\omega}_e$ *и* $\overline{\omega}_r$ **одинаково** *направлены и* **внѣ**, *со стороны* **большей** *угловой скорости, если* $\overline{\omega}_e$ *и* $\overline{\omega}_r$ *направлены* **противоположно**, *причемъ въ томъ и другомъ случаяхъ разстоянія* $C_aC_r = l_r$ *и* $C_aC_e = l_e$ *центра* C_a *до центровъ* C_r *и* C_e *обратно пропорціональны величинамъ соотвѣтствующихъ имъ угловыхъ скоростей* ω_r, ω_e, *т. е.*

$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{\omega_e}{\omega_r} \text{ или } \omega_r l_r = \omega_e l_e.$$

Дѣйствительно, абсолютная скорость $\overline{v}_a$ такой точки C_a круга U будетъ равна нулю, ибо

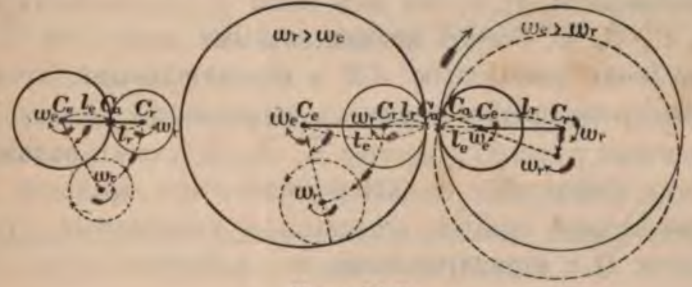
$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

но

$$v_r = \omega_r l_r \text{ и } v_e = \omega_e l_e;$$

слѣдовательно
$$v = v_e$$
кромѣ того направленія этихъ скоростей $\overline{v}_r$ и $\overline{v}_e$, будучи перпендикулярны къ плоскости осей, въ томъ и другомъ случаяхъ будутъ **прямопротивоположны,** и потому $\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e = 0$, т. е. точка C_a будетъ **мгновеннымъ центромъ** абсолютнаго движенія фигуры K.

Примѣчаніе. Если отношеніе величинъ угловыхъ скоростей переноснаго и относительнаго вращеній фигуры U сохраняетъ **постоянную величину**, т. е
$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{\omega_e}{\omega_r} = const.,$$
то точка C_a будетъ сохранять **постоянное положеніе** на линіи центровъ $C_e C_r$; слѣдовательно геометрическія мѣста положеніи этой точки на неподвижной плоскости Q и на плоскости фигуры U будутъ соотвѣтственно **окружности**



Черт. 99 *).

радіусовъ $C_e C_a = l_e$ и $C_r C_a = l_r$, описанныя около центровъ C_e, C_r, причемъ эти же окружности будутъ соотвѣтственно **неподвижною и подвижною центроидами** даннаго составного вращенія фигуры U.

Здѣсь возможны **три случая** (черт. 99):

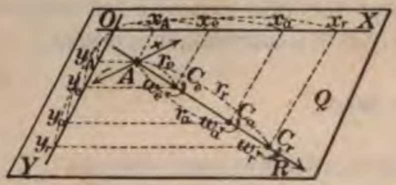
1) если $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ **одинаково** направлены, то точка C_a лежитъ, какъ извѣстно, между точками C_e, C_r, слѣдовательно подвижная и неподвижная центроиды будутъ обладать **внѣшнимъ** касаніемъ:

2) если $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ **противоположно** направлены и **не равны**, то точка C_a, какъ мы знаемъ, лежитъ на продолженіи линіи $C_e C_r$ со стороны большей изъ угловыхъ скоростей ω_e, ω_r; слѣдовательно въ этомъ случаѣ подвижная и неподвижная центроиды будутъ обладать **внутреннимъ** касаніемъ, причемъ если $\omega_r > \omega_e$, то подвижная центроида будетъ объемлемою окружностью, а неподвижная—объемлющею, если же $\omega_e > \omega_r$, то подвижная центроида будетъ объемлющею окружностью, а неподвижная—объемлемою;

*) На этомъ чертежѣ направленія стрѣлокъ при ω_r надо замѣнить на противоположныя.

3) если наконецъ $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ противоположно направлены, но равны по величинѣ, то этотъ характерный случай носитъ названіе пары вращеній и будетъ нами разобранъ отдѣльно.

Найдемъ теперь **формулу** для опредѣленія положенія мгновеннаго центра C_a составного вращенія плоской фигуры въ ея плоскости.



Черт. 100.

Замѣтивъ съ этою цѣлью (черт. 100), что центры C_a C_e, C_r въ каждый моментъ лежатъ на **одной** прямой, возьмемъ на этой прямой **произвольную** точку A и приписавъ линіи центровъ опредѣленное направленіе AR, условимся:

1) разстоянія r_a, r_e, r_r отъ этой точки A до соотвѣтствующихъ центровъ C_a, C_e, C_r считать **положительными**, когда они откладываются по этому направленію AR и **отрицательными**, когда они откладываются по противоположному направленію;

2) величины угловыхъ скоростей $\overline{\omega}_a$, $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ считать **положительными**, когда направленія соотвѣтствующихъ имъ вращеній совершаются по часовой стрѣлкѣ относительно наблюдателя, стоящаго на плоскости Q и **отрицательными** въ противоположномъ случаѣ; наконецъ

3) величины скоростей $\overline{v}_a$, $\overline{v}_e$, $\overline{v}_r$ той точки фигуры U, съ которою въ данный моментъ совпадаетъ выбранная точка A, считать **положительными**, когда онѣ направлены **на лѣво** относительно наблюдателя стоящаго въ этой точкѣ A на плоскости Q и обращеннаго лицомъ по направленію AR и **отрицательными** въ противоположномъ случаѣ.

Въ такомъ случаѣ **геометрическимъ** равенствамъ:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e \text{ и } \overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e,$$

будутъ соотвѣтствовать **алгебраическія** равенства:

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e \text{ и } v_a = v_r + v_e,$$

остающіяся справедливыми при **всевозможныхъ** знакахъ входящихъ въ нихъ величинъ; кромѣ того мы знаемъ, что

$$v_a = \omega_a r_a, \ v_e = \omega_e r_e, \ v_r = \omega_r r_r,$$

причемъ послѣднія три равенства, какъ нетрудно непосредственно убѣдиться, будутъ тоже справедливы при всевозможныхъ знакахъ величинъ ω_a, ω_e, ω_r, r_a, r_e, r_r.

Дѣйствительно, если указанныя шесть величинъ положительны, то и величины соотвѣтствующихъ имъ скоростей v_a, v_e, v_r точки A тоже будутъ положительны, при измѣненіи же знака одной изъ этихъ шести величинъ и величина соотвѣтствующей ей скорости v_a, v_e, v_r точки A тоже измѣняетъ свой знакъ.

Подставивъ эти выраженія въ предъидущее равенство, мы приходимъ къ равенству:

$$\omega_a r_a = \omega_e r_e + \omega_r r_r$$

справедливому при **всевозможныхъ** знакахъ входящихъ въ него величинъ, слѣдовательно положеніе центра C_a опредѣлится изъ равенства:

$$r_a = \frac{\omega_e r_e + \omega_r r_r}{\omega_e + \omega_r}$$

Вообще въ разсматриваемомъ случаѣ два **алгебраическихъ** *равенства:*

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \text{ и } \omega_a r_a = \omega_e r_e + \omega_r r_r$$

при вышеуказанныхъ условіяхъ относительно знаковъ входящихъ въ нихъ величинъ даютъ намъ возможность опредѣлить по **величинѣ** *и по* **знаку**, *т. е. по* **величинѣ** *и* **направленію** *любыя двѣ изъ входящихъ въ нихъ величинъ, когда остальныя четыре извѣстны.*

Примѣчаніе. Для нахожденія координатъ мгновеннаго центра C_a, помножимъ всѣ члены равенства:

$$\omega_a r_a = \omega_e r_e + \omega_r r_r$$

на *cos* угла (черт. 100) между направленіями AR и OX; въ такомъ случаѣ, замѣтивъ, что r_a, r_e, r_r откладываются въ ту или другую сторону по направленію AR, мы приходимъ къ очевидному равенству:

$$\omega_a r_{a,x} = \omega_e r_{e,x} + \omega_r r_{r,x}$$

гдѣ черезъ $r_{a,x}$, $r_{e,x}$, $r_{r,x}$ мы обозначили соотвѣтственно проекціи векторовъ $\overline{r_a}$, $\overline{r_e}$, $\overline{r_r}$ на ось OX, слѣдовательно:

$$r_{a,x} = x_a - x_A\,,\ r_{e,x} = x_e - x_A\,,\ r_{r,x} = x_r - x_A\,.$$

Принявъ наконецъ во вниманіе, что $\omega_a = \omega_e + \omega_r$ и подставивъ найденныя выраженія въ предъидущее равенство, мы получимъ:

$$\omega_a x_a = \omega_e x_e + \omega_r x_r;$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости равенства:

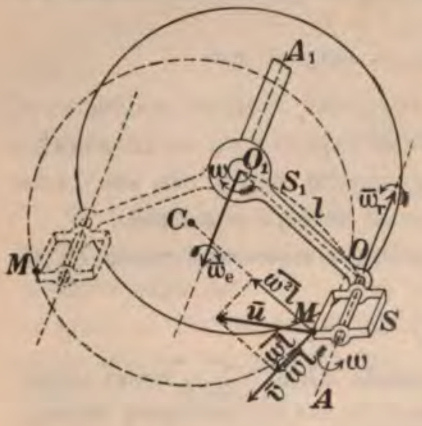
$$\omega_a y_a = \omega_e y_e + \omega_r y_r;$$

слѣдовательно

$$\begin{cases} x_a = \dfrac{\omega_e x_e + \omega_r x_r}{\omega_e + \omega_r}, \\ y_a = \dfrac{\omega_e y_e + \omega_r y_r}{\omega_e + \omega_r}. \end{cases}$$

3) **Пара вращеній.** *«Парою вращеній» называется соединеніе двухъ вращеній твердаго тѣла вокругъ* **параллельныхъ** *осей съ* **равными** *но* **противоположно** *направленными угловыми скоростями.*

Положимъ напримѣръ (черт. 101), что тѣло S вращается съ относительною угловою скоростью $\overline{\omega}_r$ вокругъ оси OA, **неизмѣнно** связанной съ тѣломъ S_1, которое въ свою очередь вращается вокругъ **неподвижной** оси O_1A_1 **параллельной** OA съ угловою скоростью $\overline{\omega}_e$, причемъ $\overline{\omega}_e = -\overline{\omega}_r$; т. е. величины этихъ угловыхъ скоростей **равны**: $\omega_e = \omega_r = \omega$, направленія же ихъ **противоположны**.



Черт. 101.

Въ этомъ случаѣ абсолютная угловая скорость тѣла S

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e = 0$$

во все время его движенія будетъ равна нулю, т. е. абсолютное движеніе этого тѣла будетъ **поступательнымъ**; слѣдовательно *всѣ линіи неизмѣнно связанныя съ тѣломъ S при его движеніи будутъ оставаться* **параллельными**, *траекторіи всѣхъ его точекъ M будутъ* **одинаковы** *и скорости, а также и ускоренія всѣхъ его точекъ въ данный моментъ будутъ* **геометрически равны.**

Въ справедливости послѣднихъ заключеній нетрудно и **непосредственно** убѣдиться.

Дѣйствительно, скорость $\overline{v}$ абсолютнаго движенія любой точки M тѣла S опредѣляется изъ равенствъ:

$$\overline{v} = \overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e = \overline{M}_M(\overline{\omega}_r)_O + \overline{M}_M(\overline{\omega}_e)_{O_1};$$

но $\overline{\omega}_e = -\overline{\omega}_r$, т. е. $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\omega}_r$ представляютъ собою **пару векторовъ** съ плечомъ l, равнымъ разстоянію O_1O между осями OA и O_1A_1, слѣдовательно $\overline{v}$ есть **линейный моментъ** этой пары векторовъ, и потому *ни величина ни направленіе* $\overline{v}$ *не зависятъ отъ выбора точки* M; другими словами скорости **всѣхъ** точекъ тѣла S въ данный моментъ будутъ **геометрически равны,** а именно по величинѣ равны произведенію ωl одного изъ пары векторовъ $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ на ея плечо l и направлены по перпендикуляру къ плоскости этой пары слѣва на право относительно наблюдателя расположеннаго по одному изъ векторовъ $\overline{\omega}_e$ и обращеннаго лицомъ къ другому $\overline{\omega}_r$; поэтому **абсолютное** движеніе тѣла S будетъ **поступательнымъ** и потому траекторіи всѣхъ его точекъ будутъ **одинаковы**, но точка O тѣла S описываетъ около неподвижной точки O_1 окружность радіуса $l = O_1O$; слѣдовательно траекторія любой точки M этого тѣла будетъ тоже окружность радіуса l, причемъ, такъ какъ скорости точки M и точки O **геометрически равны,** то центръ C окружности, описываемой точкою M тѣла S построится на основаніи геометрическаго равенства

$$\overline{MC} = \overline{OO}_1;$$

наконецъ ускореніе $\overline{u}$ точки M опредѣлится изъ равенства:

$$\overline{u} = \overline{\omega^2 l} + \overline{\omega' l},$$

т. е. будетъ равно геометрической суммѣ **центростремительнаго** ускоренія $\overline{u}_\rho = \overline{\omega^2 l}$ и **касательнаго** ускоренія $\overline{u}_k = \overline{v}' = \overline{\omega' l}$.

Итакъ, всякая **пара вращеній**, одна изъ осей которыхъ неподвижна, а другая неизмѣнно связана съ обоими тѣлами даетъ въ результатѣ **круговое поступательное** движеніе; наоборотъ, *всякое* **круговое, поступательное движеніе** *тѣла* S *можно разложить на* **пару вращеній** *или воспроизвести парою вращеній, плечо которой* l *равно радіусу* r *даннаго кругового, поступательнаго движенія, а величины угловыхъ скоростей и угловыхъ ускореній опредѣляются изъ равенствъ:*

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ и } \omega' = \frac{v'}{r},$$

гдѣ r *есть радіусъ окружностей, описываемыхъ точками тѣла* S, *а* v *общая величина скоростей этихъ точекъ.*

Примѣчаніе. Вообще на всякое поступательное движеніе твердаго тѣла S съ точки зрѣнія скоростей $\overline{v}$ его точекъ въ данный моментъ можно смотрѣть, какъ на результатъ пары вращеній, линейный моментъ которой равенъ $\overline{v}$, т. е. какъ на результатъ такой пары вращеній, плоскость которой перпендикулярна къ $\overline{v}$, а величина угловыхъ скоростей $\overline{\omega}$ и разстояніе между осями l удовлетворяетъ условію $\omega l = v$.

Однако отсюда не слѣдуетъ заключать, что всякое поступательное движеніе твердаго тѣла можно **воспроизвести** парою вращеній, но только, — что **въ данный моментъ** скорости точекъ даннаго поступательнаго движенія тѣла S и скорости точекъ тѣла S подверженнаго такой парѣ вращеній будутъ геометрически равны, причемъ ни положеніе плоскости пары, ни положеніе ея самой въ этой плоскости, ни въ отдѣльности величины ω ея угловыхъ скоростей и плеча l не имѣютъ значенія на результатъ, такъ какъ заданіе линейнаго момента $\overline{v}$ такой пары векторовъ требуетъ только, чтобы плоскость этой пары была перпендикулярна къ $\overline{v}$ и чтобы произведеніе $\omega l = v$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему **кинематическому** значенію линейнаго момента пары векторовъ: **линейный моментъ** *угловыхъ скоростей* **пары вращеній** *геометрически равенъ* **скорости** $\overline{v}$ *получающагося отъ соединенія такихъ вращеній* **поступательнаго** *движенія твердаго тѣла.*

4) *Соединеніе вращеній твердаго тѣла вокругъ двухъ осей* **не лежащихъ** *въ одной плоскости.*

Положимъ, что твердое тѣло S (черт. 102) вращается съ относительною угловою скоростью $\overline{\omega}_r$ вокругъ оси **неизмѣнно связанной** съ тѣломъ S_1, а это послѣднее вращается съ угловою скоростью $\overline{\omega}_e$ вокругъ нѣкоторой **неподвижной** оси, причемъ оси эти **не лежатъ** въ одной плоскости.

Угловая скорость $\overline{\omega} = \overline{\omega}_a$ и угловое ускореніе $\overline{\tau} = \overline{\tau}_a$ абсолютнаго движенія тѣла S опредѣлятся какъ въ случаѣ соединенія вращеній вокругъ пересѣкающихся осей изъ равенствъ:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,$$

$$\overline{\tau} = \overline{\tau}_a = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e + \overline{\tau}_c,$$

гдѣ $\overline{\tau}_r$ и $\overline{\tau}_e$ будутъ направлены въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ угловымъ скоростямъ $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$, т. е. соотвѣтственно по осямъ относительнаго и переноснаго вращаній тѣла S, причемъ $\tau_r = \pm \omega'_r$ и $\tau_e = \pm \omega'_e$.

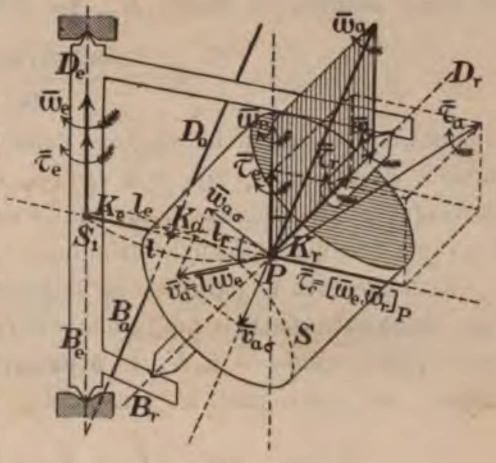
Наконецъ **дополнительное** угловое ускореніе

$$\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P$$

будетъ численно равно площади параллелограмма построеннаго на угловыхъ скоростяхъ $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ тѣла S, отложенныхъ отъ выбраннаго полюса P, т. е. $\tau_c = \omega_e \omega_r \ sin(\omega_e, \omega_r)$ и направлено по перпендикуляру, возставленному изъ точки P къ плоскости этого параллелограмма, **направо** относительно наблюдателя, стоящаго въ точкѣ P по направленію $\overline{\omega}_e$ и обращеннаго лицомъ къ $\overline{\omega}_r$.

Если относительное и переносное вращенія тѣла S **равномѣрны**, т. е. τ_e и τ_r равны нулю, то

$$\overline{\tau} = \overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P.$$



Черт. 102.

Для нахожденія мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ и скорости скольженія $v_{a,\sigma}$ абсолютнаго движенія тѣла S обозначимъ черезъ l кратчайшее разстояніе $K_e K_r$ между осями переноснаго и относительнаго вращеній тѣла S; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что ось $B_a D_a$, будучи параллельна угловой скорости $\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e$ абсолютнаго движенія тѣла, пересѣкаетъ это кратчайшее разстояніе или его продолженія въ нѣкоторой точкѣ K_a, причемъ для построенія этой точки надо разложить абсолютную скорость $\overline{v}_a$ точки K_r

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{a,\sigma} + \overline{w}_{a,\sigma}$$

на абсолютную скорость скольженія $\overline{v}_{a,\sigma}$ и на абсолютную вращательную скорость $\overline{w}_{a,\sigma}$ вокругъ мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ тѣла S въ данный моментъ, для чего, какъ мы знаемъ, достаточно спроектировать абсолютную скорость $\overline{v}_a$ этой точки на направленіе $\overline{\omega}_a$ абсолютной угловой скорости, отложенной отъ этой точки и построивъ на этой проекціи прямоугольникъ съ діагональю $\overline{v}_a$, возставить въ точкѣ K_r къ плоскости этого прямоугольника **направо**

относительно наблюдателя, стоящаго въ этой точкѣ по направленію $\overline{\omega}_a$ и обращеннаго лицомъ къ $\overline{v}_a$, перпендикуляръ

$$l_r = K_r K_a = \frac{w_{a,\sigma}}{\omega_a} = \frac{v_a \sin(v_a, \omega_a)}{\omega_a}.$$

Условившись кромѣ того это разстояніе l_r считать **положительнымъ**, когда оно откладывается въ сторону кратчайшаго разстоянія $l = K_r K_e$ и **отрицательнымъ** въ противоположномъ случаѣ и замѣтивъ, что абсолютная скорость $\overline{v}_a$ точки K_r равна $l\omega_e$ и направлена по перпендикуляру къ плоскости $(\overline{\omega}_e, l)$, направо относительно наблюдателя стоящаго въ точкѣ K_e по направленію $\overline{\omega}_e$ и обращеннаго лицомъ къ точкѣ K_r, мы приходимъ къ равенству:

$$l_r = \frac{l\omega_e \cos(\omega_e, \omega_a)}{\omega_a},$$

справедливому, какъ не трудно непосредственно убѣдиться, по величинѣ и по знаку, ибо при $\cos(\omega_e, \omega_a) > 0$ отрѣзокъ l_r отложится въ сторону кратчайшаго разстоянія $l = K_r K_e$, въ противномъ же случаѣ—въ противоположную сторону.

Условившись подобнымъ же образомъ разстояніе $l_e = K_e K_a$ считать **положительнымъ**, когда оно откладывается въ сторону кратчайшаго разстоянія $l = K_e K_r$ и **отрицательнымъ** въ противоложномъ случаѣ, мы приходимъ къ равенству:

$$l_e + l_r = l,$$

откуда, принявъ во вниманіе, что

$$\omega_a = \omega_r \cos(\omega_r, \omega_a) + \omega_e \cos(\omega_e, \omega_a),$$

находимъ:

$$l_e = l - l_r = \frac{l\omega_r \cos(\omega_r, \omega_a)}{\omega_a};$$

слѣдовательно

$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{\omega_e \cos(\omega_e, \omega_a)}{\omega_r \cos(\omega_r, \omega_a)} = \frac{\operatorname{tg}(\omega_r, \omega_a)}{\operatorname{tg}(\omega_e, \omega_a)},$$

ибо въ силу геометрическаго равенства $\overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r = \overline{\omega}_a$, мы знаемъ, что

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{\sin(\omega_r, \omega_a)}{\sin(\omega_e, \omega_a)}.$$

Итакъ точка пересѣченія K_a мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ абсолютнаго движенія тѣла S съ кратчайшимъ разстояніемъ $l = K_e K_r$ между мгновенными винтовыми осями переноснаго и относительнаго движеній этого тѣла въ разсматриваемомъ случаѣ опредѣляется изъ равенствъ:

$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{\operatorname{tg}(\omega_r, \omega_a)}{\operatorname{tg}(\omega_e, \omega_a)} \quad \text{и} \quad l_e + l_r = l,$$

въ которыхъ разстоянія $l_e = K_e K_a$ и $l_r = K_r K_a$ считаются **положительными**, *если они откладываются по кратчайшему разстоянію $l = K_e K_r$ и* **отрицательными** *въ противоположномъ случаѣ; такимъ образомъ:*

1) *если отношеніе $\frac{l_r}{l_e}$* **положительно**, *то точка K_a будетъ лежать* **между** *точками K_e, K_r;*

2) *если же это отношеніе* **отрицательно**, *то точка K_a будетъ лежать на* **продолженіи** *кратчайшаго разстоянія $l = K_e K_r$ со стороны той изъ точекъ K_e, K_r, которой соотвѣтствуетъ* **ме́ньшая** *изъ* **абсолютныхъ** *величинъ l_e, l_r.*

Построивъ такимъ образомъ точку K_a мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ абсолютнаго движенія тѣла S и проведя черезъ эту точку линію параллельную абсолютной угловой скорости

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e$$

этого тѣла, мы найдемъ положеніе самой винтовой оси $B_a D_a$ абсолютнаго движенія тѣла S.

Геометрическое мѣсто положеній мгновенной винтовой оси $B_a D_a$ тѣла S **въ пространствѣ** опредѣлитъ **неподвижный винтовой аксоидъ** абсолютнаго движенія этого тѣла, а геометрическое мѣсто положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей **внутри тѣла** S дастъ намъ **подвижной** винтовой аксоидъ того же движенія, причемъ **подвижной винтовой** аксоидъ, какъ извѣстно, катится и скользитъ вдоль образующихъ **неподвижнаго** винтового аксоида.

Для опредѣленія абсолютной скорости скольженія $\overline{v}_{a,\sigma}$ тѣла S условимся величину ея считать **положительною**, когда направленіе ея совпадаетъ съ направленіемъ абсолютной угловой скорости $\overline{\omega}_a$ тѣла S и **отрицательною** въ противоположномъ случаѣ; углы же

(ω_a, ω_e) и (ω_a, ω_r), образованные этими направленіями $\overline{\omega}_a$, $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ отложенными отъ точки K_r, считать **положительными**, когда $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ откладываются отъ точки K_r **направо** относительно наблюдателя стоящаго въ точкѣ K_e по направленію $\overline{\omega}_a$ и обращеннаго лицомъ къ точкѣ K_r и **отрицательными**, когда они откладываются **налѣво**; въ такомъ случаѣ нетрудно непосредственно убѣдиться въ справедливости равенствъ:

$$v_{a,\sigma} = v_a \cos(v_a, \omega_a) = -v_a \sin(\omega_a, \omega_e)$$
$$= -l\omega_e \sin(\omega_a, \omega_e)$$

Такимъ образомъ, *если оси B_eD_e и B_rD_r составляющихъ вращеній* **не лежатъ** *въ одной плоскости, т. е. не пересѣкаются и непараллельны, то составное или абсолютное движеніе тѣла S* **всегда** *сопровождается* **скольженіемъ**.

Примѣчаніе. Если величины угловыхъ скоростей $\overline{\omega}_e$, $\overline{\omega}_r$ составляющихъ вращеній во все время движеніе сохраняютъ **постоянное отношеніе**, то углы (ω_e, ω_a) и (ω_r, ω_a) будутъ сохранять **постоянныя величины**, т. е.

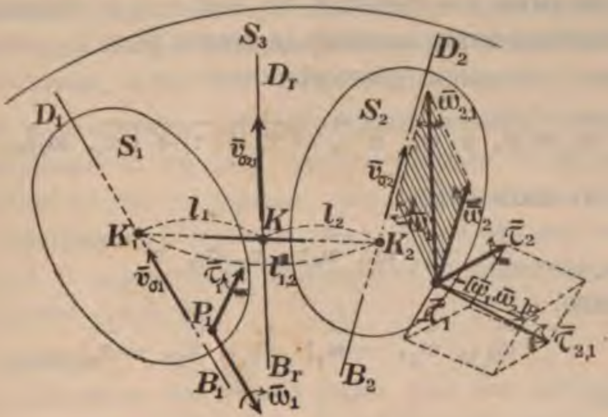
$$\frac{l_r}{l_e} = \frac{tg\,(\omega_r, \omega_a)}{tg\,(\omega_e, \omega_a)} = const;$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ точка K_a все время будетъ сохранять **постоянное положеніе** на линіи K_eK_r и потому геометрическія мѣста положеній этой точки въ **тѣлѣ** S и въ **пространствѣ** будутъ соотвѣтственно **окружности** радіусовъ l_e, l_r, описанныя около центровъ K_e, K_r въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ осямъ B_eD_e, B_rD_r составляющихъ вращеній, а геометрическія мѣста положеній мгновенной винтовой оси B_aD_a абсолютнаго движенія тѣла S въ **самомъ** этомъ **тѣлѣ** и въ **пространствѣ** будутъ соотвѣтственно линейчатыя поверхности, образованныя вращеніями линіи B_aD_a около осей B_eD_e и B_rD_r составляющихъ вращеній, т. е, около осей, не лежащихъ въ одной плоскости съ осью B_aD_a. Такія линейчатыя поверхности называются **однополыми гиперболоидами вращенія**, такъ какъ сѣченія такихъ поверхностей плоскостями, проходящими черезъ ихъ оси, будутъ нѣкоторыя **гиперболы** и онѣ могутъ быть получены вращеніемъ гиперболы около ея не пересѣкающей оси.

Такимъ образомъ (черт. 109) *въ этомъ случаѣ абсолютное движеніе тѣла S можно* **воспроизвести** *катаніемъ соединеннымъ со скольженіемъ нѣкотораго однополаго гиперболоида вращенія*, **неизмѣнно связаннаго** *съ тѣломъ S, по нѣкоторому таковому-же* **неподвижному** *гиперболоиду.*

§ 6. Опредѣленіе относительнаго движенія двухъ твердыхъ тѣлъ по ихъ абсолютнымъ движеніямъ.

Опредѣлить относительное движеніе твердаго тѣла S_2 (черт. 103) по отношенію къ другому движущемуся твердому тѣлу S_1 это значитъ по угловымъ скоростямъ $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, угловымъ ускореніямъ $\overline{\tau}_1$, $\overline{\tau}_2$, скоростямъ скольженія $\overline{v}_{\sigma 1}$, $\overline{v}_{\sigma 2}$ и положеніямъ мгновенныхъ винтовыхъ осей B_1D_1, B_2D_2 данныхъ движеній тѣлъ S_1, S_2 въ пространствѣ опредѣлить въ каждый данный моментъ угловую скорость $\overline{\omega}_{2,1}$, угловое ускореніе $\overline{\tau}_{2,1}$, скорость скольженія $\overline{v}_{\sigma 2,1}$ и положеніе



Черт. 103.

мгновенной винтовой оси B_rD_r относительнаго движенія твердаго тѣла S_2 по отношенію къ твердому тѣлу S_1.

Этотъ же вопросъ носитъ еще названіе **разложенія** даннаго движенія твердаго тѣла S_2 на **относительное** движеніе по отношенію къ другому движущемуся тѣлу S_1 и **переносное** движеніе вмѣстѣ съ этимъ послѣднимъ. Нетрудно убѣдиться, что *вопросъ о* **разложеніи** *даннаго движенія твердаго тѣла приводится къ рѣшенному уже нами вопросу о* **соединеніи двухъ** *движеній твердаго тѣла.*

Дѣйствительно, предположимъ, что **данныя** движенія тѣлъ S_1 и S_2 совершаются не въ пространствѣ, а въ нѣкоторой **неизмѣняемой средѣ** S_3; *въ такомъ случаѣ относительное движеніе тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1 не будетъ зависить отъ движенія этой среды S_3.*

Вообразимъ теперь, что средѣ S_3 сообщено въ данный моментъ движеніе **противоположное данному движенію тѣла** S_1, т. е.

такое движеніе, мгновенныя винтовыя оси котораго, начиная съ даннаго момента, будутъ совпадать съ мгновенными винтовыми осями даннаго движенія тѣла S_1, а угловыя скорости и скорости скольженія будутъ во все время соотвѣтственно равны, но противоположны по направленію угловымъ скоростямъ и скоростямъ скольженія этого тѣла S_1; въ такомъ случаѣ твердое тѣло S_1, начиная съ даннаго момента, будетъ оставаться **неподвижнымъ** и потому движеніе тѣла S_2 **въ пространствѣ** начиная съ даннаго момента будетъ совпадать съ его **относительнымъ** движеніемъ по отношенію къ тѣлу S_1; но движеніе тѣла S_2 въ пространствѣ въ этомъ случаѣ будетъ **составнымъ** изъ **даннаго** его движенія и **переноснаго** движенія **противоположнаго данному движенію тѣла** S_1; слѣдовательно по формуламъ составного движенія:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e, \text{ и } \overline{\tau}_a = \overline{\tau}_r + \overline{\tau}_e + [\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r]_P,$$

подставивъ въ нихъ вмѣсто:

$$\overline{\omega}_a, \ \overline{\omega}_r, \ \overline{\omega}_e; \ \overline{\tau}_a, \ \overline{\tau}_r, \ \overline{\tau}_e$$

соотвѣтственно:

$$\overline{\omega}_{2,1}, \ \overline{\omega}_2, \ -\overline{\omega}_1; \ \overline{\tau}_{2,1}, \ \overline{\tau}_2, \ -\overline{\tau}_1,$$

мы получимъ:

$$\overline{\omega}_{2,1} = \overline{\omega}_2 + (-\overline{\omega}_1) = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1,$$

$$\overline{\tau}_{2,1} = \overline{\tau}_2 + (-\overline{\tau}_1) + [-\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_{P_2} = \overline{\tau}_2 - \overline{\tau}_1 - [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_{P_2},$$

гдѣ подъ символомъ $[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_{P_2}$ мы подразумѣваемъ векторъ численно равный площади параллелограмма построеннаго на векторахъ $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, отложенныхъ отъ выбраннаго полюса P_2 тѣла S_2 и направленный отъ точки P_2 по перпендикуляру къ плоскости этого параллелограмма **направо** относительно наблюдателя, стоящаго въ полюсѣ P_2 по направленію перваго вектора $\overline{\omega}_1$ и обращеннаго лицомъ по направленію второго вектора $\overline{\omega}_2$.

Примѣчаніе. Подобнымъ же образомъ положеніе мгновенной винтовой оси и скорость скольженія относительнаго движенія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1 опредѣлятся изъ формулъ II § 4 этой главы, если мы замѣнимъ въ нихъ:

$$\overline{\omega}_a, \ \overline{\omega}_e, \ \overline{\omega}_r; \ \ \overline{v}_{a,\sigma}, \ \overline{v}_{e,\sigma}, \ \overline{v}_{r,\sigma}; \ \ l, \ l_e, \ l_r$$

соотвѣтственно на:

$$\overline{\omega}_{2,1}, -\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2;\quad \overline{v}_{\sigma 2,1}, -\overline{v}_{\sigma 1},\quad \overline{v}_{\sigma 2};\quad l_{1,2},\ l_1,\ l_2,$$

гдѣ черезъ $l_{1,2}$ мы обозначили кратчайшее разстояніе K_1K_2 между мгновенными винтовыми осями абсолютныхъ движеній тѣлъ S_1, S_2, а черезъ l_1, l_2—соотвѣтственно кратчайшія разстоянія KK_1, KK_2 между относительною винтовою осью B_rD_r тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1 и винтовыми осями B_1D_1, B_2D_2 абсолютныхъ движеній тѣлъ S_1, S_2, причемъ нетрудно непосредственно убѣдиться, что относительныя движенія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1 и тѣла S_1 по отношенію къ тѣлу S_2 будутъ движеніями **противоположными**, т. е. эти относительныя движенія въ каждый моментъ будутъ имѣть **общую** винтовую ось, а угловыя скорости, скорости скольженія и угловыя ускоренія этихъ относительныхъ движеній будутъ соотвѣтственно **равны**, но **противоположно** направлены.

Итакъ, на элементы **относительнаго** *движенія твердаго тѣла S_2 по отношенію къ другому твердому тѣлу S_1 въ каждый данный моментъ можно смотрѣть какъ на элементы въ тотъ же моментъ* **составного** *движенія тѣла S_2 изъ даннаго его движенія, соединеннаго съ переноснымъ движеніемъ* **противоположнымъ** *данному движенію тѣла S_1.*

Примѣры.

1) *Положимъ мы имѣемъ (черт. 104) двѣ круговыхъ съ неподвижными осями C_1A_1, C_2A_2 цилиндрическихъ поверхностей S_1, S_2, касательныхъ вдоль ихъ общей въ данный моментъ образующей CA, притомъ такъ между собою сцѣпленныхъ, что при движеніи онѣ катятся одна по другой* **безъ скольженія**. *Найти относительное движеніе второго цилиндра S_2 по отношенію къ первому S_1 при вращеніи, этого послѣдняго съ угловою скоростью $\overline{\omega}_1$ и угловымъ ускореніемъ $\overline{\tau}_1$ вокругъ его оси C_1A_1.*

Здѣсь возможны два случая: **внутренняго** и **внѣшняго** касаній данныхъ цилиндрическихъ поверхностей; въ первомъ случаѣ угловыя скорости этихъ цилиндровъ будутъ **одинаково** направлены, а во второмъ — **противоположно**.

Такъ какъ въ томъ и другомъ случаяхъ катаніе цилиндра S_2 по цилиндру S_1 по условію происходитъ безъ скольженія, т. е. дуги $\widehat{\Delta s_1}$, $\widehat{\Delta s_2}$ между точками соприкосновеній въ началѣ и въ концѣ даннаго безконечно-малаго промежутка времени Δt сѣченій этихъ цилиндровъ плоскостью перпендикулярною къ ихъ осямъ **равны**, то равны и скорости этихъ точекъ,

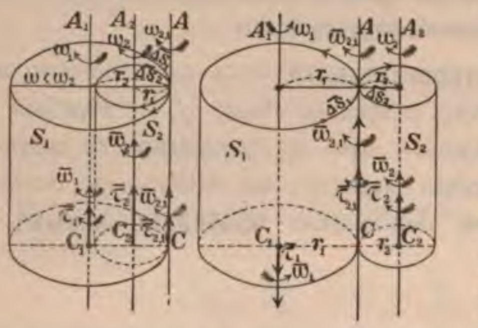
т. е. $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ и потому

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}, \text{ т. е. } \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Найдя такимъ образомъ величину и направленіе $\overline{\omega}_2$ абсолютной угловой скорости цилиндра S_2, мы знаемъ, что его **относительная** угловая скорость $\overline{\omega}_{2,1}$ по отношенію къ цилиндру S_1 опредѣлится изъ равенства

$$\overline{\omega}_{2,1} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1,$$

т. е. *величина* **относительной** *угловой скорости* $\overline{\omega}_{2,1}$ *въ этомъ случаѣ будетъ равна* **суммѣ** *величинъ угловыхъ скоростей* $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, *если онѣ* **противоположно** *направлены, т. е. при* **внѣшнемъ** *касаніи и — ихъ* **разности**, *если онѣ* **одинаково** *направлены, т. е. при* **внутреннемъ** *касаніи.*



Черт. 104.

Вообще, условившись въ этомъ случаѣ угловыя скорости направленныя въ **одну** сторону считать **положительными**, а — въ **другую** — **отрицательными**, мы знаемъ, что относительная угловая скорость $\omega_{2,1}$ по **величинѣ** и по **знаку**, т. е. по величинѣ и направленію опредѣлится изъ **алгебраическаго** равенства:

$$\omega_{2,1} = \omega_2 - \omega_1.$$

Замѣтимъ кромѣ того, что въ разсматриваемомъ случаѣ *общая въ данный моментъ образующая CA цилиндрическихъ поверхностей будетъ* **мгновенною осью** *въ этотъ моментъ* **относительнаго** *движенія одного изъ цилиндровъ по отношенію къ другому*, ибо относительныя перемѣщенія точекъ этой оси за безконечно-малый промежутокъ времени Δt будутъ безконечно-малыми величинами **высшаго** порядка т. е. относительныя скорости точекъ этой прямой въ данный моментъ будутъ равны нулю; слѣдовательно эта прямая будетъ **мгновенною осью** въ этотъ моментъ разсматриваемаго относительнаго движенія.

Наконецъ нетрудно убѣдиться, что

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{r_1}{r_2},$$

ибо въ разсматриваемомъ случаѣ $\tau_1 = \pm\, \omega'_1$, $\tau_2 = \pm\, \omega'_2$, причемъ $\overline{\tau}_1$,

$\overline{\tau}_2$ направлены въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ угловымъ скоростямъ $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, смотря по знакамъ производныхъ ω'_1, ω'_2; слѣдовательно:

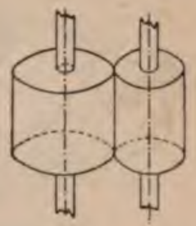
$$\overline{\tau}_{2,1} = \overline{\tau}_2 - \overline{\tau}_1 - [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_{O_1} = \overline{\tau}_2 - \overline{\tau}_1,$$

такъ какъ $\overline{\omega}_1 \parallel \overline{\omega}_2$ и потому, условившись угловыя ускоренія, направленія которыхъ совпадаютъ съ выбраннымъ направленіемъ **положительныхъ** угловыхъ скоростей считать **положительными**, а въ противномъ случаѣ—**отрицательными**, мы придемъ къ **алгебраическому** равенству:

$$\tau_{2,1} = \tau_2 - \tau_1,$$

опредѣляющему относительное угловое ускореніе $\tau_{2,1}$ по **величинѣ** и по **знаку**, т. е. опредѣляющему $\overline{\tau}_{2,1}$ по **величинѣ** и **направленію**.

Примѣчаніе. Подобными механизмами пользуются въ прикладной механикѣ для передачи вращеній вокругъ **параллельныхъ** осей; съ этою цѣлью данныя двѣ параллельныя оси связываютъ между собою (черт. 105) посредствомъ двухъ насаженныхъ на нихъ, соприкасающихся цилиндрическихъ катковъ или посредствомъ двухъ сцѣпленныхъ цилидрическихъ зубчатыхъ колесъ. Передача вращенія соприкасающимися катками употребляется при малыхъ сопротивленіяхъ, а зубчатыми колесами при большихъ, причемъ *угловыя скорости осей* **обратно** *пропорціональный радіусамъ насаженныхъ на нихъ катковъ.*



Черт. 105.

2) *Положимъ мы имѣемъ (черт. 106) двѣ круговыхъ съ неподвижными осями OA_1, OA_2 коническихъ поверхностей S_1, S_2, имѣющихъ общую вершину O и касательныхъ вдоль общей ихъ въ данный моментъ образующей OA, притомъ такъ между собою сцѣпленныхъ, что при движеніи онѣ катятся одна по другой* **безъ скольженія**; *найти относительное движеніе второго конуса S_2 по отношенію къ первому S_1 при вращеніи этого послѣдняго съ угловою скоростью ω_1 и угловымъ ускореніемъ τ_1 вокругъ его оси.*

Здѣсь возможны **два** случая: **внутренняго** и **внѣшняго** касаній данныхъ коническихъ поверхностей; въ первомъ случаѣ уголъ между направленіями угловыхъ скоростей $(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ будетъ **острымъ**, а во второмъ — **тупымъ**.

Такъ какъ въ томъ и другомъ случаяхъ катаніе конуса S_2 по конусу S_1 совершается по условію безъ скольженія, то скорости точекъ соприкосновенія въ данный моментъ окружностей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку A общей въ данный моментъ образующей OA и перпендикулярныхъ

къ осямъ данныхъ коническихъ поверхностей, должны быть равны; слѣдовательно $r_1 \omega_1 = r_2' \omega_2$ и потому

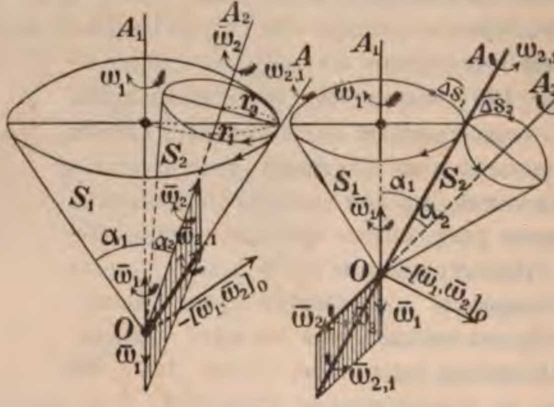
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}, \text{ т. е. } \omega_2 = \omega_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

гдѣ α_1 и α_2 суть углы между образующими и осями данныхъ коническихъ поверхностей.

Подобнымъ же образомъ нетрудно убѣдиться, что

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2},$$

ибо въ этомъ случаѣ $\tau_1 = \pm \omega'_1$ и $\tau_2 = \pm \omega'_2$, причемъ $\overline{\tau_1}$ и $\overline{\tau_2}$ направлены въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ угловымъ



Черт. 106.

скоростямъ $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, смотря по знакамъ производныхъ ω'_1, ω'_2, т. е. направлены въ ту или другую сторону по осямъ соотвѣтствующихъ имъ коническихъ поверхностей.

Найдя такимъ образомъ величины и направленія угловой скорости $\overline{\omega}_2$ и угловаго ускоренія $\overline{\tau}_2$ абсолютнаго движенія конуса S_2, мы знаемъ, что угловая скорость $\overline{\omega}_{2,1}$ и угловое ускореніе $\overline{\tau}_{2,1}$ относительнаго движенія конуса S_2 по отношенію къ конусу S_1 опредѣлятся изъ равенствъ:

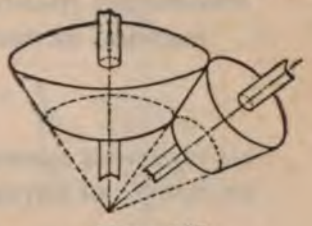
$$\overline{\omega}_{2,1} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1 \quad \text{и} \quad \overline{\tau}_{2,1} = \overline{\tau}_2 - \overline{\tau}_1 - [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_0,$$

гдѣ подъ символомъ $[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_0$ мы подразумѣваемъ векторъ, численно равный площади $\omega_1 \omega_2 \sin(\omega_1, \omega_2)$ параллелограмма, построеннаго на векторахъ $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, отложенныхъ отъ точки O и направленный отъ этой точки O по перпендикуляру къ плоскости этого параллелограмма направо относительно

наблюдателя, стоящаго въ точкѣ O по направленію перваго вектора $\overline{\omega}_1$ и обращеннаго лицомъ по направленію второго вектора $\overline{\omega}_2$.

Наконецъ изъ чертежа (106) ясно, что направленіе $\overline{\omega}_{2,1}$ пойдетъ по общей въ данный моментъ образующей OA коническихъ поверхностей S_1, S_2, что и **непосредственно** очевидно, ибо, *если двѣ коническихъ поверхности, имѣющихъ общую вершину и общую въ каждый моментъ образующую, катятся одна по другой* **безъ скольженія**, *то общая ихъ въ данный моментъ образующая будетъ* **мгновенною осью относительнаго движенія** *одной изъ нихъ по отношенію къ другой*. Дѣйствительно, относительныя перемѣщенія точекъ этой прямой будутъ безконечно-малыми величинами **высшаго** порядка, т. е. относительныя скорости такихъ точекъ въ данный моментъ будутъ равны **нулю** и потому эта прямая будетъ мгновенною осью разсматриваемаго относительнаго движенія.

Примѣчаніе. Подобными механизмами пользуются въ прикладной механикѣ для передачи вращеній между двумя **пересѣкающимися** осями, для чего (черт. 107) данныя двѣ оси связываютъ между собою посредствомъ двухъ насаженныхъ на нихъ соприкасающихся коническихъ катковъ или двухъ коническихъ зубчатыхъ колесъ, причемъ въ этомъ случаѣ *угловыя скорости осей будутъ* **обратно** *пропорціональны* sin *угловъ между образующими и осями насаженныхъ на нихъ коническихъ катковъ или коническихъ зубчатыхъ колесъ.*



Черт. 107.

3) *Положимъ мы имѣемъ два* (черт. 108) *твердыхъ тѣла* S_1, S_2, *вращающихся вокругъ* **неподвижныхъ** *осей*, **не лежащихъ** *въ одной плоскости; опредѣлить относительное движеніе второго тѣла* S_2 *по отношенію къ первому* S_1.

Воспользуемся съ этою цѣлью высказаннымъ нами замѣчаніемъ, что на *элементы* **относительнаго** *движенія твердаго тѣла* S_2 *по отношенію къ тѣлу* S_1 *въ каждый данный моментъ можно смотрѣть, какъ на элементы въ тотъ же моментъ* **составного** *движенія тѣла* S_2 *изъ даннаго его движенія, соединеннаго съ переноснымъ движеніемъ*, **противоположнымъ** *данному движенію тѣла* S_1; въ такомъ случаѣ мы приходимъ къ заключенію, что угловая скорость, угловое ускореніе, мгновенная винтовая ось и скорость скольженія **относительнаго** движенія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1 опредѣлятся изъ соотвѣтственныхъ формулъ **составного** вращенія твердаго тѣла вокругъ двухъ **не лежащихъ** въ одной плоскости осей (см. стр. 176—180), если мы замѣнимъ въ нихъ величины:

$$\overline{\omega}_a, \overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r; \quad \overline{\tau}_a, \overline{\tau}_e, \overline{\tau}_r; \quad l, l_e, l_r, \text{ и } \overline{v}_{a,\sigma}$$

соотвѣтственно на:

$$\overline{\omega}_{2,1}, -\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2; \quad \overline{\tau}_{2,1}, -\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2; \quad l_{2,1}, l_1, l_2 \text{ и } \overline{v}_{\sigma 2,1},$$

гдѣ черезъ $l_{1,2}$ мы обозначили кратчайшее разстояніе K_1K_2 между осями вращеній тѣлъ S_1, S_2, а черезъ l_1, l_2 — соотвѣтственно кратчайшія разстоянія KK_1, KK_2 между винтовою осью относительнаго движенія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1 и осями вращеній тѣлъ S_1, S_2; наконецъ подъ $\overline{v}_{\sigma 2,1}$ мы подразумѣваемъ относительную скорость скольженія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1.

Сдѣлавъ эти подстановки въ указанныхъ формулахъ, мы придемъ во-первыхъ къ извѣстнымъ уже намъ равенствамъ:

$$\overline{\omega}_{2,1} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1, \text{ и } \overline{\tau}_{2,1} = \overline{\tau}_2 - \overline{\tau}_1 - [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]_{K_2},$$

опредѣляющимъ величину и направленіе относительной угловой скорости и относительнаго углового ускоренія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1.

Подобнымъ же образомъ изъ равенствъ:

$$l_e + l_r = l \text{ и } \frac{l_r}{l_e} = \frac{tg(\omega_r, \omega_a)}{tg(\omega_e, \omega_a)},$$

для опредѣленія положенія мгновенной винтовой оси относительнаго движенія тѣла S_2, мы получимъ равенства:

$$l_1 + l_2 = l_{1,2} \text{ и } \frac{l_2}{l_1} = \frac{tg(\omega_2, \omega_{2,1})}{tg(\omega_1, \omega_{2,1})},$$

въ которыхъ разстоянія l_1, l_2 надо считать **положительными**, когда они откладываются по кратчайшему разстоянію $l_{1,2} = K_1K_2$ между осями тѣлъ S_1, S_2 и **отрицательными** въ противоположномъ случаѣ, такимъ образомъ:

1) *если отношеніе* $\frac{l_1}{l_2}$ **положительно**, *то точка пересѣченія K мгновенной винтовой оси относительнаго движенія тѣла S_1 съ кратчайшимъ разстояніемъ $l_{1,2} = K_1K_2$ между осями вращенія тѣлъ S_1, S_2 будетъ лежать* **между** *точками K_1, K_2*;

2) *если же это отношеніе* **отрицательно**, *то точка K будетъ лежать на* **продолженіи** *кратчайшаго разстоянія $l_{1,2} = K_1K_2$ со стороны той изъ точекъ K_1, K_2, которой соотвѣтствуетъ* **ме́ньшая** *изъ* **абсолютныхъ** *величинъ l_1, l_2.*

Если ω_1, ω_2, т. е. величины угловыхъ скоростей вращающихся тѣлъ S_1, S_2 во все время движенія сохраняютъ **постоянное отношеніе**, то

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{tg(\omega_2, \omega_{2,1})}{tg(\omega_1, \omega_{2,1})} = const;$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ точка K во все время движенія будетъ сохранять **постоянное положеніе** на линіи K_1K_2 и потому геометрическія мѣста положеній этой точки въ тѣлахъ S_1, S_2 будутъ соотвѣтственно **окружности** радіусовъ l_1, l_2 описанныя около центровъ K_1, K_2, а геометрическія мѣста положеній мгновенныхъ винтовыхъ осей B_rD_r въ тѣхъ же тѣлахъ будутъ соотвѣтственно линейчатыя поверхности, образованныя вращеніями линіи B_rD_r около осей вращеній тѣлъ S_1, S_2, т. е. около осей, не лежащихъ съ прямою B_rD_r въ одной плоскости; такія линейчатыя поверхности называются, какъ мы уже замѣтили, **однополыми гиперболоидами вращенія**.

Если кромѣ того оси вращеній тѣлъ S_1, S_2 **перпендикулярны**, т. е. $\bar{\omega}_1 \perp \bar{\omega}_2$, то

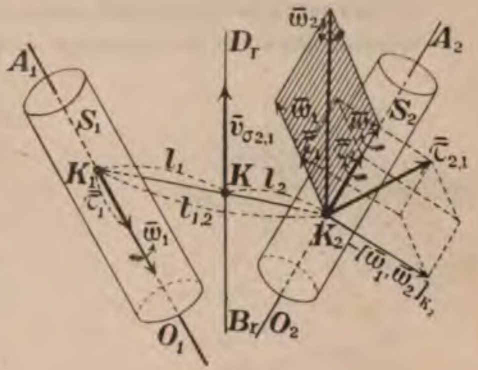
$$\frac{tg\,(\omega_1, \omega_{2,1})}{tg\,(\omega_2, \omega_{2,1})} = \frac{tg\,(\omega_1, \omega_{2,1})}{cotg\,(\omega_1, \omega_{2,1})} = \frac{sin^2\,(\omega_1, \omega_{2,1})}{cos^2\,(\omega_1, \omega_{2,1})} = \frac{sin^2\,(\omega_1, \omega_{2,1})}{sin^2\,(\omega_2, \omega_{2,1})},$$

но въ силу геометрическаго равенства $\bar{\omega}_{2,1} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$ мы знаемъ, что

$$\frac{sin\,(\omega_1, \omega_{2,1})}{sin\,(\omega_2, \omega_{2,1})} = \frac{\omega_2}{\omega_1};$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2},$$



Черт. 108.

т. е. *если оси вращеній тѣлъ* S_1, S_2 **взаимно перпендикулярны**, *то мгновенная винтовая ось относительнаго движенія одного изъ этихъ тѣлъ по отношенію къ другому дѣлитъ кратчайшее разстояніе между этими осями* **обратно** *пропорціонально* **квадратамъ** *угловыхъ скоростей вращающихся тѣлъ*.

Наконецъ, посредствомъ тѣхъ же подстановокъ изъ равенства:

$$v_{a,\sigma} = -\,l\,\omega_e\,sin\,(\omega_a, \omega_e)$$

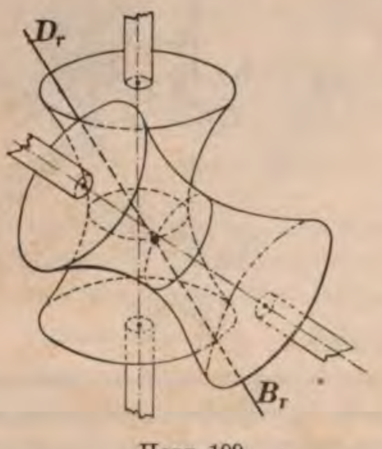
мы получимъ величину относительной скорости скольженія $v_{\sigma\,2,1}$ тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1:

$$v_{\sigma\,2,1} = l_{1,2}\,\omega_1\,sin\,(\omega_{2,1}, \omega_1).$$

Замѣтимъ еще, что для построенія мгновенной винтовой оси и скорости скольженія $\overline{v}_{\sigma 2, 1}$ **относительнаго** движенія тѣла S_2 по отношенію къ тѣлу S_1, подобно построенію мгновенной винтовой оси **абсолютнаго** движенія твердаго тѣла, достаточно спроектировать относительную скорость $\overline{v}_{2, 1}$ одной изъ точекъ тѣла S_2, напр. точки K_2 на направленіе относительной угловой скорости $\overline{\omega}_{2, 1}$, отложенной отъ этой точки и построить на этой проекціи прямоугольникъ съ діагональю $\overline{v}_{2, 1}$; въ такомъ случаѣ относительная скорость $\overline{v}_{2, 1}$ точки K_2 разложится на относительную скорость скольженія $\overline{v}_{\sigma 2, 1}$ и относительную вращательную скорость $\overline{w}_{\sigma 2, 1}$ вокругъ мгновенной винтовой оси относительнаго движенія тѣла S_2, т. е.

$$\overline{v}_{2, 1} = \overline{v}_{\sigma 2, 1} + \overline{w}_{\sigma 2, 1}$$

и потому, возставивъ въ точкѣ K_2 перпендикуляръ $K_2K = \frac{w_{\sigma 2, 1}}{\omega_{2, 1}}$ къ плоскости этого прямоугольника направо относительно наблюдателя, стоящаго въ этой точкѣ по направленію относительной угловой скорости $\overline{\omega}_{2, 1}$ и обращеннаго лицомъ къ относительной скорости $\overline{v}_{2, 1}$ этой точки K_2, мы получимъ точку K мгновенной винтовой оси относительнаго движенія тѣла S, по отношенію къ тѣлу S_1.



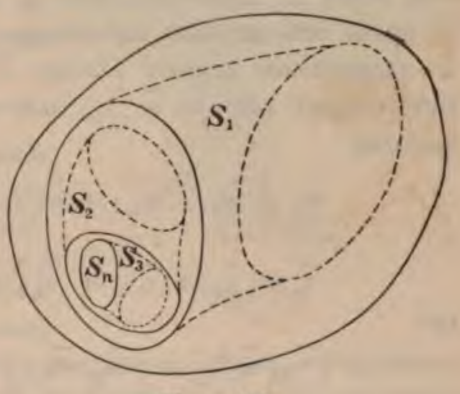
Черт. 109.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, если мы имѣемъ два вала, вращающихся вокругъ осей **не лежащихъ въ одной плоскости** съ угловыми скоростями ω_1, ω_2, сохраняющими **постоянное** отношеніе, то относительное движеніе второго вала по отношенію къ первому можно воспроизвести катаніемъ, соединеннымъ со скольженіемъ нѣкотораго однополаго гиперболоида вращенія неизмѣнно связаннаго со вторымъ валомъ по нѣкоторому гиперболоиду вращенія неизмѣнно связанному съ первымъ и потому, если связать эти два вала (черт. 109) такими, насаженными на нихъ соприкасающимися гиперболоидами вращенія, сцѣпленными между собою зубцами вдоль ихъ образующихъ, то при вращеніи перваго вала съ данною угловою скоростью ω_1, второй валъ будетъ вращаться съ данною угловою скоростью ω_2.

Такого рода механизмами пользуются въ прикладной механикѣ для передачи вращеній вокругъ осей **не лежащихъ въ одной плоскости.**

§ 7. Движеніе твердаго тѣла составное изъ n составляющихъ его движеній.

Положимъ, что твердое тѣло S_2 (черт. 110) *совершаетъ нѣкоторое* **относительное** *движеніе въ твердомъ тѣлѣ* S_1, *движущемся* **въ пространствѣ**, *тѣло* S_3 *совершаетъ нѣкоторое* **относительное** *движеніе въ тѣлѣ* S_2, *тѣло* S_4*—въ тѣлѣ* S_3 *и т. д. Твердое тѣло* S_n *совершаетъ нѣкоторое* **относительное** *движеніе въ твердомъ тѣлѣ* S_{n-1}; *въ такомъ случаѣ* **абсолютное** *движеніе твердаго тѣла* S_n *называется* **составнымъ** *изъ* n *движеній, а движеніе тѣла* S_1 **въ пространствѣ** *и указанныя* **относительныя** *движенія тѣлъ* S_2, $S_3 \dots S_n$ *называются* **составляющими** *движеніями тѣла* S_n.



Чнрт. 110.

Найдемъ зависимость между угловыми скоростями и угловыми ускореніями составного и составляющихъ движеній твердаго тѣла S_n.

Съ этою цѣлью обозначимъ черезъ

$$\overline{\omega}_i \text{ и } \overline{\tau}_i$$

соотвѣтственную угловую скорость и угловое ускореніе **абсолютнаго** движенія тѣла S_i, а черезъ

$$\overline{\omega}_{i,k} \text{ и } \overline{\tau}_{i,k}$$

угловую скорость и угловое ускореніе **относительнаго** движенія этого тѣла S_i по отношенію къ тѣлу S_k, въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{2,1}, \qquad \overline{\tau}_2 = \overline{\tau}_1 + \overline{\tau}_{2,1} + [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{2,1}],$$

$$\overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_{3,2}, \qquad \overline{\tau}_3 = \overline{\tau}_2 + \overline{\tau}_{3,2} + [\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_{3,2}],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overline{\omega}_n = \overline{\omega}_{n-1} + \overline{\omega}_{n,n-1}, \qquad \overline{\tau}_n = \overline{\tau}_{n-1} + \overline{\tau}_{n,n-1} + [\overline{\omega}_{n-1}, \overline{\omega}_{n,n-1}],$$

гдѣ подъ символомъ (черт. 111):

$$[\overline{\omega}_i,\ \overline{\omega}_{i+1,\,i}]$$

подобно предъидущему мы подразумѣваемъ векторъ численно равный площади параллелограмма построеннаго на векторахъ $\overline{\omega}_i$, $\overline{\omega}_{i+1,\,i}$, отложенныхъ отъ произвольной **общей** точки и направленный отъ этой точки по перпендикуляру къ плоскости этого параллелограмма на право относительно наблюдателя, стоящаго въ выбранной точкѣ по направленію перваго вектора $\overline{\omega}_i$ и обращеннаго лицомъ въ сторону второго вектора $\overline{\omega}_{i+1,\,i}$, отложеннаго отъ той же точки; слѣдовательно

$$\overline{\omega}_n = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{2,\,1} + \overline{\omega}_{3,\,2} + \ .\ \ .\ \ . + \overline{\omega}_{n,\,n-1}$$

и

$$\overline{\tau}_n = \overline{\tau}_1 + \overline{\tau}_{2,\,1} + \overline{\tau}_{3,\,2} + \ .\ \ .\ \ . + \overline{\tau}_{n,\,n-1} + \overline{\tau}_c,$$

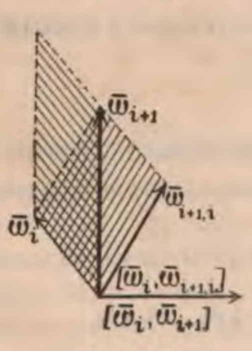
гдѣ

$$\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_{2,\,1}] + [\overline{\omega}_2,\ \overline{\omega}_{3,\,2}] + \ .\ \ .\ \ . + [\overline{\omega}_{n-1},\ \overline{\omega}_{n,\,n-1}],$$

т. е. угловая **скорость** *составного движенія твердаго тѣла* **равна** *геометрической суммѣ угловыхъ скоростей составляющихъ его движеній, угловое же* **ускореніе** *составного движенія твердаго тѣла, вообще говоря,* **не равно** *геометрической суммѣ угловыхъ ускореній составляющихъ его движеній: здѣсь является еще* **добавочное** *или* **дополнительное** *угловое ускореніе*:

$$\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_{2,\,1}] + [\overline{\omega}_2,\ \overline{\omega}_{3,\,2}] + \ .\ \ .\ \ . + [\overline{\omega}_{n-1},\ \overline{\omega}_{n,\,n-1}],$$

равное геометрической суммѣ добавочныхъ ускореній составляющихъ движеній тѣла S_n.



Черт. 111.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что въ силу геометрическаго равенства:

$$\overline{\omega}_{i+1} = \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_{i+1,\,i}$$

и опредѣленія введеннаго нами **символа** изъ чертежа (111) ясно, что

$$[\overline{\omega}_i,\ \overline{\omega}_{i+1,\,i}] = [\overline{\omega}^i,\ \overline{\omega}_{i+1}],$$

мы приходимъ еще къ слѣдующему выраженію **добавочнаго углового**

ускоренія составного движенія тѣла S_n:

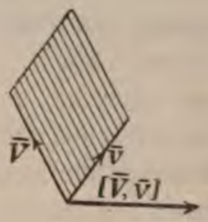
$$\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] + [\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3] + \ldots + [\overline{\omega}_{n-1}, \overline{\omega}_n].$$

Примѣчаніе. Послѣднее преобразованіе, какъ и другія преобразованія добавочнаго углового ускоренія составного движенія твердаго тѣла, является слѣдствіемъ нѣкоторыхъ общихъ свойствъ введеннаго нами **символа**, непосредственно вытекающихъ изъ его опредѣленія.

Дѣйствительно, *обозначивъ подобно предъидущему* **символомъ** чертежъ (112).

$$[\overline{V}, \overline{v}]$$

векторъ численно равный площади параллелограмма $Vv \sin(V, v)$, *построеннаго на этихъ векторахъ, отложенныхъ отъ произвольной* **общей** *точки и направленный отъ этой точки по перпендикуляру къ плоскости построеннаго параллелограмма* направо *относительно наблюдателя, стоящаго въ той же точкѣ по направленію* **перваго** *вектора* $\overline{V}$ *и смотрящаго по направленію* **второго** *вектора* $\overline{v}$, *ясно, что*



Черт. 112.

1) $[\overline{V}, \overline{v}] = 0$, *когда* $V = 0$, *или* $v = 0$, *или* $\overline{V} \parallel \overline{v}$,

2) $[\overline{V}, \overline{v}] = -[\overline{v}, \overline{V}] = [-\overline{v}, \overline{V}] = [\overline{v}, -\overline{V}]$.

Принявъ наконецъ во вниманіе, что векторъ $[\overline{V}, \overline{v}]$ геометрически равенъ линейному моменту **перваго** вектора $\overline{V}$ относительно конца **второго** вектора $\overline{v}$, когда оба эти векторы отложены отъ **общей** точки, мы убѣждаемся въ справедливости еще слѣдующаго свойства этого **символа**:

3) *если* $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \ldots + \overline{V}_n$,

то $[\overline{V}, \overline{v}] = [\overline{V}_1, \overline{v}] + [\overline{V}_2, \overline{v}] + \ldots + [\overline{V}_n, \overline{v}]$,

если же кромѣ того и $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \ldots + \overline{v}_k$, *то каждый изъ символовъ правой части послѣдняго равенства разобьется еще на сумму* k *подобныхъ символовъ.*

Напримѣръ: Такъ какъ

$$\overline{\omega}_{i+1} = \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_{i+1,\,i},$$

то

$$[\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_{i+1}] = [\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_{i+1,\,i}] = [\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_i] + [\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_{i+1,\,i}] = [\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_{i+1,\,i}].$$

§ 8. Частные случаи составныхъ движенiй твердаго тѣла.

1) **Составное** *движенiе твердаго тѣла изъ n* **поступательныхъ** *движенiй.*

Положимъ, что тѣло S_2 совершаетъ нѣкоторое относительное **поступательное** движенiе въ тѣлѣ S_1, движущемся **поступательно** въ пространствѣ, тѣло S_3 совершаетъ нѣкоторое относительное **поступательное** движенiе въ тѣлѣ S_2 и т. д., тѣло S_n совершаетъ нѣкоторое относительное **поступательное** движенiе въ тѣлѣ S_{n-1}; въ такомъ случаѣ **абсолютное** движенiе тѣла S_n тоже будетъ нѣкоторымъ **поступательнымъ** движенiемъ, такъ какъ его абсолютная угловая скорость во все время движенiя будетъ равна нулю, причемъ *такое* **поступательное** *движенiе называется составнымъ изъ n данныхъ* **поступательныхъ** *движенiй:* поступательнаго движенiя тѣла S_1 въ пространствѣ, относительнаго поступательнаго движенiя тѣла S_2 въ тѣлѣ S_1, относительнаго поступательнаго движенiя тѣла S_3 въ тѣлѣ S_2 и т. д. относительнаго поступательнаго движенiя тѣла S_n въ тѣлѣ S_{n-1}.

Припомнивъ, что скоростью и ускоренiемъ поступательнаго движенiя твердаго тѣла въ данный моментъ называются соотвѣтственно скорость и ускоренiе въ тотъ же моментъ одной изъ его точекъ, обозначимъ черезъ $\overline{v}_i$ и $\overline{u}_i$ соотвѣтственно абсолютную скорость и абсолютное ускоренiе тѣла S_i, а черезъ $\overline{v}_{i,k}$ и $\overline{u}_{i,k}$ его относительную скорость и относительное ускоренiе по отношенiю къ тѣлу S_k; въ такомъ случаѣ, замѣтивъ, что **добавочныя ускоренiя** точекъ тѣла S_i по отношенiю къ тѣлу S_k **равны нулю**, такъ какъ абсолютное движенiе тѣла S_k **поступательно**, мы приходимъ къ ряду извѣстныхъ намъ равенствъ:

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 + \overline{v}_{2,1}, \qquad \overline{u}_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_{2,1},$$

$$\overline{v}_3 = \overline{v}_2 + \overline{v}_{3,2}, \qquad \overline{u}_3 = \overline{u}_2 + \overline{u}_{3,2},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{v}_n = \overline{v}_{n-1} + \overline{v}_{n,n-1}, \qquad \overline{u}_n = \overline{u}_{n-1} + \overline{u}_{n,n-1},$$

сложивъ которыя почленно, получаемъ:

$$\bar{v}_n = \bar{v}_1 + \bar{v}_{2,1} + \ldots + \bar{v}_{n,n-1},$$
$$\bar{u}_n = \bar{u}_1 + \bar{u}_{2,1} + \ldots + \bar{u}_{n,n-1},$$

т. е. скорость и ускоренiе **поступательнаго** *движенiя твердаго тѣла* **составного** *изъ n* **поступательныхъ** *движенiй равны соотвѣтственно геометрическимъ суммамъ скоростей и ускоренiй* **составляющихъ** *поступательныхъ движенiй.*

Подобнымъ же образомъ, если мы имѣемъ въ пространствѣ n движущихся точекъ: M_1, M_2, ... M_n и обозначимъ скорости и ускоренiя этихъ точекъ въ данный моментъ соотвѣтственно черезъ

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \ldots \bar{v}_n;$$
$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \ldots \bar{u}_n,$$

то, взявъ n твердыхъ тѣлъ S_1, S_2 .... S_n и сообщивъ тѣлу S_1 относительное поступательное движенiе въ тѣлѣ S_2, одинаковое съ движенiемъ точки M_1, а тѣлу S_2 въ то же время — относительное поступательное движенiе въ тѣлѣ S_3, одинаковое съ движенiемъ точки M_2, и т. д., тѣлу S_{n-1}—относительное поступательное движенiе въ тѣлѣ S_n одинаковое съ движенiемъ точки M_{n-1} и заставивъ наконецъ последнее тѣло S_n совершать въ пространствѣ поступательное движенiе, одинаковое съ движенiемъ послѣдней точки M_n, ясно, что тѣло S_1 будетъ совершать въ пространствѣ нѣкоторое **поступательное** движенiе, причемъ скорость $\bar{v}$ и ускоренiе $\bar{u}$ этого поступательнаго движенiя опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_n,$$
$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_n.$$

Изъ послѣднихъ равенствъ между прочимъ видно, что *результатъ такого соединенiя движенiй* **не зависитъ** *отъ порядка, въ которомъ оно производится*, причемъ, такъ какъ абсолютная скорость каждой точки M твердаго тѣла S_1 въ такомъ составномъ его движенiе равна геометрической суммѣ скоростей въ тотъ же моментъ n данныхъ движущихъ точекъ: M_1, M_2, ... M_n, то и

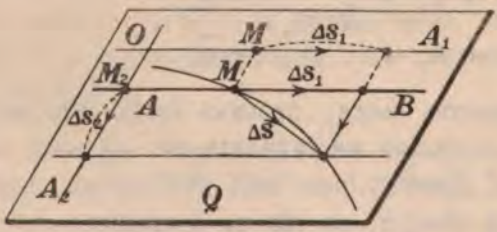
$$\overline{\Delta s} = \overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \ldots + \overline{\Delta s}_n,$$

т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ такой точки M въ пространствѣ за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ векторовъ перемѣщеній за тотъ же промежутокъ времени n данныхъ движущихся точекъ $M_1, M_2, \ldots M_n$; слѣдовательно движеніе каждой точки M твердаго тѣла S_1 въ такомъ составномъ его движеніи будетъ **составнымъ** изъ движеній n этихъ точекъ.

Такимъ образомъ для **воспроизведенія** движенія точки M, **составного** изъ движеній n данныхъ точекъ $M_1, M_2, \ldots M_n$, достаточно взять $(n-1)$ твердыхъ тѣлъ $S_1, S_2, \ldots S_{n-2}, S_{n-1}$ и сообщить точкѣ M относительное движеніе въ первомъ тѣлѣ S_1, одинаковое съ движеніемъ одной изъ данныхъ точекъ, напр. точки M_1; тѣлу S_1 сообщить въ то же самое время относительное поступательное движеніе во второмъ тѣлѣ S_2, одинаковое съ движеніемъ одной изъ остальныхъ точекъ, напр. точки M_2, тѣлу S_2 сообщитъ въ то же время относительное поступательное движеніе въ третьемъ тѣлѣ S_3, одинаковое съ движеніемъ одной изъ остальныхъ точекъ, напр. точки M_3 и т. д. предпослѣднему тѣлу S_{n-2} сообщить относительное поступательное движеніе въ тѣлѣ S_{n-1}, одинаковое съ движеніемъ предпослѣдней точки M_{n-1}, и этому послѣднему тѣлу S_{n-1} сообщить поступательное движеніе въ пространствѣ, одинаковое съ движеніемъ послѣдней точки M_n.

Примѣры.

1) *Всякое движеніе точки въ плоскости можно* **воспроизвести** *движеніемъ этой точки по произвольной прямой, лежащей въ этой плоскости и прямолинейнымъ поступательнымъ движеніемъ въ то же время этой прямой въ той же плоскости.*



Черт. 113.

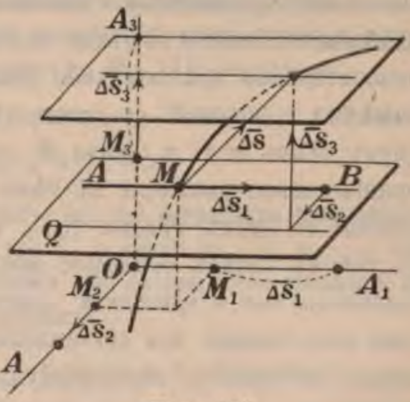
Дѣйствительно положимъ, что точка M (черт. 113) совершаетъ нѣкоторое движеніе въ плоскости Q.

Взявъ въ этой плоскости двѣ произвольныя пересѣкающіяся прямыя OA_1 и OA_2 и проведя черезъ движущуюся точку M прямыя MM_1 и MM_2 соотвѣтственно параллельныя первымъ двумъ прямымъ, замѣтимъ точки пересѣченій M_1, M_2 этихъ прямыхъ; въ такомъ случаѣ при движеніи точки M

въ плоскости Q точки M_1 и M_2 будутъ совершать соотвѣтственно нѣкоторыя движенія по прямымъ OA_1 и OA_2, причемъ мы знаемъ, что движеніе точки M будетъ составнымъ изъ прямолинейныхъ движеній этихъ точекъ M_1, M_2, т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ точки M за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2$ векторовъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}_1$, $\overline{\Delta s}_2$ за тотъ же промежутокъ времени Δt, точекъ M_1, M_2; слѣдовательно, если мы проведемъ черезъ движущуюся точку M прямую AB параллельную одной изъ этихъ прямыхъ OA_1, OA_2, напр. прямой OA_1 и заставимъ точку M совершать по этой прямой относительное движеніе одинаковое съ движеніемъ точки M_1, а самой прямой AB въ тоже время сообщимъ поступательное движеніе одинаковое съ движеніемъ точки M_2, то векторъ перемѣщенія точки M въ такомъ составномъ движеніи за любой промежутокъ времени Δt, будучи равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2$, совпадетъ съ векторомъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ за тотъ же промежутокъ времени точки M въ данномъ ея движеніи, т. е. *такое* составное *движеніе точки совпадетъ* съ даннымъ *ея движеніемъ*.

2) *Всякое движеніе точки въ пространствѣ можно* воспроизвести *движеніемъ этой точки по нѣкоторой прямой, относительнымъ поступательнымъ движеніемъ этой прямой въ нѣкоторой плоскости Q и поступательнымъ движеніемъ въ то же время этой плоскости въ пространствѣ.*

Дѣйствительно, положимъ, что точка M (черт. 114) совершаетъ нѣкоторое движеніе въ пространствѣ.



Черт. 114.

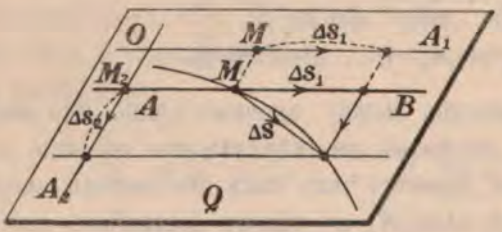
Возьмемъ въ пространствѣ три произвольныхъ пересѣкающихся прямыхъ OA_1, OA_2, OA_3, не лежащихъ въ одной плоскости и проведемъ черезъ двужущуюся точку три плоскости соотвѣтственно параллельныя двумъ изъ этихъ прямыхъ до ихъ пересѣченій съ третьею; въ такомъ случаѣ при движеніи точки M эти точки пересѣченій M_1, M_2, M_3 будутъ соотвѣтственно совершать нѣкоторыя движенія по прямымъ (O; A_1, A_2, A_3), причемъ мы знаемъ, что движеніе точки M будетъ составнымъ изъ этихъ трехъ прямолинейныхъ движеній точекъ M_1, M_2, M_3, т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ точки M за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \overline{\Delta s}_3$ за тотъ же промежутокъ времени век-

т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ такой точки M въ пространствѣ за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ векторовъ перемѣщеній за тотъ же промежутокъ времени n данныхъ движущихся точекъ $M_1, M_2, ... M_n$; слѣдовательно движеніе каждой точки M твердаго тѣла S_1 въ такомъ составномъ его движеніи будетъ **составнымъ** изъ движеній n этихъ точекъ.

Такимъ образомъ для **воспроизведенія** движенія точки M, **составного** изъ движеній n данныхъ точекъ M_1, M_2, ... M_n, достаточно взять $(n-1)$ твердыхъ тѣлъ S_1, S_2, ... S_{n-2}, S_{n-1} и сообщить точкѣ M относительное движеніе въ первомъ тѣлѣ S_1, одинаковое съ движеніемъ одной изъ данныхъ точекъ, напр. точки M_1; тѣлу S_1 сообщить въ то же самое время относительное поступательное движеніе во второмъ тѣлѣ S_2, одинаковое съ движеніемъ одной изъ остальныхъ точекъ, напр. точки M_2, тѣлу S_2 сообщить въ то же время относительное поступательное движеніе въ третьемъ тѣлѣ S_3, одинаковое съ движеніемъ одной изъ остальныхъ точекъ, напр. точки M_3 и т. д. предпослѣднему тѣлу S_{n-2} сообщить относительное поступательное движеніе въ тѣлѣ S_{n-1}, одинаковое съ движеніемъ предпослѣдней точки M_{n-1}, и этому послѣднему тѣлу S_{n-1} сообщить поступательное движеніе въ пространствѣ, одинаковое съ движеніемъ послѣдней точки M_n.

Примѣры.

1) *Всякое движеніе точки въ плоскости можно* **воспроизвести** *движеніемъ этой точки по произвольной прямой, лежащей въ этой плоскости и прямолинейнымъ поступательнымъ движеніемъ въ то же время этой прямой въ той же плоскоети.*



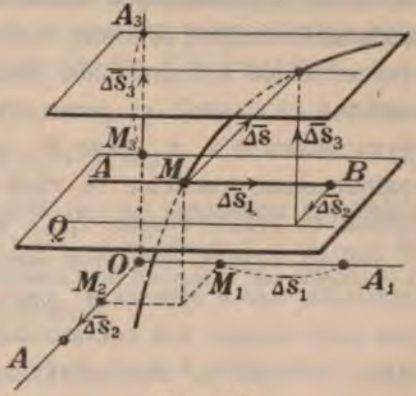
Черт. 113.

Дѣйствительно положимъ, что точка M (черт. 113) совершаетъ нѣкоторое движеніе въ плоскости Q.

Взявъ въ этой плоскости двѣ произвольныя пересѣкающіяся прямыя OA_1 и OA_2 и проведя черезъ движущуюся точку M прямыя MM_1 и MM_2 соотвѣтственно параллельныя первымъ двумъ прямымъ, замѣтимъ точки пересѣченій M_1, M_2 этихъ прямыхъ; въ такомъ случаѣ при движеніи точки M

въ плоскости Q точки M_1 и M_2 будутъ совершать соотвѣтственно нѣкоторыя движенія по прямымъ OA_1 и OA_2, причемъ мы знаемъ, что движеніе точки M будетъ составнымъ изъ прямолинейныхъ движеній этихъ точекъ M_1, M_2, т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ точки M за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2$ векторовъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}_1$, $\overline{\Delta s}_2$ за тотъ же промежутокъ времени Δt, точекъ M_1, M_2; слѣдовательно, если мы проведемъ черезъ движущуюся точку M прямую AB параллельную одной изъ этихъ прямыхъ OA_1, OA_2, напр. прямой OA_1 и заставимъ точку M совершать по этой прямой относительное движеніе одинаковое съ движеніемъ точки M_1, а самой прямой AB въ тоже время сообщимъ поступательное движеніе одинаковое съ движеніемъ точки M_2, то векторъ перемѣщенія точки M въ такомъ составномъ движеніи за любой промежутокъ времени Δt, будучи равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2$, совпадетъ съ векторомъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ за тотъ же промежутокъ времени точки M въ данномъ ея движеніи, т. е. *такое* составное *движеніе точки совпадетъ* съ даннымъ *ея движеніемъ*.

2) *Всякое движеніе точки въ пространствѣ можно* воспроизвести *движеніемъ этой точки по нѣкоторой прямой, относительнымъ поступательнымъ движеніемъ этой прямой въ нѣкоторой плоскости Q и поступательнымъ движеніемъ въ то же время этой плоскости въ пространствѣ.*



Черт. 114.

Дѣйствительно, положимъ, что точка M (черт. 114) совершаетъ нѣкоторое движеніе въ пространствѣ.

Возьмемъ въ пространствѣ три произвольныхъ пересѣкающихся прямыхъ OA_1, OA_2, OA_3, на лежащихъ въ одной плоскости и проведемъ черезъ двужущуюся точку три плоскости соотвѣтственно параллельныя двумъ изъ этихъ прямыхъ до ихъ пересѣченій съ третьею; въ такомъ случаѣ при движеніи точки M эти точки пересѣченій M_1, M_2, M_3 будутъ соотвѣтственно совершать нѣкоторыя движенія по прямымъ (O; A_1, A_2, A_3), причемъ мы знаемъ, что движеніе точки M будетъ составнымъ изъ этихъ трехъ прямолинейныхъ движеній точекъ M_1, M_2, M_3, т. е. векторъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ точки M за каждый промежутокъ времени Δt будетъ равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \overline{\Delta s}_3$ за тотъ же промежутокъ времени век-

торовъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}_1$, $\overline{\Delta s}_2$, $\overline{\Delta s}_3$, точекъ M_1, M_2, M_3; слѣдовательно, если мы проведемъ черезъ движущуюся точку M прямую AB параллельную первой прямой OA_1 и заставимъ точку M совершать по этой прямой относительное движеніе одинаковое съ движеніемъ первой точки M_1, а самой прямой въ то же время сообщимъ въ плоскости Q, остающейся параллельной двумъ первымъ прямымъ OA_1, OA_2, относительное поступательное движеніе одинаковое съ движеніемъ второй точки M_2 и наконецъ, плоскость Q заставимъ одновременно совершать поступательное движеніе въ пространствѣ одинаковое съ движеніемъ третьей точки M_3, то векторъ перемѣщенія точки M въ такомъ составномъ ея движеніи за любой промежутокъ времени Δt, будучи равенъ геометрической суммѣ $\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \overline{\Delta s}_3$, совпадетъ съ векторомъ перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ за тотъ же промежутокъ времени точки M въ данномъ ея движеніи т. е. *такое* **составное** *движеніе точки совпадетъ* **съ даннымъ** *ея движеніемъ.*

2) *Движеніе твердаго тѣла* **составное** *изъ n* **вращеній** *вокругъ* **параллельныхъ** *осей съ угловыми скоростями одинаково или различно направленными.*

Положимъ, что твердое тѣло S_1 вращается вокругъ нѣкоторой **неподвижной** оси, а тѣло S_2 совершаетъ въ немъ нѣкоторое относительное вращательное движеніе вокругъ **параллельной** оси, **неизмѣнно** связанной съ этимъ тѣломъ S_1, тѣло S_3 совершаетъ нѣкоторое относительное вращательное движеніе въ тѣлѣ S_2 вокругъ оси **неизмѣнно** связанной съ этимъ тѣломъ S_2 и **параллельной** первымъ двумъ осямъ и т. д., тѣло S_n совершаетъ нѣкоторое относительное вращательное движеніе въ тѣлѣ S_{n-1} вокругъ оси **неизмѣнно** связанной съ этимъ тѣломъ S_{n-1}, и **параллельной** остальнымъ осямъ; въ такомъ случаѣ *движеніе тѣла S_n въ пространствѣ будетъ составнымъ изъ n вращеній вокругъ* **параллельныхъ** *осей*, причемъ, такъ какъ каждое изъ составляющихъ движеній совершается параллельно плоскости, перпендикулярной къ общему направленію осей, то и составное движеніе тѣла S_n будетъ совершаться **параллельно** этой плоскости.

Въ этомъ случаѣ угловыя скорости и угловыя ускоренія составляющихъ вращеній направлены въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ осямъ; условившись поэтому угловыя скорости направленныя въ одну сторону считать **положительными**, а направленныя въ другую сторону **отрицательными**, и замѣтивъ, что въ дан-

номъ случаѣ добавочное угловое ускореніе $\tau_c = 0$, ибо оси составляющихъ вращеній **параллельны**, мы придемъ къ **алгебраическимъ** равенствамъ:

$$\omega_n = \omega_1 + \omega_{2,1} + \omega_{3,2} + \ldots \omega_{n-1,n},$$

$$\tau_n = \tau_1 + \tau_{2,1} + \tau_{3,2} + \ldots \tau_{n-1,n},$$

опредѣляющимъ угловую скорость ω_n и угловое ускореніе τ_n такого составного вращенія тѣла S_n по величинѣ и по знаку, т. е. по **величинѣ и направленію**, причемъ въ послѣднемъ равенствѣ величины τ выражается **производными** отъ соотвѣтствующихъ имъ величинъ ω.

Такъ какъ въ данномъ случаѣ вопросъ приводится къ разсмотрѣнію составного движенія плоской фигуры въ ея плоскости, составленнаго изъ n вращеній, то для построенія мгновеннаго центра C_n такого составного движенія построимъ сначала по извѣстнымъ правиламъ мгновенный центръ C_2 составного движенія второй фигуры, затѣмъ по найденному положенію C_2 построимъ по тѣмъ же правиламъ мгновенный центръ C_3 составного движенія третьей фигуры и т. д., мы построимъ наконецъ мгновенный центръ C_n даннаго составного движенія плоской фигуры въ ея плоскости.

Примѣчаніе. Для нахожденія **координатъ** мгновеннаго центра C_n **составного вращенія** плоской фигуры въ ея плоскости, составленнаго и n вращеній, воспользуемся выведенными нами (см. стр. 174) формулами:

$$x_a \omega_a = x_e \omega_e + x_r \omega_r,$$

$$y_a \omega_a = y_e \omega_e + y_r \omega_r;$$

въ такомъ случаѣ, обозначивъ черезъ (x_i, y_i) координаты мгновеннаго центра C_i абсолютнаго движенія фигуры U_i, а черезъ $(x_{i,i-1}, y_{i,i-1})$ координаты центра относительнаго вращенія этой фигуры U_i по отношенію къ фигурѣ U_{i-1}, мы придемъ къ ряду равенствъ:

$$x_2 \omega_2 = x_1 \omega_1 + x_{2,1} \omega_{2,1}; \qquad y_2 \omega_2 = y_1 \omega_1 + y_{2,1} \omega_{2,1};$$

$$x_3 \omega_3 = x_2 \omega_2 + x_{3,2} \omega_{3,2}; \qquad y_3 \omega_3 = y_2 \omega_2 + y_{3,2} \omega_{3,2};$$

. . . .

$$x_n \omega_n = x_{n-1} \omega_{n-1} + x_{n,n-1} \omega_{n,n-1}; \qquad y_n \omega_n = y_{n-1} \omega_{n-1} + y_{n,n-1} \omega_{n,n-1}$$

сложивъ которыя почленно, получимъ:

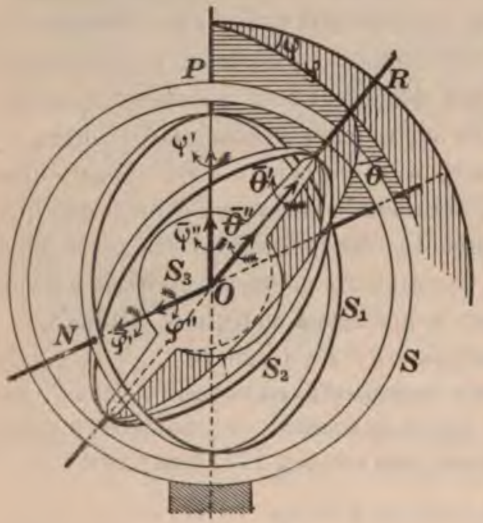
$$x_n \omega_n = x_1 \omega_1 + x_{2,1} \omega_{2,1} + \ldots x_{n,n-1} \omega_{n,n-1},$$

$$y_n \omega_n = y_1 \omega_1 + y_{2,1} \omega_{2,1} + \ldots y_{n,n-1} \omega_{n,n-1}.$$

откуда опредѣлятся координаты (x_n, y_n) искомаго центра C_n даннаго составного движенія плоской фигуры въ ея плоскости.

3) *Соединеніе вращеній твердаго тѣла вокругъ* **трехъ пересѣкающихся** *въ* **одной** *точкѣ осей, изъ которыхъ одна* **неподвижна** *въ пространствѣ, другая* **неизмѣнно** *связана съ твердымъ тѣломъ, а третья* **перпендикулярна** *къ плоскости первыхъ двухъ.*

Положимъ (черт. 115), что кольцо S_1 вращается въ **неподвижномъ** кольцѣ S вокругъ **вертикальной** оси OP, а кольцо S_2 вращается вокругъ проходящей черезъ ту же точку O **горизонтальной** оси ON, **неизмѣнно** связанной съ кольцомъ S_1, наконецъ, торъ S_3 вращается въ кольцѣ S_2 вокругъ **неизмѣнно** съ нимъ связанной оси OR перпендикулярной къ оси ON, въ такомъ случаѣ **абсолютное** движеніе тора S_3 будетъ вращеніемъ вокругъ **неподвижной** точки O, **составнымъ** изъ вращеній вокругъ трехъ осей (O; P, N, R), пересѣкающихся въ этой точкѣ O, причемъ ось OP будетъ неподвижна въ пространствѣ, ось OR будетъ неизмѣнно связана съ торомъ S_3 и наконецъ ось ON будетъ перпендикулярна къ плоскости первыхъ двухъ осей.



Черт. 115.

Такія три оси OP, ON, OR называются соотвѣтственно осями **прецессіи, нутаціи** и **вращенія** даннаго составного вращенія твердаго тѣла S_3.

Обозначимъ черезъ ψ двугранный уголъ, образованный плоскостью POR, съ нѣкоторою **неподвижною** плоскостью, проходящею черезъ ось прецессіи OP, черезъ φ—уголъ POR между осями OP, OR, и наконецъ черезъ θ двугранный уголъ образуемый нѣкоторою плоскостью, проходящею черезъ ось OR и неизмѣнно **связанною** съ тѣломъ S_3, съ плоскостью POR, проходящею черезъ оси OP, OR;

въ такомъ случаѣ, ясно, что при движеніи тѣлъ S_1, S_2, S_3 углы ψ, φ, θ, вообще говоря, будутъ измѣняться, т. е. будутъ нѣкоторыми функціями времени t; такіе три угла ψ, φ, θ, опредѣляющіе въ каждый моментъ положеніе вращающагося вокругъ неподвижной точки O тѣла S_3, называются *Эйлеровыми* углами.

Условимся кромѣ того указанные углы ψ, φ, θ считать **положительными**, когда они отсчитываются **слѣва направо** относительно выбранныхъ направленій соотвѣтствующихъ имъ осей OP, ON, OR и **отрицательными** въ противоположномъ случаѣ; въ такомъ случаѣ **абсолютныя** величины производныхъ

$$\psi', \varphi', \theta'; \quad \psi'', \varphi'', \theta''$$

будутъ соотвѣтственно величинами угловыхъ скоростей и угловыхъ ускореній

$$\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{2,1}, \overline{\omega}_{3,2}; \quad \overline{\tau}_1, \overline{\tau}_{2,1}, \overline{\tau}_{3,2}$$

составляющихъ вращеній тѣла S_3, причемъ, если указанныя производныя **положительны**, то соотвѣтствующія имъ угловыя скорости или угловыя ускоренія будутъ направлены **по осямъ** OP, ON, OR, въ противномъ же случаѣ — противоположно этимъ направленіямъ, и потому

$$\overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{2,1} + \overline{\omega}_{3,2} = \overline{\psi}' + \overline{\varphi}' + \overline{\theta}',$$

$$\overline{\tau}_3 = \overline{\tau}_1 + \overline{\tau}_{2,1} + \overline{\tau}_{3,2} + \overline{\tau}_c = \overline{\psi}'' + \overline{\varphi}'' + \overline{\theta}'' + \overline{\tau}_c,$$

гдѣ

$$\overline{\tau}_c = [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{2,1}]_0 + [\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_{3,2}]_0 =$$

$$= [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{2,1}]_0 + [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_{3,2}]_0 + [\overline{\omega}_{2,1}, \overline{\omega}_{3,2}]_0 =$$

$$= [\overline{\psi}', \overline{\varphi}']_0 + [\overline{\psi}', \overline{\theta}']_0 + [\overline{\varphi}', \overline{\theta}']_0.$$

Послѣднее выраженіе добавочнаго углового ускоренія $\overline{\tau}_c$, пользуясь свойствами (см. стр. 193) введеннаго нами **символа**, можно преобразовать еще слѣдующимъ образомъ.

Принявъ во вниманіе, что

$$[\overline{\psi}', \overline{\varphi}']_0 = [(\overline{\psi}' + \overline{\varphi}'), \overline{\varphi}']_0$$

и

$$[\overline{\psi}', \overline{\theta}']_0 + [\overline{\varphi}', \overline{\theta}']_0 = [(\overline{\psi}' + \overline{\varphi}'), \overline{\theta}']_0,$$

мы приходимъ къ равенствамъ:

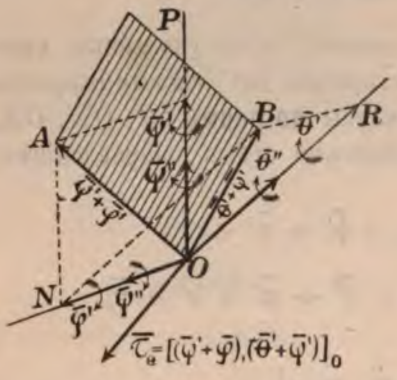
$$\bar{\tau}_c = [(\bar{\psi}' + \bar{\varphi}'), \bar{\varphi}']_0 + [(\bar{\psi}' + \bar{\varphi}'), \theta']_0 =$$

$$= [(\bar{\psi}' + \bar{\varphi}'), (\bar{\varphi}' + \bar{\theta}')]_0.$$

Замѣтивъ наконецъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ угловыя скорости $\bar{\psi}'$, $\bar{\varphi}'$, $\bar{\theta}'$ составляющихъ вращеній твердаго тѣла S_3 называютъ соотвѣтственно **прецессіею, нутаціею** и **скоростью вращенія** составного или абсолютнаго вращенія тѣла S_3, мы можемъ сказать, что *въ разсматриваемомъ случаѣ* **добавочное угловое ускореніе** (черт. 116)

$$\bar{\tau}_c = [(\bar{\psi}' + \bar{\varphi}'), (\bar{\varphi}' + \bar{\theta}')]_0,$$

тѣла S_3 численно-равно площади параллелограмма AOB, построеннаго на **геометрическихъ суммахъ: прецессіи** *и* **нутаціи** $(\bar{\psi}' + \bar{\varphi}') = \overline{OA}$, *и* **нутаціи** *и* **скорости вращенія** $(\bar{\varphi}' + \bar{\theta}') = \overline{OB}$ *этого тѣла, отложенныхъ отъ неподвижной точки O; направленіе же $\bar{\tau}_c$ перпендикулярно къ плоскости этого параллелограмма AOB и идетъ отъ точки O направо относительно наблюдателя, стоящаго въ этой точкѣ по направленію первой геометрической суммы $(\bar{\psi}' + \bar{\varphi}') = \overline{OA}$ и обращеннаго лицомъ по направленію второй геометрической суммы $(\bar{\varphi}' + \bar{\theta}') = \overline{OB}$.*



Черт. 116.

Итакъ, *въ разсматриваемомъ случаѣ* **угловая скорость** $\bar{\omega}_3$ *абсолютнаго движенія тѣла S_3 опредѣляется изъ равенства:*

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\psi}' + \bar{\varphi}' + \bar{\theta}'; \text{ т. е. } \omega_3 = \sqrt{(\psi')^2 + (\varphi')^2 + (\theta')^2 + 2\psi'\theta' \cos\theta},$$

другими словами угловая скорость $\bar{\omega}_3$ абсолютнаго движенія тѣла S_3 есть діагональ параллелограмма, построеннаго на производныхъ ψ', φ', θ' отъ ***Эйлеровыхъ*** *угловъ, отложенныхъ въ ту или другую сторону по соотвѣтствущимъ имъ осямъ OP, ON, OR, смотря по знакамъ этихъ производныхъ,* **угловое же ускореніе** $\bar{\tau}_3$ *абсолютнаго*

движенія тѣла S_3 опредѣляется изъ равенства:

$$\overline{\tau}_3 = \overline{\psi}'' + \overline{\varphi}'' + \overline{\theta}'' + \overline{\tau}_c,$$

т. е. есть геометрическая сумма **вторыхъ** *производныхъ $\overline{\psi}''$, $\overline{\varphi}''$, $\overline{\theta}''$ отъ Эйлеровыхъ угловъ, отложенныхъ въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ осямъ OP, ON, OR, смотря по знакамъ этихъ вторыхъ производныхъ, и* **добавочнаго углового ускоренія:**

$$\overline{\tau}_c = [\overline{\psi}', \overline{\varphi}']_0 + [\overline{\psi}', \overline{\theta}']_0 + [\overline{\varphi}', \overline{\theta}']_0 =$$
$$= [(\overline{\psi}' + \overline{\varphi}'), (\overline{\varphi}' + \overline{\theta}')]_0.$$

Предположимъ теперь, что кольцо S не неподвижно, а совершаетъ нѣкоторое **поступательное** движеніе вмѣстѣ съ центромъ O; въ такомъ случаѣ абсолютное движеніе тора S_3 будетъ составнымъ изъ поступательнаго движенія вмѣстѣ съ его центромъ O и изъ трехъ вращеній вокругъ трехъ осей, проходящихъ черезъ эту точку O: оси **прецессіи** OP, сохраняющей постоянное направленіе въ **пространствѣ,** оси **вращенія** OR, сохраняющей постоянное положеніе въ **тѣлѣ** S_3 и оси **нутаціи** ON, **перпендикулярной** къ плоскости первыхъ двухъ осей.

Наоборотъ, на всякое движеніе твердаго тѣла въ пространствѣ можно смотрѣть какъ на **составное** *изъ поступательнаго движенія вмѣстѣ съ выбраннымъ его полюсомъ O и изъ вращеній вокругъ* **трехъ** *осей OP, ON, OR, проходящихъ черезъ этотъ полюсъ, изъ которыхъ первая сохраняетъ постоянное направленіе въ пространствѣ, послѣдняя неизмѣнно связана съ даннымъ тѣломъ S_3, а средняя перпендикулярна къ плоскости первыхъ двухъ.*

Дѣйствительно, разложивъ угловую скорость $\overline{\omega}_3$ твердаго тѣла S_3, отложенную отъ его полюса O на три составляющія $\overline{\psi}'$, $\overline{\varphi}'$, $\overline{\theta}'$ по указаннымъ тремъ осямъ OP, ON, OR и предположивъ, что нѣкоторое твердое тѣло S совершаетъ поступательное движеніе вмѣстѣ съ этимъ полюсомъ O, а тѣло S_1 совершаетъ въ тѣлѣ S вокругъ, неизмѣнно съ нимъ связанной оси OP, относительное вращеніе съ угловою скоростью $\overline{\psi}'$, тѣло S_2 совершаетъ въ тѣлѣ S_1 относительное вращеніе вокругъ неизмѣнно съ нимъ связанной оси ON съ угловою скоростью $\overline{\varphi}'$ и наконецъ тѣло S_3 совершаетъ въ тѣлѣ S_2 относительное вращеніе съ угловою скоростью $\overline{\theta}'$ вокругъ неизмѣнно

съ нимъ связанной оси OR, мы знаемъ, что поступательная скорость и угловая скорость такого **составного** движенія тѣла S_3 во все время будутъ геометрически равны поступательной и угловой скоростямъ:

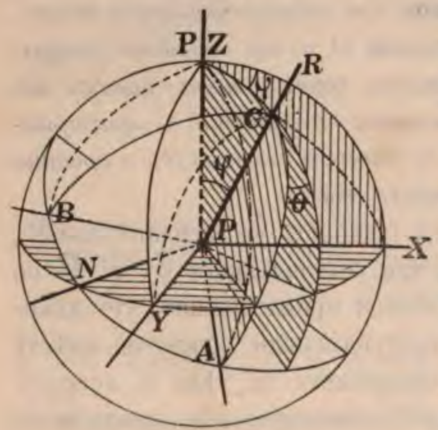
$$\overline{v}_0 \text{ и } \overline{\omega} = \overline{\psi}' + \overline{\varphi}' + \overline{\theta}'$$

даннаго движенія тѣла S_3, т. е. *такое* **составное** *движеніе твердаго тѣла* S_3 *совпадетъ съ* **даннымъ** *его движеніемъ; другими словами данное движеніе тѣла* S_3 **разложится** *на четыре указанныя* **составляющія** *его движенія.*

Такого рода разложеніемъ движенія твердаго тѣла обыкновенно пользуются при изученіи движеній твердыхъ тѣлъ, имѣющихъ **геометрическую ось** (*волчокъ, снарядъ, земля*), причемъ эту ось въ такомъ случаѣ принимаютъ за **ось вращенія** твердаго тѣла.

§ 9. Аналитическія выраженія проекцій угловой скорости и углового ускоренія твердаго тѣла на три взаимно-перпендикулярныя оси кординатъ въ зависимости отъ Эйлеровыхъ угловъ и ихъ производныхъ.

Проведя черезъ полюсъ P (черт. 117) твердаго тѣла три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ (P; X, Y, Z), совершающія **поступательное** движеніе вмѣстѣ съ этимъ полюсомъ P, т. е. **не измѣняющія** своихъ направленій въ пространствѣ и три взаимно-перпендикулярныя оси (P; A, B, C) **неизмѣнно связанныя** съ твердымъ тѣломъ и принявъ ось PZ, не измѣняющую своего направленія въ пространствѣ, за **ось прецессіи** PP, а ось PC **неизмѣнно связанную** съ твердымъ тѣломъ за **ось вращенія** этого тѣла, найдемъ аналитическія выраженія проекцій угловой скорости $\overline{\omega}$ и углового ускоренія $\overline{\tau}$ твердаго тѣла на тѣ и на другія оси въ зависимости отъ *Эйлеровыхъ угловъ* ψ, φ, θ и ихъ производныхъ.



Черт. 117.

Замѣтивъ съ этою цѣлью, что на вращательное движеніе твердаго тѣла вокругъ его полюса P можно смотрѣть, какъ на составное изъ **трехъ** вращеній вокругъ осей PP, PN, PR: **прецессіи, нутаціи** и **вращенія** твердаго тѣла, причемъ

$$\overline{\omega} = \overline{\psi}' + \overline{\varphi}' + \overline{\theta}',$$

обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z;\ \omega_a,\ \omega_b,\ \omega_c$$

проекціи угловой скорости твердаго тѣла на указанныя оси (P; X, Y, Z) и (P; A, B, C); въ такомъ случаѣ, принявъ во вниманіе, что угловыя скорости

$$\overline{\psi}',\ \overline{\varphi}',\ \overline{\theta}'$$

указанныхъ **составляющихъ** вращеній твердаго тѣла направлены соотвѣтственно въ ту или другую сторону по осямъ: PP, PN, PR, смотря по знакамъ этихъ производныхъ, мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} \omega_x = \psi' \cos(P, X) + \varphi' \cos(N, X) + \theta' \cos(R, X), \\ \omega_y = \psi' \cos(P, Y) + \varphi' \cos(N, Y) + \theta' \cos(R, Y), \\ \omega_z = \psi' \cos(P, Z) + \varphi' \cos(N, Z) + \theta' \cos(R, Z); \end{cases}$$

подобнымъ же образомъ:

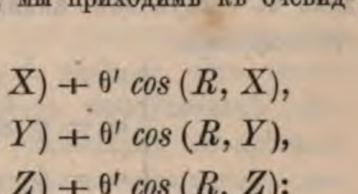
$$\begin{cases} \omega_a = \psi' \cos(P, A) + \varphi' \cos(N, A) + \theta' \cos(R, C), \\ \omega_b = \psi' \cos(P, B) + \varphi' \cos(N, B) + \theta' \cos(R, B), \\ \omega_c = \psi' \cos(P, C) + \varphi' \cos(N, C) + \theta' \cos(R, C). \end{cases}$$

Воспользовавшись наконецъ извѣстною формулою *) сферической

---

*) **Сферическимъ треугольникомъ** (черт. 118) *называется фигура образованная дугами трехъ пересѣкающихся* **большихъ круговъ** *данной шаровой поверхности.*

Обозначивъ черезъ A, B, C и a, b, c соотвѣтственно **углы** и **стороны** даннаго сферическаго треугольника ABC, и принявъ радіусъ его сферы за единицу длины, соединимъ центръ O этой сферы съ тремя вершинами даннаго сферическаго тре-



Черт. 118.

тригонометрiи

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

для опредѣленiя плоскаго угла сферическаго треугольника, изъ чертежа (117) мы получимъ:

$$\begin{cases} \cos(P, X) = 0, & \cos(P, Y) = 0, & \cos(P, Z) = 1, \\ \cos(N, X) = -\sin\psi, & \cos(N, Y) = \cos\psi, & \cos(N, Z,) = 0, \\ \cos(R, X) = \sin\varphi\cos\psi, & \cos(R, Y) = \sin\varphi\sin\psi, & \cos(R, Z) = \cos\varphi; \end{cases}$$

подобнымъ же образомъ:

$$\begin{cases} \cos(P, A) = -\sin\varphi\cos\theta, & \cos(P, B) = \sin\varphi\sin\theta, & \cos(P, C) = \cos\varphi, \\ \cos(N, A) = \sin\theta, & \cos(N, B) = \cos\theta, & \cos(N, C) = 0, \\ \cos(R, A) = 0, & \cos(R, B) = 0, & \cos(R, C) = 1. \end{cases}$$

Подставивъ эти выраженiя въ предъидущiя равенства, мы придемъ къ слѣдующимъ **аналитическимъ выраженiямъ** *проекцiй угловой скорости:*

$$\begin{cases} \omega_x = -\varphi'\sin\psi + \theta'\sin\varphi\cos\psi \\ \omega_y = \varphi'\cos\psi + \theta'\sin\varphi\sin\psi \\ \omega_z = \psi' + \theta'\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_a = -\psi'\sin\varphi\cos\theta + \varphi'\sin\theta \\ \omega_b = \psi'\sin\varphi\sin\theta + \varphi'\cos\theta \\ \omega_c = \psi'\cos\varphi + \theta'. \end{cases}$$

угольника и проведемъ изъ вершины его A касательныя AD, AE до ихъ пересѣченiй въ точкахъ D и E съ продолженiями радiусовъ OB, OC; въ такомъ случаѣ

$$AD = tg\, c,\ OD = sec\, c;\ AE = tg\, b,\ OE = sec\, b;$$

$$DAE = A \text{ и } DOE = a,$$

причемъ

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \,.\, AE \cos(DAE),$$

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \,.\, OE \cos(DOE);$$

слѣдовательно

$$(OD^2 - AD^2) + (OE^2 - AE^2) + 2AD \,.\, AE\cos(DAE) = 2OD \,.\, OE\cos(DOE),$$

или

$$2 + 2tg\, b\ tg\, c\cos A = 2sec\, b\ sec\, c\ \cos a$$

т. е.

$$\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A.$$

Подобнымъ же образомъ, принявъ во вниманіе, что

$$\overline{\tau} = \overline{\psi}'' + \overline{\varphi}'' + \overline{\theta}'' + [\overline{\psi}', \overline{\varphi}']_P + [\overline{\varphi}', \overline{\theta}']_P + [\overline{\psi}', \overline{\theta}']_P =$$
$$= \overline{\psi}'' + \overline{\varphi}'' + \overline{\theta}'' + \overline{\psi'\varphi'} + \overline{\varphi'\theta'} + \overline{\psi'\theta' \sin\varphi},$$

причемъ первые три вектора послѣдней геометрической суммы откладываются отъ полюса P въ ту или другую сторону по соотвѣтствующимъ имъ осямъ PP, PN, PR, смотря по знакамъ производныхъ: ψ'', φ'', θ'', а послѣдніе три вектора откладываются извѣстнымъ образомъ отъ того же полюса P по перпендикулярамъ къ плоскостямъ соотвѣтствующихъ имъ параллелограммовъ, площади которыхъ численно равны этимъ векторамъ, т. е. соотвѣтственно по перпендикулярамъ къ плоскостямъ (PPN), (NPR) и (PPR), можно было бы **непосредственно** найти выраженія проекцій:

$$\tau_x, \ \tau_y, \ \tau_z; \ \tau_a, \ \tau_b, \ \tau_c$$

ускоренія $\overline{\tau}$ твердаго тѣла на указанныя оси координатъ; но, принявъ во вниманіе, что угловое ускореніе $\overline{\tau}$ твердаго тѣла геометрически равно скорости точки, чертящей **въ пространствѣ** годографа угловой скорости твердаго тѣла и припомнивъ, что проекціи скорости точки на неподвижныя оси координатъ выражаются производнымъ отъ проекцій радіуса вектора этой точки на тѣ же оси, ясно, что

$$\tau_x = \omega'_x, \ \tau_y = \omega'_y, \ \tau_z = \omega'_z.$$

Подобнымъ же образомъ, принявъ во вниманіе, что угловое ускореніе $\overline{\tau}$ твердаго тѣла вмѣстѣ съ тѣмъ геометрически равно **относительной** скорости точки, чертящей **въ тѣлѣ** годографъ его угловой скорости и припомнивъ, что проекціи относительной скорости точки на оси **неизмѣнно связанныя** съ твердымъ тѣломъ выражаются производными отъ проекцій относительнаго радіуса вектора этой точки на тѣ же оси, ясно, что

$$\tau_a = \omega'_a, \ \tau_b = \omega'_b, \ \tau_c = \omega'_c.$$

Итакъ, проекціи углового ускоренія твердаго тѣла на оси (P; X, Y, Z), *не измѣняющія своихъ направленій въ пространствѣ и на оси* (P; A, B, C) *неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ* **ана-**

литически *выражаются* **производными** *отъ соотвѣтствующихъ проекцій угловой скорости* $\overline{\omega}$ *твердаго тѣла, взятыхъ на тѣ же оси.*

Примѣчаніе. Найдя такимъ образомъ выраженія проекцій угловой скорости $\overline{\omega}$ на три взаимно-перпендикулярныя оси (P; X, Y, Z), не измѣняющія своихъ направленій въ пространствѣ или, что все равно, на три взаимно-перпендикулярныя параллельныя имъ **неподвижныя** оси (O; X, Y, Z), нетрудно написать проекціи скоростей точекъ твердаго тѣла на эти три оси (O; X, Y, Z).

Дѣйствительно, принявъ во вниманіе, что

$$\overline{v} = \overline{v}_P + \overline{M}_M\,(\overline{\omega})_P$$

и припомнивъ аналитическія выраженія моментовъ вектора, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} v_x = x'_p + \omega_y\,(z - z_p) - \omega_z\,(y - y_p) \\ v_y = y'_p + \omega_z\,(x - x_p) - \omega_x\,(z - z_p) \\ v_z = z'_p + \omega_x\,(y - y_p) - \omega_y\,(x - x_p). \end{cases}$$

Если полюсъ P **неподвиженъ** и принять его за начало координатъ, то $x_p = 0$, $y_p = 0$, $z_p = 0$ и предъидущія формулы примутъ видъ:

$$\begin{cases} v_x = \omega_y z - \omega_z y \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{cases}$$

Подобнымъ же образомъ зная, что ускоренія точекъ твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія выражаются равенствомъ:

$$\overline{u} = \overline{u}_P + \overline{\omega^2 r_\omega} + \overline{M}_M\,(\overline{\tau})_P\,,$$

нетрудно написать выраженія проекцій u_x, u_y, u_z ускореній $\overline{u}$ точекъ твердаго тѣла на тѣ же три взаимно-перпендикулярныя неподвижныя оси координатъ (O; X, Y, Z); но формулъ этихъ мы не приводимъ здѣсь, такъ какъ въ нашемъ изложеніи мы нигдѣ не будемъ ими пользоваться.

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ
Ар. Домогаровъ,
(магистръ прикладной математики).

Выпускъ III,
СТАТИКА.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, 9.
1900.

Печатано по распоряженію Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВЫПУСКЪ III.

СТАТИКА.

ГЛАВА I.

Преобразованія силъ.

стр.

I. Преобразованія силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ . . . . 1—16

§ 1. Основныя начала кинетики.—§ 2. Сложеніе и разложеніе силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.—§ 3. Моменты силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.—§ 4. Аналитическія выраженія силы и ея моментовъ относительно осей и начала прямоугольной, прямолинейной системы координатъ.

II. Преобразованіе силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу . . . . 17—38

§ 1. Три основныхъ пріема преобразованій силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.—§ 2. Приведеніе любой системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу къ двумъ силамъ.—§ 3. Инваріанты системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.—§ 4. Системы взаимноуравновѣшивающихся силъ и эквивалентныя системы силъ по отношенію къ твердому тѣлу.—§ 5. Пара силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и ея свойства.—§ 6. Классификація системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.—§ 7. Центральная ось системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.—§ 8. Система параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, и ея центръ.—§ 9. Статическіе моменты силъ и координаты центра системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

III. Центръ тяжести . . . . 39—65

§ 1. Центръ тяжести неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, его координаты и общія свойства.—§ 2. Центръ тяжести линій.—§ 3. Центръ тяжести поверхностей.—§ 4. Центръ тяжести объемовъ.—§ 5. Теоремы Гюльдена.

ГЛАВА II.

Равновѣсіе точекъ, твердыхъ тѣлъ и системъ.

стр.

I. Равновѣсіе матеріальной точки . . . . 66—81

§ 1. Условія равновѣсія свободной матеріальной точки.—§ 2. Уравненія равновѣсія свободной матеріальной точки.—§ 3. Условія равновѣсія несвободной матеріальной точки.—§ 4. Уравненія равновѣсія несвободной матеріальной точки.

II. Равновѣсіе твердаго тѣла . . . . 82—98

§ 1. Условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.—§ 2. Уравненія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.—§ 3. Условія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла.—§ 4. Уравненія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла.

III. Равновѣсіе системъ матеріальныхъ точекъ и твердыхъ тѣлъ . . . . 99—121

§ 1. Общее необходимое условіе равновѣсія всякой свободной системы матеріальныхъ точекъ или принципъ отвердѣнія.—§ 2. Равновѣсіе веревочнаго многоугольника.—§ 3. Равновѣсіе системъ твердыхъ тѣлъ, послѣдовательно сопряженныхъ идеальными шарнирами.

ГЛАВА III.

Начало возможныхъ перемѣщеній и начало виртуальныхъ отклоненій.

I. Начало возможныхъ перемѣщеній . . . . 122—141

§ 1. Элементарная работа силъ и ея свойства.—§ 2. Опредѣленіе идеальныхъ связей.—§ 3. Начало возможныхъ перемѣщеній.

II. Начало виртуальныхъ отклоненій . . . . 142—164

§ 1. Аналитическое выраженіе связи.—§ 2. Дифференціальные параметры связи.—§ 3. Возможныя или виртуальныя скорости и виртуальныя отклоненія точекъ системы.—§ 4. Второе опредѣленіе идеальныхъ связей и опредѣленіе реакцій идеальныхъ связей.—§ 5. Уравненія равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ идеальными связями.—§ 6. Начало виртуальныхъ отклоненій.

Выпускъ III.

СТАТИКА.

Статика *есть часть* **кинетики**, *т. е. науки о дѣйствіи силъ на матеріальныя тѣла, изучающая условія, при которыхъ матеріальныя тѣла, не смотря на дѣйствующія на нихъ силы, остаются* **въ покоѣ** *или* **равновѣсіи;** *короче* **статика** *есть наука о* **равновѣсіи** *матеріальныхъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ.*

ГЛАВА I.

Преобразованія силъ.

I. Преобразованія силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.

§ 1. Основныя начала кинетики.

Силы, дѣйствуя на матеріальныя тѣла, вообще говоря, измѣняютъ ихъ кинематическое состояніе, т. е. сообщаютъ точкамъ матеріальныхъ тѣлъ нѣкоторыя ускоренія, и только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, при особыхъ условіяхъ, матеріальныя тѣла подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ могутъ оставаться въ покоѣ, или въ равновѣсіи; поэтому, прежде чѣмъ приступить къ изученію этихъ **частныхъ** случаевъ, мы установимъ въ этой главѣ **общее** понятіе о силахъ и ихъ преобразованіяхъ, одинаково справедливыхъ—находится ли матеріальное тѣло подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нему силъ въ **равновѣсіи** или **движеніи**.

Для построенія **кинетики**, т. е. науки о дѣйствіи силъ на матеріальныя тѣла и въ частности науки о равновѣсіи матеріаль-

ныхъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ необходимо заимствовать изъ опытовъ и наблюденій нѣкоторыя **допущенія,** дающія возможность построить эту науку подобно тому, какъ геометрія построена на своихъ аксіомахъ.

Такія заимствованныя изъ опытовъ и наблюденій допущенія о дѣйствіи силъ на матеріальныя тѣла называются **основными началами кинетики;** эти основныя начала легче подмѣчаются на тѣлахъ малыхъ размѣровъ, въ виду чего въ кинетикѣ вводится понятіе о **матеріальной точкѣ,** какъ геометрической точкѣ, обладающей нѣкоторою **массою,** т. е. нѣкоторымъ количествомъ матеріи и потому обладающей свойствами матеріи, по отношенію къ дѣйствующимъ на нее силамъ; эти-то свойства и выражаются слѣдующими **четырьмя** *основными началами кинетики*:

I. Начало инерціи. II. Начало силы. III. Начало независимости дѣйствія силъ. IV. Начало взаимодѣйствія.

I. Начало инерціи. *Матеріальная точка* **сама собою** *безъ дѣйствія* **постороннихъ** *причинъ, называемыхъ* **силами,** *не можетъ измѣнить своего* **кинематическаго** *состоянія, т. е. величины и направленія своей скорости; другими словами: если матеріальная точка обладаетъ* **скоростью,** *то будетъ все время совершать* **прямолинейное** *и* **равномѣрное** *движеніе съ этою скоростью, если же она была* **въ покоѣ,** *то будетъ* **оставаться** *въ покоѣ, пока на нее не подѣйствуетъ нѣкоторая сила.*

Поэтому прямолинейное и равномѣрное движеніе матеріальной точки называется **движеніемъ по инерціи** и само это начало называютъ еще **свойствомъ инерціи** матеріи.

Такимъ образомъ, если величина, или направленіе, или наконецъ, заразъ величина и направленіе скорости матеріальной точки измѣняются, то это надо приписать дѣйствію на нее нѣкоторой силы; но измѣненіе величины и направленія скорости точки опредѣляется ея ускореніемъ, поэтому относительно силъ дѣлаются слѣдующія допущенія.

II. Начало силы. Это начало заключаетъ **три** пункта:

1) *матеріальную точку, на которую дѣйствуетъ сила, принимаютъ за точку* **приложенія** *силы, причемъ силѣ приписываютъ*

направленіе, *совпадающее съ направленіемъ, сообщаемаго ею матеріальной точкѣ, ускоренія;*

2) *величины силъ, приложенныхъ къ* **одной и той же** *матеріальной точкѣ, считаютъ пропорціональными, сообщаемымъ ими матеріальной точкѣ, ускореніямъ;*

3) *величины силъ, приложенныхъ къ* **различнымъ** *матеріальнымъ точкамъ и сообщающихъ имъ* **равныя** *ускоренія, считаютъ пропорціональными* **массамъ** *этихъ точекъ.*

Первый пунктъ этого начала приписываетъ каждой силѣ точку приложенія и нѣкоторое направленіе; второй пунктъ даетъ намъ возможность сравнивать силы, приложенныя къ одной и той же матеріальной точкѣ.

Дѣйствительно, положимъ, что на матеріальную точку массы m дѣйствуютъ силы:

$$F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n,$$

сообщающія этой точкѣ соотвѣтственно ускоренія:

$$\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3 \ldots \bar{u}_n;$$

въ такомъ случаѣ на основаніи второго пункта разсматриваемаго начала мы имѣемъ:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{u_2}{u_1},\ \frac{F_3}{F_1} = \frac{u_3}{u_1},\ \ldots . \frac{F_n}{F_1} = \frac{u_n}{u_1};$$

слѣдовательно

$$F_2 = \frac{u_2}{u_1} F_1,\ F_3 = \frac{u_3}{u_1} F_1 \ldots . F_n = \frac{u_n}{u_1} F_1,$$

т. е. *силы, приложенныя къ* **одной и той же** *матеріальной точкѣ, можно выразить черезъ* **одну** *изъ нихъ.*

Изъ тѣхъ же равенствъ мы видимъ, что

$$\frac{F_1}{u_1} = \frac{F_2}{u_2} = \frac{F_3}{u_3} = \ldots . \frac{F_n}{u_n} = \frac{F}{u} = const$$

т. е. *отношеніе величинъ силъ, приложенныхъ къ одной и той же матеріальной точкѣ, къ величинамъ сообщаемыхъ ими этой точкѣ ускореній для каждой матеріальной точки сохраняетъ* **постоянную** *величину*, значеніе которой выяснится изъ третьяго пункта разсматриваемаго начала.

Третій пунктъ разсматриваемаго начала даетъ намъ возможность сравнивать силы, приложенныя къ **различнымъ** матеріальнымъ точкамъ.

Дѣйствительно, въ природѣ имѣется такая сила, называемая **силою тяжести**, которая сообщаетъ на **данномъ** географическомъ пунктѣ земной поверхности и на **данной** высотѣ надъ уровнемъ моря всѣмъ тѣламъ одинаковое ускореніе g:

$$g = (980{,}6056 - 2{,}5028 \cos 2\varphi - 0{,}000003\, h) \text{ [сант. сек.}^{-2}],$$

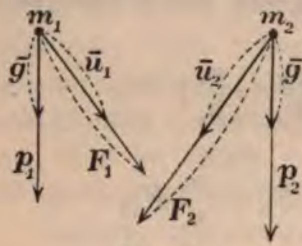
где φ есть **широта** мѣста, а h — его **высота** надъ уровнемъ моря, выраженная въ сантиметрахъ.

Приближенно

$$g = 9{,}81 \text{ [метр. сек.}^{-2}] = 32{,}2 \text{ [фут. сек.}^{-2}].$$

Если матеріальное тѣло **неподвижно** относительно земли, то та же сила тяжести сказывается **давленіемъ** на опоры, называемымъ **вѣсомъ** p даннаго тѣла.

Обозначивъ такимъ образомъ черезъ p_1 и p_2 вѣса матеріальныхъ точекъ, массы которыхъ соотвѣтственно равны m_1 и m_2, въ силу третьяго пункта разсматриваемаго начала, мы можемъ написать, что



Черт. 1.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Предположимъ теперь (черт. 1), что къ этимъ матеріальнымъ точкамъ приложены нѣкоторыя силы F_1, F_2, сообщающія имъ соотвѣтственно ускоренія $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$; въ такомъ случаѣ, въ силу второго пункта того же начала, мы знаемъ, что,

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_1}{p_1} &= \frac{u_1}{g}, \\ \frac{F_2}{p_2} &= \frac{u_2}{g}, \end{aligned}\right\} \text{ т. е. } \frac{F_2}{F_1} = \frac{p_2 u_2}{p_1 u_1} = \frac{m_2 u_2}{m_1 u_1};$$

слѣдовательно

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2 u_2}{m_1 u_1}.$$

Итакъ, *силы, приложенныя къ* **различнымъ** *матеріальнымъ точкамъ, относятся, какъ* **произведенія** *массъ этихъ точекъ на величины, сообщаемыхъ имъ силами, ускореній;* слѣдовательно, если за **единицу** силы принять силу, сообщающую матеріальной точкѣ, масса которой равна выбранной единицѣ массы $1 . [M]$, единицу ускоренія $1 . [LT^{-2}]$, при выбранныхъ единицахъ длины и времени $[L]$ и $[T]$, то величина силы F, сообщающей матеріальной точкѣ массы m ускореніе по величинѣ равное u, опредѣлится изъ равенствъ:

$$F = mu = (m)(u)[MLT^{-2}] = (F)[MLT^{-2}]$$

т. е. *при* **такой единицѣ силы** *величина* **всякой** *силы выражается произведеніемъ изъ массы матеріальной точки на величину, сообщаемаго ей силою, ускоренія*; другими словами—отвлеченнымъ числомъ $(F) = (m)(u)$, равнымъ произведенію отвлеченныхъ чиселъ (m) и (u), измѣряющихъ массу m и ускореніе u при выбранныхъ единицахъ: массы $[M]$, длины $[L]$ и времени $[T]$, умноженнымъ на символъ $[MLT^{-2}]$, называемый **символомъ единицы силы**; этотъ символъ указываетъ, выбранныя при вычисленіи данной силы, **основныя единицы** $[M]$, $[L]$, $[T]$ и служитъ для перехода отъ выраженія величины данной силы въ однихъ единицахъ къ выраженію той же силы въ другихъ единицахъ.

Единицу силы $[F]$ при выбранныхъ единицахъ $[M]$, $[L]$, $[T]$ массы, длины и времени мы будемъ обозначать ея **символомъ,** т. е.

$$[F] = [MLT^{-2}].$$

При **физическихъ** измѣреніяхъ за единицу силы принимается сила, сообщающая массѣ, равной грамму, ускореніе $1 . [\text{сант. сек.}^{-2}]$, т. е. такая **постоянная** сила, которая, дѣйствуя по **одному** направленію на матеріальную точку: массы, равной грамму, находившуюся вначалѣ въ покоѣ, сообщитъ ей въ концѣ первой секунды скорость $1 . [\text{сант. сек.}^{-1}]$; другими словами, подъ дѣйствіемъ такой силы указанная матеріальная точка въ теченіе первой секунды пройдетъ прямолинейнымъ, равноускореннымъ движеніемъ $^1/_2$ сантиметра.

Эта единица силы называется **диною**; такимъ образомъ **дина** *есть единица силы въ сантиметръ-граммъ-секундной системѣ, т. е. въ* **абсолютной** *системѣ основныхъ единицъ.*

Дѣйствіе силы на матеріальное тѣло, какъ мы уже замѣтили, сказывается: измѣненіемъ кинематическаго состоянія тѣла, если оно свободно, и давленіемъ на опоры, если оно не можетъ придти въ движеніе, поэтому *силы можно еще измѣрять давленіями, производимыми ими на опоры, напримѣръ* **вѣсомъ**.

Такъ въ **техникѣ за единицу силы** принимаютъ **«килограммъ»**, причемъ подъ этимъ словомъ подразумѣевается не извѣстное **количество** матеріи, равное 1000 кубическихъ сантиметровъ дистиллированной воды при 4° Цельсія и при нормальномъ атмосферномъ давлиніи, а—**вѣсъ** этого количества матеріи.

Назвавъ для большой опредѣленности **килограммъ-массою** K_M указанное **количество** матеріи, а **килограммъ-силою** K_F — **вѣсъ** этого количества матеріи, мы знаемъ, что сила K_F сообщаетъ массѣ K_M ускореніе $g = (g)$ [сант. сек.$^{-2}$], гдѣ подъ (g) мы подразумѣваемъ выше приведенное (см. стр. 4) число, выражающее въ сантиметрахъ и секундахъ ускореніе силы тяжести на данной широтѣ φ и высотѣ $h = (h)$ [сант.] надъ уровнемъ моря; поэтому

$$K_F = g\ K_M = (g)\ [K_M\ .\ \text{сант. сек.}^{-2}] =$$

$$= (g)\ (10)^3\ [\text{грам. сант. сек.}^{-2}] = (g)\ 10^3\ [\text{дин.}].$$

Положивъ напримѣръ **приближенно**:

$$g = 981\ [\text{сант. сек.}^{-2}],$$

мы получимъ

$$K_F = 981000\ [\text{дин.}];$$

наоборотъ

$$\textit{дина} = \frac{1}{981000} K_F.$$

Примѣчаніе. «Килограммъ», какъ **единица силы** представляетъ то неудобство, что онъ не есть опредѣленная сила, ибо $K_F = g\ K_M$, а g зависитъ отъ широты φ и высоты h даннаго мѣста; но эти колебанія ускоренія g силы тяжести настолько незначительны (напримѣръ для Европы они не превышаютъ $\frac{1}{990}$ его величины), что при техническихъ измѣреніяхъ можно считать его постояннымъ: $g = 9{,}81$ [метр. сек.$^{-2}$] и потому $K_F = 9{,}81$ [K_M . метр. сек.$^{-2}$], т. е. **приближенно** можно сказать, что **килограммъ-сила** *есть такая сила, которая, дѣйствуя на* **килограммъ-массу**, *сообщаетъ этой массѣ ускореніе* 9,81 [метр. сек.$^{-2}$].

Для точнаго же выраженія килограммъ-силы $K_P = g\,K_M$ надо указать широту и высоту надъ уровнемъ океана того мѣста, гдѣ производились измѣренія.

Все сказанное о «**килограммѣ**», какъ **силѣ**, относится конечно и къ «**грамму**», употребляемому въ этомъ смыслѣ даже во многихъ курсахъ физики. Наконецъ нашъ **пудъ** тоже употребляютъ и для измѣренія **давленій** (*пудъ-сила*) и для измѣренія **массъ** (*пудъ-масса*), причемъ приближенно:

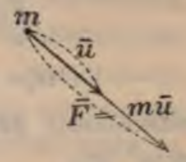
$$\textit{пудъ-сила} = 32{,}2\ [\text{пуд. м. фут. сек.}^{-2}],$$

т. е. это есть такая сила, которая массѣ равной пуду сообщаетъ ускореніе:

$$32{,}2\ [\text{фут. сек.}^{-2}] = 9{,}81\ [\text{метр. сек.}^{-2}].$$

Такимъ образомъ, сопоставивъ всѣ **три** пункта этого начала, мы видимъ (черт. 2), что *всякая сила* $\overline{F}$ *по величинѣ и направленію можетъ быть представлена* **векторомъ:**

$$\overline{F} = m\overline{u},$$



Черт. 2.

численно равнымъ произведенію изъ массы матеріальной точки на величину, сообщаемаго ей силою ускоренія и отложеннымъ отъ матеріальной точки по направленію этого ускоренія $\overline{u}$*; другими словами—векторомъ, отложеннымъ отъ матеріальной точки и въ* (m) *разъ бо́льшимъ ея ускренія* $\overline{u}$.

III. Начало независимости дѣйствія силъ. Это начало заключаютъ **два** пункта:

1) *независимость дѣйствія силы отъ* **кинематическаго** *состоянія точки*, и

2) *независимость дѣйствія силъ* **другъ отъ друга.**

Первый пунктъ этого начала выражаетъ то допущеніе, что *сила* $\overline{F}$, *дѣйствуя на свободную матеріальную точку* m, *сообщаетъ ей* **одно и то же** *ускореніе* $\overline{u}$, *независимо отъ того, находится ли матеріальная точка* m **въ покоѣ**, *или обладаетъ любою* **скоростью** $\overline{v}$.

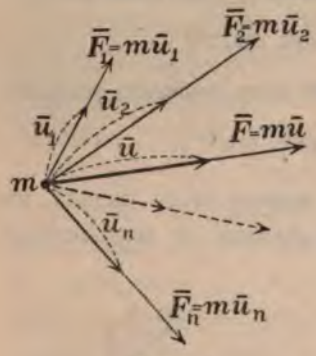
Второй пунктъ разсматриваемаго начала надо понимать такъ: *если къ матеріальной точкѣ* m (черт. 3) **заразъ** *приложено* n *силъ:*

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n.$$

сообщающихъ ей при дѣйствіи **въ отдѣльности** *соотвѣтственно ускоренія*:

$$\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \ldots\ \bar{u}_n,$$

то при **совмѣстномъ** *дѣйствіи этихъ силъ на матеріальную точку, каждая изъ нихъ будетъ сообщать ей* **то же** *ускореніе, какъ при дѣйствіи* **въ отдѣльности** *и* **полное** *ускореніе* $\bar{u}$ *пріобрѣтаемое матеріальною точкою, будетъ равно* **геометрической суммѣ** *всѣхъ этихъ ускореній, т. е.*



Черт. 3.

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_n.$$

Сила

$$\bar{F} = m\bar{u},$$

одна *сообщающая матеріальной точкѣ* **то же** *ускореніе, какое она пріобрѣтаетъ отъ* **совмѣстнаго** *дѣйствія п данныхъ силъ называется* **равнодѣйствующею** *этихъ силъ*; изъ этого опредѣленія ясно; что

$$\bar{F} = m\bar{u} = m\bar{u}_1 + m\bar{u}_2 + \ldots m\bar{u}_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n,$$

т. е. **равнодѣйствующая** *сила выражается* **геометрическою суммою** *всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку.*

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, зная ускореніе $\bar{u}$ матеріальной точки m, мы знаемъ только равнодѣйствующую $\bar{F} = m\bar{u}$ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, а не **сами** эти силы, и потому, если точка **не имѣетъ** ускоренія, т. е. совершаетъ прямолинейное и равномѣрное движеніе, это еще не значитъ, что къ ней **не приложено** никакихъ силъ, а—только, что **равнодѣйствующая**, или **геометрическая сумма** всѣхъ этихъ силъ **равна нулю**, то есть

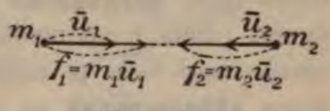
$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n = 0.$$

IV. Начало взаимодѣйствія. Это начало, заключаетъ **два** пункта:

1) *всѣ силы, дѣйствующія на матеріальныя точки, суть* **силы взаимодѣйствія** *между ними, причемъ*

2) **силы взаимодѣйствія,** *между* **двумя** *матеріальными точками* **равны** *по величинѣ,* **противоположны** *по направленію и дѣйствуютъ*

по прямой, *соединяющей эти точки*, т. е. если матеріальная точка m_2 (черт. 4) дѣйствуетъ на матеріальную точку m_1 съ силою $\overline{f}_1$, то точка m_1 въ свою очередь будетъ дѣйствовать на точку m_2 съ силою $\overline{f}_2 = -\overline{f}_1$ и направленія этихъ силъ идутъ по прямой, соединяющей эти точки.



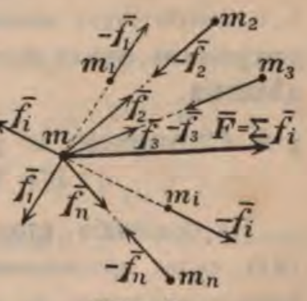
Черт. 4.

Для поясненія высказаннаго начала замѣтимъ, что по *Ньютону* всѣ силы природы суть **силы взаимодѣйствія** между частицами тѣлъ, причемъ относительно силъ взаимодѣйствія между двумя частицами онъ допускалъ, что онѣ **равны** по величинѣ, **противоположны** по направленію и дѣйствуютъ **по прямой**, соединяющей эти частицы.

Въ настоящее время для объясненія нѣкоторыхъ физическихъ явленій допускаютъ, что **силы взаимодѣйствія** между частицами, будучи равны по величинѣ и противоположны по направленію, могутъ не дѣйствовать по одной прямой, т. е. могутъ представлять собою нѣкоторую *«пару силъ»*, однако въ механикѣ не приходится пользоваться подобнымъ допущеніемъ и потому въ примѣненіи къ матеріальнымъ точкамъ, согласно *Ньютону*, допускается вышеприведенное начало.

Такимъ образомъ, если къ матеріальной точкѣ m приложена нѣкоторая сила $\overline{F}$, то, согласно **первому** пункту сдѣланнаго допущенія, мы должны смотрѣть на эту силу (черт. 5), какъ на **равнодѣйствующую** силъ: $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots \overline{f}_n$, дѣйствующихъ на точку m со стороны нѣкоторыхъ другихъ матеріальныхъ точекъ: $m_1, m_2, \ldots m_n$, т. е.

$$\overline{F} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2 + \ldots + \overline{f}_n = \Sigma \overline{f}_i;$$



Черт. 5.

но въ такомъ случаѣ, согласно **второму** пункту того же допущенія, мы заключаемъ, что точка m будетъ въ свою очередь дѣйствовать на эти точки съ силами:

$$-\overline{f}_1, -\overline{f}_2, \ldots -\overline{f}_n,$$

соотвѣтственно равными и противоположно направленными, дѣй-

ствующимъ на нее силамъ; слѣдовательно **геометрическая сумма:**

$$(-\bar{f}_1)+(-\bar{f}_2)+\ldots+(-\bar{f}_n)=$$
$$=-(\bar{f}_1+\bar{f}_2+\ldots+\bar{f}_n)=-\bar{F}$$

всѣхъ силъ **воздѣйствія** точки m на **дѣйствующія** на нее точки будетъ равна и противоположно направлена приложенной къ этой точкѣ силѣ $\bar{F}$, и называется **противодѣйствіемъ** матеріальной точки **дѣйствующей** на нее силѣ. Съ этой точки зрѣнія говорятъ, что *къ матеріальной точкѣ нельзя приложить никакой силы, не вызывая со стороны этой точки* **противодѣйствія** *равнаго и прямо противоположнаго этой силѣ*, что называютъ иногда **«началомъ** *равенства* **дѣйствія** *и* **противодѣйствія»**.

Замѣтимъ наконецъ, что *разсматриваемое начало даетъ намъ возможность сравнивать* **массы** *матеріальныхъ точекъ*, **независимо** *отъ понятія о ихъ* **вѣсахъ**.

Дѣйствительно, если двѣ матеріальныя точки (черт. 4) m_1, m_2 подъ дѣйствіемъ ихъ силъ взаимодѣйствія $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ пріобрѣтаютъ соотвѣтственно ускоренія $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, то принявъ во вниманіе, что

$$f_1=m_1u_1,\ f_2=m_2u_2 \text{ и } f_1=f_2,$$

мы придемъ къ равенству:

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{u_1}{u_2},$$

т. е. *массы двухъ матеріальныхъ точекъ обратно пропорціональны ускореніямъ этихъ точекъ, сообщаемымъ имъ ихъ* **силами взаимодѣйствія**.

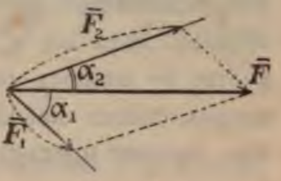
§ 2. Сложеніе и разложеніе силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.

На основаніи **второго** пункта начала независимости дѣйствія силъ, *силы, приложенныя къ матеріальной точкѣ, можно складывать и разлагать по правиламъ* **геометрическаго сложенія**.

Такъ, *если къ матеріальной точкѣ приложены* **двѣ** *силы* $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ (черт. 6), *то* **равнодѣйствующая** $\bar{F}$ *этихъ силъ по величинѣ и направленію совпадетъ съ діагональю построеннаго на нихъ параллелограмма, т. е.*

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos(F_1,F_2)}.$$

Обозначивъ наконецъ черезъ α_1, α_2 углы, составляемые направленіемъ равнодѣйствующей $\overline{F}$ съ направленіями даныхъ силъ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и зная, что **проекція равнодѣйствующей** $\overline{F}$, *какъ геометрической суммы данныхъ силъ, на* **любое** *направленіе равна* **суммѣ проекцій** *на то же направленіе приложенныхъ къ матеріальной точкѣ силъ* $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

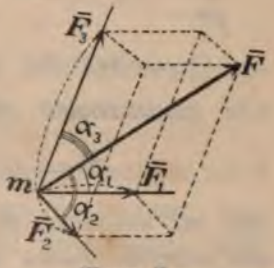


Черт. 6.

$$F \cos\alpha_1 = F_1 + F_2 \cos(F_2, F_1),$$
$$F \cos\alpha_2 = F_2 + F_1 \cos(F_1, F_2),$$

изъ которыхъ опредѣлятся углы α_1 и α_2, т. е. **направленіе** искомой равнодѣйствующей $\overline{F}$.

Наоборотъ, если приложенную къ матеріальной точкѣ силу $\overline{F}$ требуется **разложить** на **двѣ** силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, дѣйствующія по заданнымъ двумъ направлніямъ, составляющимъ съ силю $\overline{F}$ углы α_1, α_2 и лежащимъ съ нею **въ одной плоскости**, то послѣднія двѣ формулы опредѣлятъ намъ величины F_1, F_2 этихъ силъ.



Черт. 7.

Подобнымъ же образомъ, *если къ матеріальной точкѣ приложены* **три** *силы* $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ (черт. 7), *то* **равнодѣйствующая** *этихъ силъ по величинѣ и направленію совпадетъ съ діагональю построеннаго на нихъ параллелепипеда, т. е.*

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2F_1F_2\cos(F_1, F_2) + 2F_2F_3\cos(F_2, F_3) + 2F_3F_1\cos(F_3, F_1)},$$

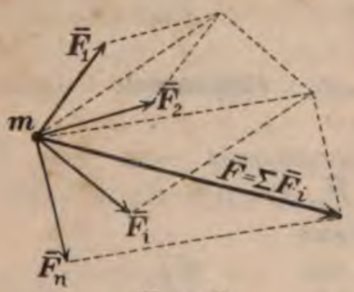
причемъ **направленіе** *этой равнодѣйствующей* $\overline{F}$ *опредѣлится изъ очевидныхъ равенствъ:*

$$F \cos\alpha_1 = F_1 + F_2 \cos(F_2, F_1) + F_3 \cos(F_3, F_1),$$
$$F \cos\alpha_2 = F_1 \cos(F_1, F_2) + F_2 + F_3 \cos(F_3, F_2),$$
$$F \cos\alpha_3 = F_1 \cos(F_1, F_3) + F_2 \cos(F_2, F_3) + F_3,$$

въ которыхъ черезъ α_1, α_2, α_3 мы обозначили соотвѣтственно углы,

составляемые направленіемъ искомой равнодѣйствующей $\overline{F}$ съ направленіями данныхъ силъ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$.

Наоборотъ, если приложенную къ матеріальной точкѣ силу $\overline{F}$ требуется **разложить** на **три** силы, дѣйствующія по даннымъ тремъ направленіямъ, составляющимъ съ данною силою $\overline{F}$ соотвѣтственно углы α_1, α_2, α_3 и **не лежащимъ** съ нею въ одной плоскости, то вопросъ этотъ можно разрѣшить: построеніемъ на этихъ направленіяхъ параллелепипеда съ діагональю $\overline{F}$, или вычисленіемъ при помощи предъидущихъ трехъ формулъ величинъ искомыхъ силъ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$.



Черт. 8.

Наконецъ, *если къ матеріальной точкѣ* (черт. 8) *приложено n силъ* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, *то* **величина** *ихъ* **равнодѣйствующей**:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n$$

опредѣлится по извѣстной формулѣ для величины геометрической суммы или замыкающей стороны:

$$F = \sqrt{\Sigma F_i^2 + 2\Sigma F_i F_k \cos(F_i, F_k)},$$

что же касается до **направленія** *этой равнодѣйствующей* $\overline{F}$, *то оно можетъ быть опредѣлено вычисленіемъ ея* **проекцій** *на произвольныя* **три**, *не лежащія въ одной плоскости, направленія, причемъ, какъ извѣстно, проекція* F_x **равнодѣйствующей** $\overline{F}$ *на направленіе любой оси OX будетъ равна* **суммѣ** *проекцій на ту же ось всѣхъ дѣйствующихъ силъ, т. е.*

$$F_x = F_{1,x} + F_{2,x} + \ldots + F_{n,x} = \Sigma F_{i,x}$$

и

$$\cos(F, X) = \frac{F_x}{F} = \frac{\Sigma F_{i,x}}{\sqrt{\Sigma (F_i)^2 + 2\Sigma F_i F_k \cos(F_i, F_k)}}.$$

Примѣчаніе. *Разложеніе данной силы* $\overline{F}$, *приложенной къ матеріальной точкѣ*, **болѣе** *чѣмъ на* **двѣ** *силы, дѣйствующія по заданнымъ направленіямъ, лежащимъ съ нею въ* **одной** *плоскости и*—**болѣе**, *чѣмъ на* **три** *силы, дѣйствующія по заданнымъ направленіямъ*, **не лежащимъ** *въ одной плоскости, какъ нетрудно непосредственно убѣдиться, представляютъ вопросы* **неопредѣленные**.

Дѣйствительно, положимъ, что мы желаемъ разложить силу $\overline{F}$, приложенную къ матеріальной точкѣ, на n силъ, дѣйствующихъ по n заданнымъ направленіямъ, лежащимъ съ силою въ одной плоскости; въ такомъ случаѣ, приложивъ къ матеріальной точкѣ по всѣмъ этимъ направленіямъ кромѣ двухъ изъ нихъ, напримѣръ перваго и второго, $(n-2)$ произвольныхъ силъ $\overline{F}_3, \overline{F}_4 \ldots \overline{F}_n$, можно всегда такъ подобрать силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$, дѣйствующія по первымъ двумъ направленіямъ, что

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \ldots + \overline{F}_n = \overline{F},$$

для чего необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая $\overline{F}_1 + \overline{F}_2$ этихъ двухъ силъ удовлетворяла бы геометрическому равенству:

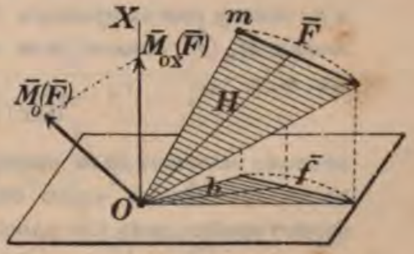
$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F} - \overline{F}_3 - \overline{F}_4 - \ldots - \overline{F}_n,$$

зная же равнодѣйствующую $\overline{F}_1 + \overline{F}_2$ двухъ силъ и ихъ направленія, мы можемъ построить, или вычислить и сами эти силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости нашего замѣчанія и въ случаѣ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости.

§ 3. Моменты силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.

Замѣтивъ, что каждая сила $\overline{F}$, приложенная къ матеріальной точкѣ m, по величинѣ и направленію выражается нѣкоторымъ векторомъ, отложеннымъ отъ этой точки, мы можемъ представить себѣ, какъ линейный моментъ $\overline{M}_O(\overline{F})$ данной силы относительно любого центра, или точки O, такъ и моментъ $M_{Ox}(\overline{F})$ этой силы относительно любой оси OX.



Черт. 9.

Линейнымъ моментомъ $\overline{M}_O(\overline{F})$ **данной силы** $\overline{F}$ (черт. 9) *относительно нѣкотораго* **центра**, *или* **точки** *O называется* **векторъ**, *численно равный произведенію FH изъ величины F данной силы на разстояніе H этого центра O до ея направленія; другими словами* — **векторъ**, *численно равный удвоенной площади треугольника $(O, \overline{F})$, построеннаго на этомъ центрѣ O и данной силѣ $\overline{F}$ и направленный по перпендикуляру къ плоскости этого тре-*

угольника, притомъ въ ту сторону, относительно которой направленіе данной силы $\overline{F}$ *идетъ* **слѣва направо.**

Моментомъ $M_{ox}(\overline{F})$ **данной силы** $\overline{F}$ *относительно нѣкоторой* **оси** OX *называется взятое со знакомъ* $\pm$ *произведеніе* fh *изъ величины проекціи* $\overline{f}$ *данной силы* $\overline{F}$ *на плоскость перпендикулярную къ этой оси, на разстояніе* h, *точки пересѣченія* O *оси съ этою плоскостью, до указанной проекціи* $\overline{f}$; *другими словами— взятая со знакомъ* $\pm$ *удвоенная величина площади треугольника* $(O, \overline{f})$, *построеннаго на проекціи* $\overline{f}$ *данной силы* $\overline{F}$, *взятой на плоскость перпендикулярную къ этой оси и на точкѣ пересѣченія оси съ этою плоскостью, причемъ знакъ* $(+)$ *берется, когда направленіе силы идетъ* **слѣва направо** *относительно направленія данной оси и знакъ* $(-)$ *въ противоположномъ случаѣ.*

Наконецъ моментъ силы относительно оси откладываютъ иногда въ ту или другую сторону по этой оси, смотря по его знаку, и называютъ его въ такомъ случаѣ **линейнымъ моментомъ** $\overline{M}_{ox}(\overline{F})$ данной силы $\overline{F}$ относительно этой **оси** OX.

Изъ этихъ опредѣленій ясно, что тотъ и другой моменты силы, какъ произведенія изъ величины силы на извѣстныя разстоянія, будутъ имѣть **символомъ единицы** символъ:

$$[MLT^{-2}] \cdot [L] = [ML^2T^{-2}],$$

причемъ всѣ теоремы, установленныя нами относительно **моментовъ векторовъ**, будутъ конечно справедливы и для **моментовъ силъ.**

Напомнимъ здѣсь важнѣйшія изъ этихъ теоремъ.

1) *Моментъ* $M_{OX}(\overline{F})$ *силы* $\overline{F}$ *относительно оси* OX *по величинѣ и по закону равенъ проекціи* $M_{O,X}(\overline{F})$ *на ту же ось линейнаго момента* $\overline{M}_O(\overline{F})$ *данной силы относительно одной изъ точекъ этой оси, т. е.*

$$\overline{M}_{OX}(F) = M_{O,X}(\overline{F}),$$

поэтому моментъ силы относительно оси перпендикулярной къ плоскости, проходящей черезъ данный центръ O *и направленіе силы* $\overline{F}$, *будетъ* **наибольшимъ** *изъ моментовъ данной силы относительно всевозможныхъ осей, проходящихъ чрезъ эту точку.*

2) *Линейный моментъ* **равнодѣйствующей**:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \Sigma \overline{F}_i$$

n силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, относительно нѣко-

торую центра O равенъ **геометрической суммы** *линейныхъ моментовъ относительно того же центра всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку, т. е.*

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i).$$

3) *Моментъ* **равнодѣйствующей** *силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, относительно любой оси OX равенъ* **алгебраической суммѣ** *моментовъ относительно той же оси всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку, т. е.*

$$M_{OX}(\overline{F}) = \Sigma M_{OX}(\overline{F}_i) \text{ и т. д.}$$

§ 4. Аналитическія выраженія силы и ея моментовъ относительно осей и начала прямоугольной, прямолинейной системы координатъ.

Такъ какъ каждая сила $\overline{F}$ по величинѣ и направленію выражается нѣкоторымъ **векторомъ**, отложеннымъ отъ ея точки приложенія, то для заданія величины и направленія силы достаточно задать три ея проекціи F_x, F_y, F_z на три взаимно перпендикулярныя, прямолинейныя оси координатъ $(O;\ X,\ Y,\ Z)$; эти проекціи для краткости мы будемъ обозначать еще соотвѣтственно буквами X, Y, Z; въ такомъ случаѣ мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\overline{F} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z},$$

т. е.

$$F = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

и

$$\begin{cases} \cos(F, X) = \dfrac{X}{+\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(F, Y) = \dfrac{Y}{+\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(F, Z) = \dfrac{Z}{+\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \end{cases}$$

изъ которыхъ первое выражаетъ то обстоятельство, что **проекціи** *силы на три взаимо-перпендикулярныя оси координатъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ* **составляющія** *этой силы по тремъ этимъ на-*

правленіямъ; второе даетъ намъ **величину** силы, а послѣднія три опредѣляютъ ея **направленіе**.

Подобнымъ же образомъ, обозначивъ черезъ (x, y, z) координаты точки приложенія данной силы $\overline{F}$ по отношенію къ той же прямоугольной, прямолинейной системѣ координатъ $(O; X, Y, Z)$ и припомнивъ аналитическія выраженія моментовъ векторовъ (см. Введ. стр. 41), мы придемъ къ равенствамъ:

$$\begin{cases} M_{O,X}(\overline{F}) = M_{OX}(\overline{F}) = yZ - zY; \\ M_{O,Y}(\overline{F}) = M_{OY}(\overline{F}) = zX - xZ; \\ M_{O,Z}(\overline{F}) = M_{OZ}(\overline{F}) = xY - yX; \end{cases}$$

и

$$M_O(\overline{F}) = +\sqrt{(yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2},$$

изъ которыхъ первыя три выражаютъ **проекціи** на оси координатъ линейнаго момента силы относительно начала координатъ или, что все равно, моменты данной силы относительно **осей** координатъ, а послѣднее даетъ намъ **величину** линейнаго момента силы относительно **начала** координатъ, причемъ **направленіе** этого линейнаго момента опредѣлится изъ очевидныхъ равенствъ:

$$\begin{cases} \cos(M_O, X) = \dfrac{M_{O,X}(\overline{F})}{M_O(\overline{F})}, \\ \cos(M_O, Y) = \dfrac{M_{O,X}(\overline{F})}{M_O(\overline{F})}, \\ \cos(M_O, Z) = \dfrac{M_{O,Z}(\overline{F})}{M_O(\overline{F})}, \end{cases}$$

подстановкою въ нихъ предъидущихъ выраженій.

Обозначивъ наконецъ черезъ X_i, Y_i, Z_i проекціи одной изъ силъ $\overline{F}_i$; приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, а черезъ X, Y, Z проекціи ихъ равнодѣйствующей:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \Sigma \overline{F}_i$$

на три взаимно-перпендикулярныя, прямолинейныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$, ясно, что

$$X = \Sigma X_i,\ Y = \Sigma Y_i,\ Z = \Sigma Z_i$$

ибо *проекція равнодѣйствующей на любую ось равна алгебраической суммѣ проекцій на ту же ось всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку*, причемъ величина и направленіе равнодѣйствующей и ея моменты, какъ относительно начала координатъ O, такъ и относительно осей координатъ, опредѣлятся по предъидущимъ формуламъ подстановкою въ нихъ вмѣсто X, Y, Z, вышенаписанныхъ суммъ.

II. Преобразованіе силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

§ 1. Три основныхъ пріема преобразованій силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Матеріальныя тѣла состоятъ изъ множества отдѣльныхъ, ничтожно малыхъ частицъ, или **молекулъ**, между которыми дѣйствуютъ силы **взаимодѣйствія**, называемыя **внутренними** силами, въ отличіе отъ которыхъ другія силы, дѣйствующія на данное матеріальное тѣло называютъ **внѣшними** силами. Внѣшія силы, дѣйствуя на матеріальныя тѣла, вообще говоря, ихъ **деформируютъ**, т. е. измѣняютъ взаимныя разстоянія между молекулами этихъ тѣлъ, но нѣкоторыя тѣла при дѣйствіи на нихъ внѣшнихъ силъ, не превышающихъ извѣстныхъ предѣловъ, деформируются настолько мало, что при рѣшеніи многихъ вопросовъ безъ особой погрѣшности можно пренебречь этими деформаціями, т. е. разсматривать такія матеріальныя тѣла, какъ **неизмѣняемыя** системы частицъ, причемъ, согласно сдѣланному допущенію, причину подобныхъ явленій надо приписать развивающимся въ такихъ тѣлахъ **внутреннимъ** силамъ; поэтому въ кинетикѣ вводится понятіе о **твердомъ тѣлѣ**, *какъ о системѣ* **свободныхъ матеріальныхъ** *точекъ, между которыми развиваются такія силы* **взаимодѣйствія** *или* **внутреннія** *силы, которыя не позволяютъ* **внѣшнимъ** *силамъ измѣнять взаимныя разстоянія между этими точками.*

Изъ этого опредѣленія твердаго тѣла, ясно что *силы приложенныя къ* **одной** *и* **той же** *точкѣ твердаго* **тѣла** *можно складывать и разлагать, какъ силы приложенныя къ матеріальной* **точкѣ**, *т. е. по правиламъ* **геометрическаго сложенія**.

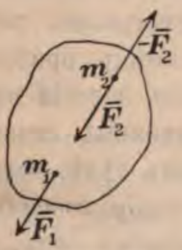
Чтобы установить теперь правила для преобразованій силъ, приложенныхъ къ **различнымъ** точкамъ твердаго тѣла, сдѣлаемъ временно **два** допущенія, хотя и весьма очевидныя, но которыя въ динамикѣ твердаго тѣла мы докажемъ, какъ слѣдствія вышеприведеннаго **кинетическаго** опредѣленія такихъ тѣлъ.

Допущенія. 1) **Одна** *сила, приложенная къ твердому тѣлу* **всегда измѣняетъ** *его* **кинематическое** *состояніе;* 2) **Двѣ** *силы, приложенныя къ твердому тѣлу,* **тогда** *и* **только тогда не измѣняютъ кинематическаго** *состоянія твердаго тѣла, когда онѣ* **равны, противоположны** *и дѣйствуютъ по* **одной** *прямой.*

Такія двѣ силы называются поэтому **двумя взаимно-уравновѣшивающимися по отношенію къ твердому тѣлу силами**, причемъ вышеприведенное допущеніе надо понимать въ томъ смыслѣ, что **двѣ такія силы** *можно приложить къ твердому тѣлу или отбросить отъ твердаго тѣла* **безъ измѣненія** *его* **кинематическаго** *состоянія, т. е. движеніе твердаго тѣла, каково бы оно не было, приэтомъ* **не измѣнится**.

Слѣдствіе. *Точку приложенія силы, дѣйствующей на твердое тѣло, можно безъ измѣненія его* **кинематическаго** *состоянія, перенести въ любую точку этого тѣла, лежащую на направленіи данной силы.*

Дѣйствительно, положимъ, что на твердое тѣло S (черт. 10) въ точкѣ его m_1 дѣйствуетъ нѣкоторая сила $\overline{F}_1$; въ такомъ случаѣ, взявъ на прямой направленія этой силы произвольную точку m_2 и приложивъ къ этой точкѣ двѣ равныя и прямопротивоположныя силы $\overline{F}_2$ и $-\overline{F}_2$, изъ которыхъ $\overline{F}_2 = \overline{F}_1$, мы видимъ, что силы $\overline{F}_1$ и $-\overline{F}_2$, какъ двѣ **взаимно-уравновѣшивающіяся** по отношенію къ твердому тѣлу силы, могутъ быть отброшены безъ измѣненія кинематическаго состоянія твердаго тѣла; слѣдовательно твердое тѣло подъ дѣйствіемъ силы $\overline{F}_2$ будетъ совершать **то же** движеніе, какъ и подъ дѣйствіемъ силы $\overline{F}_1$, ч. т. д.



Черт. 10.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ **тремъ основнымъ пріемамъ** *преобразованій силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу*, **неизмѣняющимъ** *его* **кинематическаго** *состоянія:*

1) *Силы, приложенныя къ* **одной и той же** *точкѣ твердаго тѣла, можно* **складывать** *и* **разлагать** *по правиламъ* **геометрическаго** *сложенія.*

2) *Точку* **приложенія** *силы дѣйствующей на твердое тѣло, можно* **переносить** *по прямой ея направленія.*

3) *Къ дѣйствующимъ на твердое тѣло силамъ можно присоединять, или откидывать отъ нихъ двѣ* **равныя, прямо-противоположныя** *и дѣйствующія по* **одной** *прямой силы.*

Примѣчаніе. Мы называемъ эти **три** пріема **основными пріемами** преобразованій силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, потому что при помощи этихъ трехъ пріемовъ можно установить полную теорію преобразованій такихъ силъ, какъ это сдѣлалъ *Poinsot*, но мы изложимъ ту же теорію нѣсколько иначе.

§ 2. Приведеніе любой системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу къ двумъ силамъ.

Теорема. *Всякая* **система** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть, безъ измѣненія его* **кинематическаго** *состоянія, приведена къ* **двумъ** *силамъ.*

Дѣйствительно, положимъ сначала, что къ твердому тѣлу S (черт. 11) въ **трехъ** его точкахъ m_1, m_2, m_3 приложены соотвѣтственно три силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$.

Черт. 11.

Проведемъ черезъ точку приложенія одной изъ нихъ, напр. черезъ точку m_1 плоскости Q_2, Q_3, проходящія соотвѣтственно черезъ двѣ другія силы $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$; въ такомъ случаѣ эти двѣ плоскости, вообще говоря, пересѣкутся по нѣкоторой прямой, проходящей черезъ точку m_1.

Возьмемъ на этой прямой произвольную точку m_4 и, соединивъ точки m_1 и m_4 съ точками m_2, m_3 прямыми линіями, разложимъ, приложенныя къ точкамъ m_2, m_3, силы $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ по направленіямъ этихъ прямыхъ; тогда каждая изъ послѣднихъ силъ, вообще говоря, разложится на двѣ новыя силы:

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{2,1} + \overline{F}_{2,4}, \quad \overline{F}_3 = \overline{F}_{3,1} + \overline{F}_{3,4},$$

направленія которыхъ будутъ проходить соотвѣтственно черезъ точки m_1 и m_4, и потому, перенеся затѣмъ точки приложеній силъ $\overline{F}_{2,1}$, $\overline{F}_{3,1}$ въ точку m_1, а точки приложеній силъ $\overline{F}_{2,4}$, $\overline{F}_{3,4}$ въ точку m_4 и замѣнивъ силы, приложенныя къ точкамъ m_1 и m_4, ихъ равнодѣйствующими:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_{2,1} + \overline{F}_{3,1} \quad \text{и} \quad \overline{F}_4 = \overline{F}_{2,4} + \overline{F}_{3,4},$$

мы приведемъ систему **трехъ** силъ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, приложенныхъ къ тремъ точкамъ твердаго тѣла, къ **двумъ** силамъ: $\overline{F}$ и $\overline{F}_4$, приложеннымъ къ точкамъ m_1 и m_4 этого тѣла.

Если плоскости Q_2 и Q_3 совпадутъ, то за точку m_4 можно взять **произвольную** точку, лежащую въ этой плоскости.

Итакъ, *система* **трехъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, всегда можетъ быть приведена къ* **двумъ** *силамъ, безъ измѣненія его кинематическаго состоянія, а слѣдовательно и* **всякая** *система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть подобнымъ же образомъ приведена къ* **двумъ** *силамъ,* ибо замѣняя послѣдовательно при помощи указаннаго построенія **три** силы данной системы **двумя**, т. е. уменьшая послѣдовательно число силъ данной системы на единицу, мы приведемъ ее въ концѣ концовъ къ **двумъ** силамъ, безъ измѣненія кинематическаго состоянія твердаго тѣла.

§ 3. Инваріанты системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

При помощи вышеуказанныхъ трехъ основныхъ пріемовъ преобразованій силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можно безконечно **видоизмѣнять** такія системы силъ, не измѣняя кинематическаго состоянія твердаго тѣла, причемъ, какъ нетрудно непосредственно убѣдиться, *при всѣхъ такихъ преобразованіяхъ* **геометрическія суммы** *силъ въ преобразованныхъ системахъ, и* **линейные моменты** *всѣхъ такихъ системъ силъ относительно нѣкотораго центра O* **не будутъ измѣнять** *ни своихъ* **величинъ**, *ни своихъ* **направленій**, *т. е.*

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \Sigma \overline{F}_i = const.$$

и

$$\overline{L}_O = \overline{M}_O(\overline{F}_1) + \overline{M}_O(\overline{F}_2) + \ldots + \overline{M}_O(\overline{F}_n) = \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i) = const.$$

Дѣйствительно:

1) при сложеніи и разложеніи силъ, приложенныхъ къ **одной** и **той же** точкѣ твердаго тѣла, по правиламъ **геометрическаго** сложенія ихъ геометрическая сумма и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ относительно нѣкотораго центра O не измѣняются, а потому не измѣняются и **геометрическія суммы** $\overline{F}$ всѣхъ силъ, въ такихъ преобразованныхъ системахъ и ихъ **линейные моменты** $\overline{L}_O$;

2) при перенесеніи точки приложенія силы по линіи ея направленія величина и направленіе самой силы и ея линейнаго момента не измѣняются; слѣдовательно этотъ пріемъ преобразованія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, тоже не вліяетъ на ихъ **геометрическую сумму** $\overline{F}$ и ихъ **линейный моментъ** $\overline{L}_O$; наконецъ;

3) геометрическая сумма двухъ силъ **равныхъ**, **прямопротивоположныхъ** и дѣйствующихъ по **одной** прямой и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ равны **нулю**, поэтому приложеніе къ твердому тѣлу или отбрасываніе отъ него такихъ двухъ силъ тоже не измѣняютъ **геометрической суммы** $\overline{F}$ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и **линейнаго момента** $\overline{L}_O$ такой системы силъ.

Поэтому **геометрическую сумму** $\overline{F}$, *системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и* **линейный моментъ** $\overline{L}_0$ *такой системы силъ относительно нѣкотораго центра O мы будемъ называть* **инваріантами** *системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу;* выражая этимъ названіемъ **неизмѣняемость** указанныхъ **двухъ векторовъ** при всевозможныхъ преобразованіяхъ данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, при помощи трехъ основныхъ пріемовъ такихъ преобразованій.

Но, если $\overline{F}$ и $\overline{L}_0$ суть **инваріанты** данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, т. е. не измѣняются при всевозможныхъ указанныхъ преобразованіяхъ такой системы, то ихъ **геометрическое произведеніе:**

$$\overline{F}\,\overline{L}_0 = F L_0 \cos(F, L_0)$$

тоже не будетъ зависѣть отъ такихъ преобразованій, т. е. тоже будетъ **инваріантомъ** *данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу,* причемъ нетрудно убѣдиться, что **этотъ** *инваріантъ не зависитъ еще и отъ* **выбора центра** *O линейнаго момента* $\overline{L}_O$.

Дѣйствительно, принявъ во вниманіе, что по извѣстной теоремѣ (Введ. теор. 11)

$$\overline{L}_{O_1} = \overline{L}_O + \overline{M}_{O_1}(\overline{F})_O,$$

мы приходимъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\overline{F} \,.\, \overline{L}_{o_1} = \overline{F} \,.\, [\overline{L}_o + \overline{M}_{o_1}(\overline{F})_o] = \overline{F} \,.\, \overline{L}_o,$$

ибо

$$\overline{F} \,.\, \overline{M}_{o_1}(\overline{F})_o = 0,$$

такъ какъ

$$\overline{M}_{o_1}(\overline{F})_o \perp \overline{F},$$

т. е. линейный моментъ силы $\overline{F}$ относительно любого центра O_1 перпендикуляренъ къ этой силѣ $\overline{F}$.

Итакъ, каждая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, обладаетъ **тремя инваріантами:**

$$1)\ \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i = const, \quad 2)\ \overline{L}_o = \Sigma\overline{M}_o(\overline{F}_i) = const.$$

и

$$3)\ \overline{F}\ \overline{L}_o = FL_o\cos(F, L_o) = const.,$$

т. е. **геометрическая сумма** $\overline{F}$ *всѣхъ силъ такой системы, ея* **линейный моментъ** $\overline{L}_o$ *относительно нѣкотораго центра O и* **геометрическое произведеніе** $\overline{F}\ \overline{L}_o$ *этихъ двухъ векторовъ* **не зависятъ** *отъ преобразованій системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, при помощи указанныхъ трехъ пріемовъ, причемъ* **послѣдній инваріантъ** *не зависитъ еще и отъ* **выбора центра** *O линейнаго момента* $\overline{L}_o$, *т. е.* $\overline{F}\ \overline{L}_{o_1} = \overline{F}\ \overline{L}_o$.

§ 4. Системы взаимно-уравѣшивающихся силъ и эквивалентныя системы силъ, по отношенію къ твердому тѣлу.

1) *Системами* **взаимно-уравновѣшивающихся** *силъ по отношенію къ твердому тѣлу мы будемъ называть такія системы силъ, которыя можно* **приложить** *къ твердому тѣлу или* **откинуть** *отъ него* **безъ измѣненія** *его* **кинематическаго** *состоянія.*

Нетрудно убѣдиться, что для того, *чтобы данная система силъ была системою* **взаимно-уравновѣшивающихся** *силъ по отношенію къ твердому тѣлу, необходимо и достаточно, чтобы* **геометрическая сумма** *всѣхъ силъ этой системы и ея* **линейный моментъ** *относительно нѣкотораго центра O были равны* **нулю**, *т. е.*

$$\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i = 0 \text{ и } \overline{L}_o = \Sigma\overline{M}_o(\overline{F}_i) = 0.$$

Дѣйствительно, положимъ, что данная система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, удовлетворяетъ указаннымъ **двумъ** условіямъ; въ такомъ случаѣ эта система силъ, какъ всякая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть приведена, безъ измѣненія его кинематическаго состоянія, къ **двумъ** силамъ, причемъ въ данномъ случаѣ геометрическая сумма этихъ **двухъ** силъ и геомтрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ должны быть равны **нулю,** такъ какъ $\overline{F}$ и $\overline{L}_0$ суть **инваріанты** системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Но чтобы геометрическая сумма **двухъ** силъ была равна нулю необходимо и достаточно, чтобы эти силы были **равны** по величинѣ, **противоположны** по направленію, а чтобы геометрическая сумма линейныхъ моментовъ двухъ **равныхъ и противоположно** направленныхъ силъ была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы онѣ дѣйствовали по **одной** прямой; такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ двумъ **взаимно-уравновѣшивающимся** по отношенію къ твердому тѣлу силамъ, т. е. можетъ быть откинута или приложена къ твердому тѣлу безъ измѣненія его кинематическаго состоянія.

Наоборотъ, всякая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, не удовлетворяющая двумъ вышеуказаннымъ условіямъ не будетъ приводиться къ двумъ взаимно-уравновѣшивающимся силамъ и потому указанныя два условія не только **достаточны** но и **необходимы**.

2) **Эквивалентными системами** *силъ по отношенію къ твердому тѣлу мы будемъ называть такія системы силъ, которыя можно* **подставлять** *одну вмѣсто другой* **безъ измѣненія кинематическаго** *состоянія твердаго тѣла.*

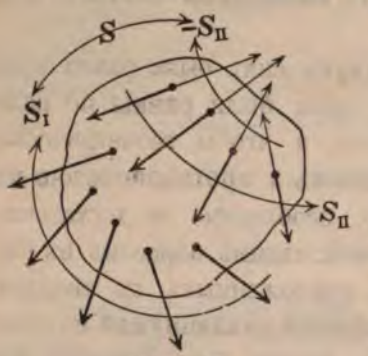
Для того, *чтобы двѣ системы силъ* S_{I} *и* S_{II} *были* **эквивалентны** *по отношенію къ твердому тѣлу необходимо и достаточно, чтобы* **геометрическія сумиы** $\overline{F}_{\text{I}}$, $\overline{F}_{\text{II}}$ *и* **линейные моменты** $\overline{L}_{0,\text{I}}$, $\overline{L}_{0,\text{II}}$ *этихъ системъ силъ относительно нѣкотораго центра O были соотвѣтственно* **геометрически** *равны, т. е.*

$$\overline{F}_{\text{II}} = \overline{F}_{\text{I}} \text{ и } \overline{L}_{0,\text{II}} = \overline{L}_{0,\text{I}}.$$

Дѣйствительно, положимъ, что къ твердому тѣлу (черт. 12) при-

ложена система силъ S_{I}; въ такомъ случаѣ, не измѣняя его кинематическаго состоянія, можно приложить къ нему системы S_{II} и $-S_{\text{II}}$ силъ соотвѣтственно равныхъ, прямопротивоположныхъ и приложенныхъ къ однѣмъ и тѣмъ же точкамъ этого тѣла.

Соединимъ теперь системы S_{I} и $-S_{\text{II}}$ въ одну систему S; тогда при **удовлетвореніи** системъ S_{I}, S_{II} вышеуказаннымъ **двумъ** условіямъ, геометрическая сумма $\overline{F}$ всѣхъ силъ этой системы S и ея линейный моментъ $\overline{L}_o$ очевидно будутъ равны нулю, ибо



Черт. 12.

$$\overline{F} = \overline{F}_{\text{I}} - \overline{F}_{\text{II}} = 0$$

и

$$\overline{L}_o = \overline{L}_{o,\text{I}} - \overline{L}_{o,\text{II}} = 0;$$

слѣдовательно эта система S будетъ системою **взаимно-уравновѣшивающихся** по отношенію къ твердому тѣлу силъ, т. е. она можетъ быть откинута безъ измѣненія кинематическаго состоянія твердаго тѣла, причемъ къ нему останется приложенною система силъ S_{II}, и потому системы S_{I}, S_{II} будутъ **эквивалентны** по отношенію къ твердому тѣлу.

Наоборотъ, если системы силъ S_{I} и S_{II} **эквивалентны** по отношенію къ твердому тѣлу, то приложивъ къ твердому тѣлу системы силъ S_{I}, S_{II} и $-S_{\text{II}}$, мы можемъ откинуть системы S_{I} и $-S_{\text{II}}$ безъ измѣненія кинематическаго состоянія твердаго тѣла, то есть совокупность этихъ двухъ системъ есть система S **взаимно-уравновѣшивающихся** по отношенію къ твердому тѣлу силъ, и потому **геометрическая сумма** $\overline{F}$ всѣхъ силъ этой системы и ея **линейный моментъ** $\overline{L}_o$ относительно любого центра O должны быть равны **нулю**, т. е.

$$\overline{F} = \overline{F}_{\text{I}} - \overline{F}_{\text{II}} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{L}_o = \overline{L}_{o,\text{I}} - \overline{L}_{o,\text{II}} = 0;$$

слѣдовательно:

$$\overline{F}_{\text{II}} = \overline{F}_{\text{I}} \quad \text{и} \quad \overline{L}_{o,\text{II}} = \overline{L}_{o,\text{I}};$$

поэтому, высказанныя нами **условія эквивалентности** системъ силъ по отношенію къ твердому тѣлу не только **достаточны**, но и **необходимы**.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ совокупность двухъ инваріантовъ

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i \text{ и } \overline{L}_O = \Sigma \overline{M}_O (\overline{F}_i)$$

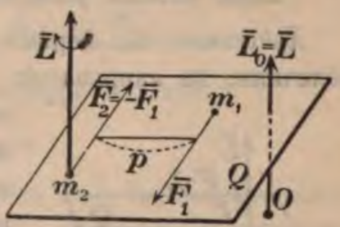
системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, есть, такъ сказать, **кинетическая схема** такой системы силъ, такъ какъ всѣ системы силъ, имѣющія одинаковые инваріанты, эквивалентны по отношенію къ данному твердому тѣлу, т. е. оказываютъ на него **одинаковое** дѣйствіе; другими словами **дѣйствіе** системы силъ на данное твердое тѣло вполнѣ **опредѣляется** совокупностью двухъ ея инваріантовъ и **не зависитъ** ни отъ какихъ другихъ обстоятельствъ.

Примѣнимъ это заключеніе къ **парѣ силъ**, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

§ 5. Пара силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и ея свойства.

«Парою силъ», *приложенныхъ къ твердому тѣлу, называются двѣ, приложенныя къ нему, силы: равныя, параллельныя, но противоположно направленныя и не дѣйствующія по одной прямой.*

Разстояніе p (черт. 13) между направленіями пары силъ называется ея **«плечомъ»**, а линейный моментъ $\overline{L}_O$ пары силъ, т. е. геометрическая сумма линейныхъ моментовъ пары силъ относительно нѣкотораго центра O называется просто ея **линейнымъ моментомъ** $\overline{L}$, такъ какъ эта геометрическая сумма **не зависитъ** отъ **выбора центра,** причемъ **величина** линейнаго момента $\overline{L}$ пары силъ равна произведенію $F_1 . p$ одной изъ пары силъ на ея плечо, а **направленіе** $\overline{L}$ перпендикулярно къ плоскости пары, притомъ идетъ въ ту сторону, что, вставъ по этому направленію въ точкѣ приложенія одной изъ пары, силъ мы увидимъ другую, идущею **слѣва направо.**



Черт. 13.

Такимъ образомъ въ **парахъ силъ** первое условіе эквивалентности всегда **выполнено,** такъ какъ геометрическія суммы такихъ системъ силъ по опредѣленію равны нулю; слѣдовательно *для* **эквивалентности** *по отношенію къ твердому тѣлу* **паръ силъ** *необходимо и достаточно лишь, чтобы ихъ* **линейные моменты** *были* **геоме-**

трически равны, откуда вытекають слѣдующія **свойства** пары силъ, приложенной къ твердому тѣлу.

1) *Пару силъ, приложенную къ твердому тѣлу, можно, не измѣняя ея дѣйствія, какъ угодно перемѣщать въ ея плоскости.*

2) *Плоскость пары силъ, приложенной къ твердому тѣлу, не измѣняя ея дѣйствія, можно переносить параллельно самой себѣ.*

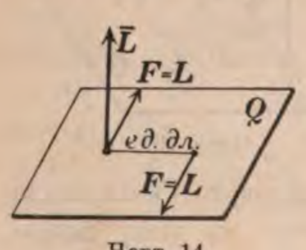
3) *Можно, не измѣняя дѣйствія пары силъ на твердое тѣло, увеличить или уменьшить ея силы, уменьшивъ или увеличивъ въ* **то же** *число разъ ея плечо.*

4) *Если на твердое тѣло дѣйствуютъ заразъ n* **паръ силъ,** *линейные моменты которыхъ суть соотвѣтственно $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \ldots \bar{L}_n$, то ихъ можно замѣнить одною* **равнодѣйствующею парою,** *линейный моментъ которой $\bar{L}$ равенъ* **геометрической** *суммѣ линейныхъ моментовъ дѣйствующихъ паръ, т. е.*

$$\bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \ldots + \bar{L}_n = \Sigma \bar{L}_i.$$

Примѣчаніе. *За такую* **равнодѣйствующую** *пару силъ* (черт. 14) *можно взять напримѣръ пару силъ, лежащую въ плоскости перпендикулярной къ $\bar{L}$, съ плечомъ равнымъ единицѣ длины и съ силами, численно равными величинѣ этого линейнаго момента $\bar{L}$.*

Дѣйствительно, первыя три преобразованія не измѣняютъ ни величины, ни направленія линейнаго момента пары силъ; слѣдовательно всѣ такія пары силъ будутъ **эквивалентны**; наконецъ пара силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, линейный моментъ которой $\bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \ldots + \bar{L}_n$ равенъ геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ n данныхъ паръ силъ, приложенныхъ къ этому тѣлу, очевидно будетъ **эквивалентна** этимъ n **парамъ силъ**, ибо геометрическія суммы силъ въ обѣихъ системахъ равны нулю, и линейные моменты ихъ относительно любого центра, будучи соотвѣтственно геометрически равны $\bar{L}$ и $\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \ldots + \bar{L}_n$, тоже будутъ **геометрически** равны.



Черт. 14.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ дѣйствіе *«пары силъ»* **на твердое тѣло зависитъ лишь отъ величины и направленія ея линейнаго момента: такъ**

напримѣръ то или другое положеніе пары силъ въ ея плоскости, то или другое параллельныя положенія самой этой плоскости внутри твердаго тѣла, величины силъ и плеча пары въ отдѣльности при одномъ и томъ же ихъ произведеніи не имѣютъ значенія на ея дѣйствіе на твердое тѣло, такъ какъ всѣ такія пары силъ будутъ имѣть одинъ и тотъ же линейный моментъ, т. е. будутъ **эквивалентны** по отношенію къ твердому тѣлу и потому можно сказать, что **линейный моментъ** *пары силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, есть* **кинетическая схема** *такой системы силъ*, что между прочимъ выясняетъ **кинетическое** значеніе, введеннаго нами, **общаго** понятія о **линейномъ моментѣ** «*пары векторовъ*».

§ 6. Классификація системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Мы доказали, что всякая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, обладаетъ **инваріантомъ:**

$$\overline{F}\,\overline{L}_0 = FL_0 \cos(F, L_0) = const.,$$

не зависящимъ ни отъ **преобразованій** этой системы силъ, ни отъ **выбора центра** O; поэтому можно установить слѣдующую **классификацію** системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу:

$$I. \quad \overline{F}\,\overline{L}_0 = FL_0 \cos(F, L_0) = 0.$$

Этотъ случай допускаетъ слѣдующіе **четыре** подслучая:

1) $$\overline{F} = 0, \ \overline{L}_0 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ система силъ будетъ, какъ мы знаемъ, системою **взаимно-уравновѣшивающихся** *силъ по отношенію къ твердому тѣлу*, т. е. такая система силъ можетъ быть **приложена** къ твердому тѣлу или **откинута** отъ твердаго тѣла **безъ** измѣненія его **кинематическаго** состоянія.

2) $$\overline{F} = 0, \ \overline{L}_0 > 0.$$

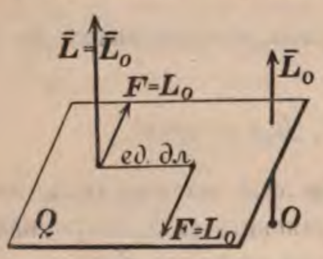
Въ этомъ случаѣ система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ **парѣ силъ, линейный моментъ** *которой* $\overline{L}$ *геометрически равенъ линейному моменту* $\overline{L}_0$ *данной системы, т. е.* $\overline{L} = \overline{L}_0$.

Дѣйствительно, такая пара силъ очевидно будетъ **эквивалентна** данной системѣ силъ, ибо геометрическія суммы силъ въ той и другой системахъ равны нулю, и линейные моменты этихъ системъ по условію **геометрически равны**

Для построенія такой пары силъ достаточно (черт. 15) вообразить въ твердомъ тѣлѣ плоскость Q, перпендикулярную къ $\overline{L}_O$, и отложивъ въ этой плоскости по произвольному направленію плечо, равное **единицѣ длины**, приложить къ концамъ этого плеча въ той же плоскости перпендикулярныя къ нему силы, численно равныя L_O, но противоположно направленныя и притомъ такъ, чтобы относительно наблюдателя, стоящаго по направленію $\overline{L}_O$ въ одномъ концѣ этого отрѣзка, сила, приложенная къ другому его концу, шла **слѣва направо**; тогда такая пара силъ очевидно будетъ имѣть требуемый линейный моментъ $\overline{L} = \overline{L}_O$.

3) $$\overline{F} > 0,\ \ \overline{L}_O = 0.$$

Въ этомъ случаѣ система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ одной **равнодѣйствующей** $(\overline{F})_O = \overline{F}$, *проходящей черезъ точку O, относительно которой линейный моментъ $\overline{L}_O$ данной системы силъ равенъ* **нулю.**



Черт. 15.

Дѣйствительно, приложивъ къ такой точкѣ O, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, силу $(\overline{F})_O = \overline{F}$, мы видимъ, что эта сила $(\overline{F})_O$ будетъ **эквивалентна** данной системѣ силъ, ибо она равна геометрической суммѣ $\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$ всѣхъ силъ данной системы и ея линейный моментъ относительно точки O очевидно будетъ равенъ нулю, т. е. будетъ равенъ линейному моменту относительно того же центра данной системы силъ.

4) $$\overline{F} \perp \overline{L}_O.$$

Въ этомъ случаѣ всегда можно построить такую точку O_1, относительно которой линейный моментъ данной системы силъ обратится въ **нуль**, *и потому такая система силъ приведется къ одной* **равнодѣйствующей** *силъ $(\overline{F})_{O_1} = \overline{F}$, проходящей черезъ эту точку O_1.*

Дѣйствительно, проведя черезъ точку O (черт. 16) плоскость Q, перпендикулярную къ $(\overline{F})_O$, мы видимъ, что $\overline{L}_O$ будетъ лежать въ этой плоскости; если теперь мы возставимъ въ плоскости Q изъ точки O перпендикуляръ къ $\overline{L}_O$, направо относительно наблюдателя, стоящаго въ этой точкѣ по направленію $(\overline{F})_O$ и обращеннаго лицомъ по направленію $\overline{L}_O$, и отложимъ на этомъ перпендикулярѣ отрѣзокъ:

$$OO_1 = \frac{L_O}{F},$$

то ясно, что (Введ. теор. 11)

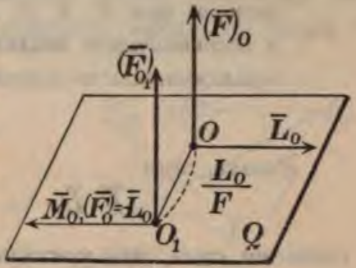
$$\overline{L}_{O_1} = \overline{L}_O + \overline{M}_{O_1}(\overline{F})_O = 0,$$

ибо по построенію

$$M_{O_1}(\overline{F})_O = F \cdot OO_1 = L_O$$

и направленіе $\overline{M}_{O_1}(\overline{F})_O$, будучи перпендикулярно къ плоскости $[O_1, (\overline{F})_O]$, будетъ **противоположно** направленію $\overline{L}_O$.

Наоборотъ, если система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ одной **равнодѣйствующей** силѣ, то линейный моментъ такой системы относительно точки приложенія O_1 этой равнодѣйствующей долженъ быть равенъ **нулю**, т. е. $\overline{L}_{O_1} = 0$; слѣдовательно $\overline{F}\,\overline{L}_O = \overline{F}\,\overline{L}_{O_1} = 0$.



Черт. 16.

Итакъ *для того, чтобы система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводилась къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ, необходимо и достаточно, чтобы эта система удовлетворяла* **двумъ** *условіямъ:*

$$\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i > 0 \text{ и } \overline{F}\,\overline{L}_O = 0,$$

т. е. чтобы геометрическая сумма $\overline{F}$ всѣхъ силъ этой системы **не была** *равна* **нулю** *и чтобы геометрическое произведеніе $\overline{F}\,\overline{L}_O$ изъ геометрической суммы $\overline{F}$ на линейный моментъ $\overline{L}_O$ системы силъ относительно любого центра O* **было бы** *равно* **нулю.**

Если силы, приложенныя къ твердому тѣлу, лежатъ въ **одной плоскости,** *то для возможности приведенія ихъ къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ необходимо и достаточно лишь, чтобы ихъ геометрическая сумма была болѣе нуля, т. е.* $\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i > 0$, ибо, принявъ за центръ O линейнаго момента $\overline{L}_O$ одну изъ точекъ O этой плоскости, ясно, что $\overline{L}_O$ будетъ перпендикуляренъ къ $\overline{F}$, т. е. $\overline{F}\,\overline{L}_O = 0$.

Примѣчаніе. Обозначивъ черезъ

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i$$

проекціи геометрической суммы $\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$ всѣхъ силъ данной системы на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ (O; X, Y, Z), а черезъ

$$L_{OX} = \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i), \quad L_{OY} = \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i), \quad L_{OZ} = \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i)$$

моменты этой системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно тѣхъ же осей и припомнивъ **аналитическое** выраженіе геометрическаго про-

изведенія двухъ векторовъ (Введ. стр. 28), мы придемъ къ заключенію, что условіе

$$\overline{F}\,\overline{L}_0 = FL_0 \cos(F, L_0) = 0$$

аналитически выразится равенствомъ:

$$XL_{0x} + YL_{0y} + ZL_{0z} = 0,$$

которое при X, Y, Z, заразъ **неравныхъ нулю**, *будетъ необходимымъ и достаточнымъ* **аналитическимъ** *условіемъ проведенія системы силъ приложенныхъ къ твердому тѣлу къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ:*

$$\overline{F} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}.$$

Итакъ, при

$$\overline{F}\,\overline{L}_0 = FL_0 \cos(F, L_0) = 0$$

система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ представить **три** *случая*:

1) *при* $\overline{F} = 0$ *и* $\overline{L}_0 = 0$ *она будетъ системою* **взаимноуравновѣшивающихся** *силъ по отношенію къ твердому тѣлу*,

2) *при* $\overline{F} = 0$ *и* $\overline{L}_0 > 0$ *она приводится къ* **парѣ силъ**, *линейный моментъ которой* $\overline{L} = \overline{L}_0$ *и наконецъ*,

3) *при* $\overline{F} > 0$ *она приводится къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ* $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$.

Разсмотримъ теперь случай

$$II.\ \overline{F}\,\overline{L}_0 = FL_0 \cos(F, L_0) \gtrless 0.$$

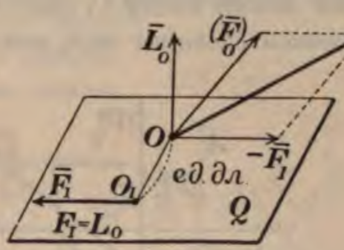
Въ этомъ случаѣ система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ **двумъ** *силамъ*, **не лежащимъ** *въ одной плоскости, изъ которыхъ одна можетъ быть приложена къ* **произвольной** *точкѣ O твердаго тѣла.*

Дѣйствительно, отложивъ (черт. 17) отъ произвольной точки твердаго тѣла силу: $(\overline{F})_0 = \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ и линейный моментъ $\overline{L}_0$ данной системы силъ относительно этого центра O, проведемъ черезъ точку O плоскость Q перпендикулярную къ $\overline{L}_0$; въ такомъ случаѣ, вообразивъ въ этой плоскости пару силъ, линейный моментъ которой равенъ $\overline{L}_0$, напримѣръ пару съ плечомъ OO_1 равнымъ единицѣ длины и съ силами $\overline{F}_1, -\overline{F}_1$, численно равными L_0, изъ которыхъ сила $\overline{F}_1$ идетъ слѣва направо относительно наблюдателя, стоящаго въ точкѣ O по направленію $\overline{L}_0$, не трудно видѣть, что система трехъ силъ

$$(\overline{F})_0,\ \overline{F}_1 \text{ и } -\overline{F}_1$$

будетъ эквивалентна данной системѣ, ибо геомерическая сумма этихъ трехъ силъ, очевидно равна $(\overline{F})_O = \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$ **и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ относительно точки** O **будетъ равна** $\overline{M}_O(\overline{F}_I) = \overline{L}_O$.

Такимъ образомъ *въ разсматриваемомъ случаѣ система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ* **силѣ** $(\overline{F})_O = \Sigma\overline{F}_i$, *приложенной къ* **произвольной** *точкѣ O этого тѣла и къ* **парѣ силъ,** *линейный моментъ которой геометрически равенъ линейному моменту* $\overline{L}_O$ *данной системы силъ относительно* **выбранной** *точки O приложенія силы* $(\overline{F})_O = \Sigma\overline{F}_i$.



Черт. 17.

Соединивъ теперь силы $(\overline{F})_O$ **и** $-\overline{F}_I$, **приложенныя къ одной той же точкѣ** O **твердаго тѣла, въ одну силу**

$$\overline{F}_{II} = \overline{F}_O - \overline{F}_I,$$

мы видимъ, что *данная система силъ приведется къ двумъ силамъ* $\overline{F}_I$, $\overline{F}_{II}$, **не лежащимъ** *въ одной плоскости, изъ которыхъ сила* $\overline{F}_{II}$ *приложена къ* **произвольной** *точкѣ O твердаго тѣла.*

Итакъ, при

$$\overline{F}\,\overline{L}_o = F\,L_o \cos(F, L_o) \lesseqgtr 0$$

система силъ приложенныхъ къ твердому тѣлу **не можетъ быть** *приведена къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ, а приводится или*

1) *къ* **двумъ,** *не лежащимъ въ одной плоскости силамъ, изъ которыхъ* **одна** *можетъ быть приложена къ* **произвольной** *точкѣ O твердаго тѣла, или*

2) *къ* **силѣ** $(\overline{F})_O = \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$, *приложенной къ произвольной точкѣ O этого тѣла и* **парѣ силъ,** *линейный моментъ которой* **геометрически** *равенъ линейному моменту* $\overline{L}_O$ *данной системы силъ относительно выбранной точки приложенія силы* $(\overline{F})_O = \Sigma\overline{F}_i$.

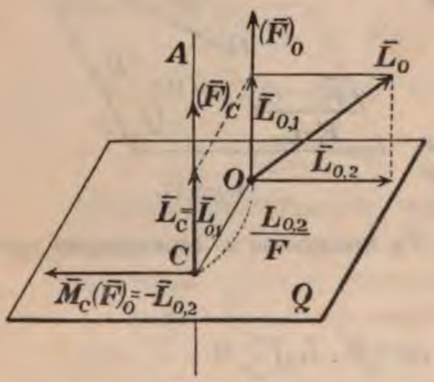
§ 7. Центральная ось системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Мы видѣли (черт. 17), что въ случаѣ:

$$\overline{F}\,\overline{L}_o = F L_o \cos(F, L_o) \gtrless 0$$

система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть приведена къ **силѣ** $(\overline{F})_O = \Sigma \overline{F}_i$, приложенной къ **произвольной** точкѣ O этого тѣла и къ **парѣ силъ**, линейный моментъ которой геометрически равенъ линейному моменту $\overline{L}_O$ данной системы силъ относительно выбранной точки **приложенія** O силы $(\overline{F})_O = \Sigma \overline{F}_i$, причемъ $(\overline{F})_O$ и $\overline{L}_O$ будутъ, вообще говоря, составлять между собою **нѣкоторый** уголъ.

Докажемъ теперь, что *въ разсматриваемомъ случаѣ всегда можно найти такую точку* C, *относительно которой линейный моментъ* $\overline{L}_C$ *данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, будетъ* **параллеленъ** *ихъ* **геометрической суммѣ** $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$.



Черт. 18.

Дѣйствительно, проведя черезъ точку O (черт. 18) плоскость Q, перпендикулярную къ направленію $(\overline{F})_O = \Sigma \overline{F}_i$ и спроектировавъ $\overline{L}_O = \overline{L}_{0,1} + \overline{L}_{0,2}$ на эту плоскость и направленіе $(\overline{F})_O$, проведемъ изъ точки O перпендикуляръ $OC = \frac{L_{0,2}}{F}$ къ плоскости этого прямоугольника, направо относительно наблюдателя, стоящаго по $(\overline{F})_O$ и обращеннаго лицомъ къ $\overline{L}_O$; въ такомъ случаѣ мы видимъ, что

$$\overline{L}_C = \overline{L}_O + \overline{M}_C(\overline{F})_O = \overline{L}_{0,1} + \overline{L}_{0,2} + \overline{M}_C(\overline{F}) = \overline{L}_{0,1},$$

ибо по построенію

$$\overline{M}_C(\overline{F})_O = -\overline{L}_{0,2};$$

слѣдовательно

$$\overline{L}_C = \overline{L}_{0,1},$$

т. е. *линейный моментъ данной системы силъ относительно такой точки* C **параллеленъ** $\overline{F}$ *и потому, проведя черезъ эту точку* C *прямую* CA, *параллельную* $\overline{F}$, *мы получимъ* **геометрическое мѣсто** *всѣхъ точекъ* C, *относительно которыхъ линейный моментъ данной системы силъ будетъ* **параллеленъ** *ихъ геометрической суммѣ; эта прямая называется* **центральною осью** *данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.*

Укажемъ нѣкоторыя **свойства** этой оси.

Мы знаемъ, что (Введ. теор. 11)

$$\overline{L}_o = \overline{L}_c + \overline{M}_o(\overline{F})_c,$$

т. е. (черт. 19)

$$L_o^2 = L_c^2 + (Fr)^2,$$

гдѣ r есть разстояніе точки O до центральной оси; слѣдовательно:

1) **Центральная ось** *данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, есть геометрическое мѣсто точекъ C, относительно которыхъ линейные моменты* $\overline{L}_C$ *этой системы имѣютъ* **наименьшую** *величину.*

2) Линейные моменты $\overline{L}_O$ *данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно всѣхъ точекъ O, лежащихъ на круговой цилиндрической поверхности, имѣющей своею осью* **центральную ось** *данной системы силъ равны по величинѣ и наклонены къ центральной оси подъ однимъ и тѣмъ же угломъ:*

$$\varphi = arctg\,\frac{Fr}{L_C}.$$

Черт. 19.

3) Проекціи линейныхъ моментовъ $\overline{L}_O$ *данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, на направленіе ея* **центральной оси** *равны между собою и равны линейному моменту* $\overline{L}_C$ *данной системы силъ относительно одной изъ точекъ C ея центральной оси.*

§ 8. Система параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, и ея центръ.

Теорема. *Система* **параллельныхъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу,* **одинаково** *или* **различно** *направленныхъ, всегда можетъ быть приведена къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ:*

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \Sigma\overline{F}_i,$$

если только эта геометрическая сумма **не равна нулю.**

Дѣйствительно, взявъ произвольную ось OZ, параллельную направленіямъ данной системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ

къ твердому тѣлу, мы знаемъ, что моментъ $L_{Oz} = \Sigma M_{Oz}(\overline{F}_i)$ такой системы силъ относительно этой оси будетъ равенъ нулю; слѣдовательно

$$L_{O,z} = L_{Oz} = \Sigma M_{Oz}(\overline{F}_i) = 0,$$

т. е. проекція $L_{O,z}$ линейнаго момента $\overline{L}_O$ такой системы силъ относительно любой точки O оси OZ, взятая на направленіе этой оси, будетъ равна нулю; другими словами, направленіе указаннаго линейнаго момента $\overline{L}_O$ будетъ **перпенднкулярно** къ направленію оси OZ, а слѣдовательно—и къ направленіямъ силъ и ихъ геометрической суммы $\overline{F}$, т. е.

$$\overline{F}\,\overline{L}_O = 0,$$

что въ связи съ условіемъ $\overline{F} > 0$ необходимо и достаточно, какъ мы знаемъ, чтобы данная система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводилась къ одной **равнодѣйствующей** силѣ.

Условившись параллельныя силы, направленныя въ одну сторону, считать **положительными,** а въ другую **отрицательными,** мы видимъ, что **равнодѣйствующая** *системы* **параллельныхъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, по величинѣ и по знаку, т. е. по* **величинѣ** *и* **направленію** *опредѣлится изъ* **алгебраическаго** *равенства:*

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \Sigma F_i.$$

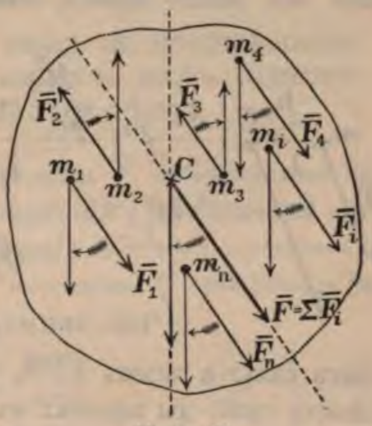
Такимъ образомъ для того, *чтобы система* **параллельныхъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводилась къ одной* **равнодѣйствующей** *силѣ, необходимо и достаточно, чтобы* **алгебраическая** *сумма этихъ силъ, если условиться силы направленныя въ одну сторону считать* **положительными,** *а въ другую —* **отрицательными,** *не была равна нулю.*

Точка **приложенія** равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma\,\overline{F}_i$ системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть **произвольно** выбрана на линіи ея направленія, но на этой прямой есть нѣкоторая **особая** точка C называемая **центромъ** такой системы силъ.

Центромъ системы параллельныхъ силъ (черт. 20), *приложенныхъ къ твердому тѣлу, называется такая неизмѣнно связанная съ твердымъ тѣломъ точка C, черезъ которую проходятъ* **равно-**

дѣйствующія *этой системы, какъ бы мы* **не измѣняли** *по отношенію къ твердому тѣлу направленія силъ около ихъ точекъ приложеній, не нарушая взаимной* **параллельности** *силъ и ихъ* **взаимныхъ** *направленій, т. е. силы,* **одинаково** *и* **противоположно** *направленныя, должны при этомъ оставаться* **таковыми же.**

Такъ какъ линейный моментъ системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно точки приложенія ихъ **равнодѣйствующей,** если таковая существуетъ, очевидно долженъ быть равенъ **нулю**, ибо моментъ равнодѣйствующей относительно ея точки приложенія равенъ нулю, и наоборотъ, если линейный моментъ системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно нѣкоторой точки равенъ нулю, то такая система приводится къ одной **равнодѣйствующей** силѣ, проходящей черезъ эту точку, то можно сказать, что, **центръ** *данной системы* **параллельныхъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, есть такая, неизмѣнно связанная съ твердымъ тѣломъ, точка C, линейный моментъ относительно которой $\overline{L}_C$ данной системы параллельныхъ силъ равенъ* **нулю,** *какъ бы мы* **не повертывали** *силы около ихъ точекъ приложеній, не нарушая взаимной* **параллельности** *силъ и ихъ* **взаимныхъ** *направленій.*



Черт. 20.

Изъ послѣдняго опредѣленія между прочимъ ясно, что данная система параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ обладать только **однимъ** центромъ C, ибо относительно всякой **другой** точки C_1 линейный моментъ $\overline{L}_{C_1}$ такой системы, удовлетворяя равенствамъ:

$$\overline{L}_{C_1} = \overline{L}_C + \overline{M}_{C_1}(\overline{F})_C = \overline{M}_{C_1}(\overline{F})_C,$$

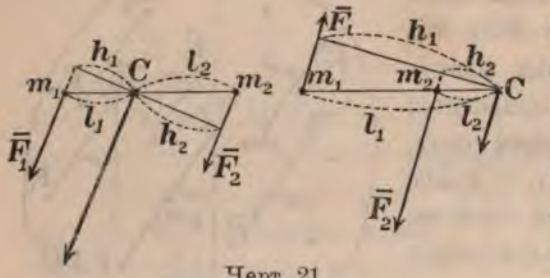
очевидно не можетъ быть равенъ нулю при **всевозможныхъ** направленіяхъ этой системы параллельныхъ силъ около ихъ точекъ приложеній, т. е. при **всевозможныхъ** направленіяхъ ихъ **равнодѣйствующей** $(\overline{F})_C$, отложенной отъ центра C.

Чтобы убѣдиться въ существованіи центра всякой системы па-

раллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ **равнодѣйствующую** силу, покажемъ его построеніе.

Центръ **двухъ одинаково** *направленныхъ параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, дѣлитъ разстояніе* **между** *точками приложеній этихъ силъ въ отношеніи* **обратно** *пропорціональномъ величинамъ этихъ силъ.*

Центръ **двухъ неравныхъ** *и* **различно** *направленныхъ параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, лежитъ на* **продолженіи** *прямой, соединяющей ихъ точки приложеній, со стороны той изъ этихъ точекъ, которой соотвѣтствуетъ* **бóльшая** *сила, притомъ въ разстояніяхъ отъ этихъ точекъ,* **обратно** *пропорціональныхъ приложеннымъ къ нимъ силамъ.*



Черт. 21.

Дѣйствительно, обозначивъ (черт. 21) l_1, l_2 разстоянія такой точки C до точекъ приложеній m_1, m_2 двухъ данныхъ параллельныхъ силъ, а черезъ h_1, h_2 разстоянія этой точки до направленій самихъ силъ, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{F_2}{F_1}; \text{ т. е. } F_1 h_1 = F_2 h_2;$$

слѣдовательно **величины** линейныхъ моментовъ этихъ силъ относительно такой точки C въ томъ и другомъ случаяхъ **равны**, **направленія же** ихъ въ томъ и другомъ случаяхъ, будучи перпендикулярны къ плоскости силъ, будутъ **прямопротивоположны** и потому

$$\bar L_c = \bar M_c(\bar F_1) + \bar M_c(\bar F_2) = 0,$$

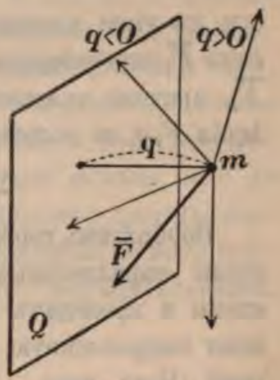
причемъ все сказанное остается справедливымъ, какъ бы мы не повертывали силы около ихъ точекъ приложеній, не измѣняя взаимной параллельности силъ и ихъ взаимныхъ направленій, поэтому такая точка C въ томъ и другомъ случаяхъ будетъ **центромъ** этихъ **двухъ** параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Для построенія центра системы n параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, одинаково или различно направлен-

ныхъ, построимъ сначала цертръ первыхъ двухъ силъ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ этой системы и приложимъ къ нему равнодѣйствующую $\overline{F}_1 + \overline{F}_2$ этихъ двухъ силъ, тогда такая система $(n-1)$ параллельныхъ силъ будетъ **эквивалентна** данной системѣ, причемъ обѣ эти системы будутъ оставаться эквивалентными, какъ бы мы не повертывали силы около ихъ точекъ приложеній, не нарушая взаимной параллельности силъ и ихъ взаимныхъ направленій, т. е. эти системы будутъ имѣть **общій центръ** C и потому, продолжая подобныя построенія, мы построимъ наконецъ центръ C всѣхъ силъ данной системы.

§ 9. Статическіе моменты силъ и координаты центра системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Статическимъ моментомъ (черт. 22) *силы $\overline{F}$ относительно нѣкоторой плоскости Q называется произведеніе Fq изъ* **величины** *этой силы $\overline{F}$ на* **разстояніе** *q ея точки* **приложенія** *до данной плоскости Q, причемъ разстоянія q по одну сторону плоскости Q считаются* **положительными**, *а по другую* **отрицательными**.



Черт. 22.

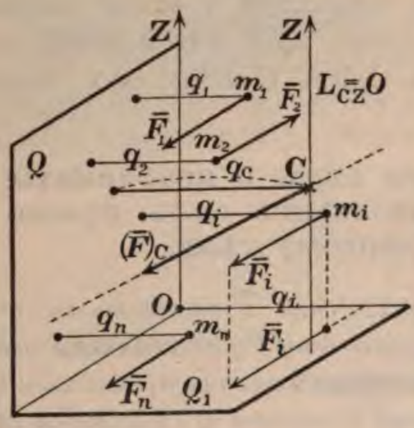
Изъ этого опредѣленія ясно, что **символъ единицы** статическаго момента силы есть $[ML^2T^{-2}]$ и что величина его не зависитъ отъ **направленія** данной силы $\overline{F}$; введя это понятіе, не трудно доказать слѣдующее свойство центра системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Статическій моментъ относительно любой плоскости Q **равнодѣйствующей** *системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, если эту равнодѣйствующую приложить къ* **центру** *данной системы, равенъ алгебраической суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости всѣхъ силъ этой системы, т. е.*

$$Fq_c = \Sigma F_i q_i,$$

при условіи разстоянія q_i и величины силъ $\overline{F}_i$ направленныя въ одну сторону считать **положительными**, *а въ другую* **отрицательными**.

Дѣйствительно, предположимъ сначала (черт. 23), что плоскость Q **параллельна** даннымъ силамъ и вообразимъ въ этой плоскости нѣкоторую ось OZ **перпендикулярную** къ ихъ направленіямъ, притомъ такъ направленную, что **положительныя** силы данной системы, лежащія съ **положительной** стороны плоскости Q, идутъ относительно направленія оси OZ **слѣва направо;** въ такомъ случаѣ ясно, что



Черт. 23.

$$F_i q_i = \overline{M}_{oz}(\overline{F}_i),$$

т. е. статическій моментъ любой силы $\overline{F}_i$ относительно такой плоскости Q по величинѣ и по знаку будетъ равенъ моменту этой силы относительно указанной оси OZ, ибо моментъ $M_{oz}(\overline{F}_i)$ равенъ взятому съ тѣмъ или другимъ знакомъ произведенію изъ проекціи силы $\overline{F}_i$ на плоскость Q_1, перпендикулярную къ оси OZ, умноженной на разстояніе точки пересѣченія O оси съ этою плоскостью до этой проекціи, но въ данномъ случаѣ сила $\overline{F}_i$ спроектируется на плоскость Q_1 въ натуральную величину $\overline{F}_i$, причемъ указанное разстояніе будетъ равно q_i и знакъ произведенія $F_i q_i$ по условію совпадетъ со знакомъ $M_{oz}(\overline{F}_i)$; слѣдовательно

$$\Sigma F_i q_i = \Sigma M_{oz}(\overline{F}_i) = L_{oz}.$$

Вообразимъ теперь равнодѣйствующую $(\overline{F})_c = \Sigma \overline{F}_i$ данной системы параллельныхъ силъ, приложенную къ **центру** C этой системы и проведемъ черезъ точку C ось CZ, параллельную и одиково направленную оси OZ; въ такомъ случаѣ по извѣстной теоремѣ (Введ. теор. 12) мы знаемъ, что

$$L_{oz} = L_{cz} + M_{oz}(\overline{F})_c,$$

но

$$L_{oz} = \Sigma F_i q_i$$

$$L_{cz} = L_{c,z} = 0, \text{ ибо } \overline{L}_c = 0$$

и

$$M_{oz}(\overline{F})_c = F q_c;$$

слѣдовательно

$$F q_c = \Sigma F_i q_i, \text{ гдѣ } F = \Sigma F_i.$$

Такимъ образомъ высказанная нами теорема доказана для плоскости, Q **параллельной** даннымъ силамъ, но величины статическихъ моментовъ силъ относительно плоскости не зависятъ отъ направленій этихъ силъ около ихъ точекъ приложеній; слѣдовательно предъидущее равенство остается справедливымъ для **всякой** плоскости Q и теорема наша доказана.

Обозначивъ теперь черезъ (x_i, y_i, z_i) координаты точки приложенія силы F_i, данной системы параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, а черезъ (x_c, y_c, z_c) **координаты центра** этой системы относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осей координатъ $(O; X, Y, Z)$ и условившись силы направленныя въ одну сторону считать **положительными**, а въ другую **отрицательными**, примѣнимъ предъидущую теорему къ каждой изъ плоскостей координатъ; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} Fx_c = \Sigma F_i x_i \\ Fy_c = \Sigma F_i y_i, \text{ гдѣ } F = \Sigma F_i, \\ Fz_c = \Sigma F_i z_i \end{cases}$$

изъ которыхъ опредѣлятся координаты центра C (x_c, y_c, z_c) данной системы параллельныхъ силъ, и которыя выражаютъ, что *статическій моментъ* **равнодѣйствующей** *системы* **параллельныхъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно* **любой** *плоскости координатъ равенъ суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости всѣхъ силъ этой системы, при условіи, что за точку* **приложенія** *этой равнодѣйствующей принятъ* **центръ** *данной системы параллельныхъ силъ и силы направленныя въ одну сторону считаются* **положительными**, *а въ другую*—**отрицательными**.

III. Центръ тяжести.

§ 1. Центръ тяжести неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, его координаты и общія свойства.

Положимъ мы имѣемъ (черт. 24) **неизмѣняемую** систему n матеріальныхъ точекъ:

$$m_1, \; m_2, \ldots, m_n.$$

Обозначимъ черезъ

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_n$$

соотвѣтсвенно **вѣса** этихъ матеріальныхъ точекъ; въ такомъ случаѣ для **даннаго** географическаго пункта и для **небольшихъ** размѣровъ системы можно допустить, что ускореніе $\bar{g}$ силы тяжести для всѣхъ точекъ этой системы по величинѣ и направленію будетъ **одно и то же**, и потому вѣса:

$$\bar{p}_1 = m_1 \bar{g}, \; \bar{p}_2 = m_2 \bar{g}, \ldots \bar{p}_n = m_n \bar{g}$$

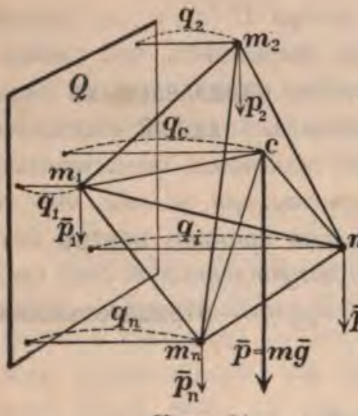
будутъ представлять совокупность одинаково направленныхъ, параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ, т. е. систему **параллельныхъ** силъ, приводящихся къ одной **равнодѣйствующей** силѣ:

$$\bar{p} = m_1 \bar{g} + m_2 \bar{g} + \ldots m_n \bar{g} = m\bar{g},$$

гдѣ

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \Sigma m_i,$$

называемой **вѣсомъ** данной **неизмѣняемой** системы матеріальныхъ точекъ, а **центръ** этихъ параллельныхъ силъ, т. е. такая неизмѣнно связанная съ данною системою точка C, черезъ которую проходитъ равнодѣйствующая этихъ параллельныхъ силъ, какъ бы не мѣняли ихъ направленія по отношенію къ данной неизмѣняемой системѣ, не нарушая взаимной **параллельности** силъ и **одинаковости** ихъ направленій (для чего достаточно лишь произвольно измѣнять положенія данной системы) называется **центромъ тяжести** данной **неизмѣняемой** системы матеріальныхъ точекъ.



Черт. 24.

Такимъ образомъ при вышеуказанныхъ допущеніяхъ можно сказать, что **центръ тяжести** *данной* **неизмѣняемой** *системы матеріальныхъ точекъ есть такая*, **неизмѣнно** *связанная съ этою системою, точка C, черезъ которую проходитъ* **вѣсъ** *данной системы, при всевозможныхъ ея положеніяхъ, и потому центръ тяжести*

данной **неизмѣняемой** *системы матеріальныхъ точекъ обыкновенно принимаютъ за точку* **приложенія** *ея* **вѣса** $\overline{p} = m\overline{g}$.

Положивъ въ общемъ равенствѣ предъидущаго параграфа:

$$Fq_c = \Sigma F_i q_i:$$

$$F = p = mg \text{ и } F_i = p_i = m_i g$$

и сокративъ его на g, мы придемъ къ равенству:

$$mq_c = \Sigma m_i q_i, \text{ гдѣ } m = \Sigma m_i.$$

Произведеніе $m_i q_i$ изъ массы m_i матеріальной точки на ея разстояніе q_i до нѣкоторой плоскости Q называется **статическимъ моментомъ** этой матеріальной точки относительно данной плоскости, а сумма $\Sigma m_i q_i$ статическихъ моментовъ **всѣхъ** точекъ данной системы относительно нѣкоторой плоскости Q называется **статическимъ моментомъ** относительно той же плоскости **самой** этой **системы;** поэтому можно сказать, что **статическій моментъ** mq_c *массы* $m = \Sigma m$ **всей** *неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, сосредоточенной въ* **центрѣ тяжести** *c этой системы, относительно* **любой** *плоскости* Q *равенъ* **суммѣ** $\Sigma m_i q_i$ *статическихъ моментовъ относительно* **той же** *плоскости* **всѣхъ** *точекъ этой системы или* **статическому моменту** *относительно* **той же** *плоскости* **самой** *этой* **системы.**

Примѣнивъ эту общую теорему къ тремъ плоскостямъ прямоугольной, прямолинейной системы координатъ (O: X, Y, Z) и обозначивъ черезъ (x_i, y_i, z_i) соотвѣтственно координаты точки m_i данной неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, а черезъ (x_c, y_c, z_c) координаты центра тяжести c этой системы, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\left\{\begin{aligned} mx_c &= \Sigma m_i x_i, \\ my_c &= \Sigma m_i y_i, \\ mz_c &= \Sigma m_i z_i, \end{aligned}\right| \text{ гдѣ } m = \Sigma m_i,$$

изъ которыхъ опредѣлятся **координаты** (x_c, y_c, z_c) **центра тяжести** c данной системы матеріальныхъ точекъ.

Изъ той же теоремы вытекаютъ слѣдующія **общія свойства** центра тяжести неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ:

1) *Если статическій моментъ данной неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, т. е. сумма статическихъ моментовъ всѣхъ точекъ этой системы относительно нѣкоторой плоскости равна нулю, то центръ тяжести такой системы лежитъ въ этой плоскости и наоборотъ.*

Дѣйствительно, изъ общаго равенства:

$$mq_c = \Sigma m_i q_i$$

ясно, что при $\Sigma m_i q_i = 0$, разстояніе q_c центра тяжести **c** до такой плоскости Q равно нулю и наоборотъ.

2) *Если данная неизмѣняемая система состоитъ изъ четнаго числа попарно равныхъ матеріальныхъ точекъ, причемъ средины разстояній между точками такихъ паръ лежатъ въ одной плоскости, то центръ тяжести такой системы лежитъ въ этой плоскости, которую для краткости можно назвать плоскостью* **діаметральной симметріи** *системы.*

Дѣйствительно, статическій моментъ системы относительно ея плоскости діаметральной симметріи очевидно равенъ нулю и потому центръ тяжести системы долженъ лежать въ этой плоскости.

3) *Если данная неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ имѣетъ* **двѣ** *плоскости діаметральной симметріи, то центръ тяжести такой системы лежитъ на линіи пересѣченія этихъ плоскостей.*

4) *Если данная неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ имѣетъ* **три** *плоскости діаметральной симметріи, то центръ тяжести такой системы лежитъ въ точкѣ пересѣченія этихъ плоскостей.*

5) *Если данную неизмѣняемую систему матеріальныхъ точекъ разложить на нѣсколько отдѣльныхъ группъ и найдя центры тяжести каждой изъ этихъ группъ, сосредоточить въ нихъ массы соотвѣтствующихъ имъ группъ, то центръ такой воображаемой системы точекъ совпадетъ съ центромъ тяжести* **данной** *системы.*

Дѣйствительно, массы и статическіе моменты обѣихъ системъ относительно любой плоскости будутъ соотвѣтственно равны, ибо масса и статическій моментъ **всей** системы отно-

сительно любой плоскости равны соотвѣтственно суммѣ массъ и статическихъ моментъ относительно той же плоскости **всѣхъ** ея **частей,** и статическій моментъ всякой системы относительно любой плоскости равенъ статическому моменту относительно той же плоскости центра тяжести этой системы, если сосредоточить въ немъ всю ея массу; поэтому центры тяжести обѣихъ системъ необходимо будутъ совпадать.

Примѣры. 1) *Центръ тяжести двухъ неизмѣнно связанныхъ матеріальныхъ точекъ* m_1, m_2 *дѣлитъ разстояніе между этими точками въ отношеніи обратно пропорціональномъ ихъ массамъ.*

Дѣйствительно, статическій моментъ такой системы относительно плоскости, проходящей черезъ указанную точку c и перпендикулярной къ разстоянію между матеріальными точками очевидно равенъ нулю; слѣдовательно центръ тяжести этой системы долженъ лежать въ этой плоскости; кромѣ того статическіе моменты той же системы относительно **любой** плоскости, проходящей черезъ прямую, **соединяющую** точки m_1 m_2, тоже равны нулю; слѣдовательно центръ тяжести этой системы должны лежать еще на прямой, соединяющей точки m_1, m_2, т. е. совпадетъ съ указанною точкою c, откуда, на основаніи послѣдняго (5) изъ общихъ свойствъ центра тяжести неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, вытекаетъ слѣдующій пріемъ его построенія: *построивъ центръ тяжести* **двухъ** *произвольныхъ точекъ данной системы, т. е. раздѣливъ разстояніе между этими точками въ отношеніи обратномъ ихъ массамъ, сосредоточимъ въ этомъ центрѣ сумму массъ этихъ двухъ точекъ и будемъ продолжать такія построенія, пока не придемъ къ* **одной** *точкѣ; эта точка и будетъ центромъ тяжести данной неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ.*

2) *Центръ тяжести системы матеріальныхъ точекъ, лежащихъ на* **одной** *прямой, лежитъ на этой прямой въ разстояніи:*

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

отъ нѣкоторой ея точки A, *гдѣ* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *суть положительныя или отрицательныя разстоянія данныхъ точекъ* $m_1, m_2, \ldots m_n$ *отъ этой точки* A.

Дѣйствительно, статическіе моменты такой системы матеріальныхъ точекъ относительно плоскостей, проходящихъ черезъ прямую, соединяющую эти точки, очевидно равны нулю, слѣдовательно ихъ центръ тяжести долженъ лежать на этой прямой, статическій же моментъ той же системы относительно, плоскости перпендикулярной къ этой прямой и проходящей черезъ

ея точку A, будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$m x_c = \Sigma m_i x_i, \text{ гдѣ } m = \Sigma m_i,$$

изъ которыхъ и получается вышеприведенное выраженіе для x_c.

3) *Центръ тяжести неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, лежащихъ въ* **одной** *плоскости, лежитъ въ этой плоскости,* ибо статическій моментъ такой системы относительно этой плоскости очевидно равенъ нулю.

Примѣчаніе. Изъ указаннаго построенія центра тяжести **неизмѣняемой** системы матеріальныхъ точекъ ясно, что положеніе такой точки зависитъ лишь отъ распредѣленія массъ данной системы и не связано съ понятіемъ о силѣ тяжести; кромѣ того получающаяся подобнымъ построеніемъ точка имѣетъ важное значеніе и для **измѣняемыхъ** системъ, для которыхъ не приложимо понятіе о центрѣ тяжести. Такъ въ динамикѣ системъ матеріальныхъ точекъ мы увидимъ, что въ случаѣ, если на произвольную систему матеріальныхъ точекъ не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы, то получающаяся указаннымъ построеніемъ точка остается въ покоѣ или совершаетъ прямолинейное и равномѣрное движеніе, т. е. удовлетворяетъ свойству **инерціи** матеріи, поэтому *Эйлеръ* назвалъ эту точку **центромъ инерціи** данной системы матеріальныхъ точекъ, но въ виду важности практическаго значенія понятія о **центрѣ тяжести**, при изложеніи статики мы сохранимъ за этою точкою упомянутое названіе.

§ 2. Центръ тяжести линій.

Сплошною матеріальною линіей называется геометрическая линія, каждому элементу которой $\widehat{\Delta s}$ приписывается нѣкоторая масса или количество матеріи Δm, причемъ отношеніе

$$\frac{\Delta m}{\widehat{\Delta s}}$$

массы Δm выдѣленнаго элемента $\widehat{\Delta s}$ къ длинѣ этого элемента называютъ въ такомъ случаѣ **среднею линейною плотностью** выдѣленнаго элемента, а предѣлъ этого отношенія:

$$\text{пред. } \frac{\Delta m}{\widehat{\Delta s}} = \sigma_1$$

для безконечно малаго элемента $\widehat{\Delta s}$, заключающаго нѣкоторую точку данной линіи, называютъ линейною плотностью кривой въ **данной** ея точкѣ.

Изъ этого опредѣленія ясно, что **символъ единицы** линейной плотности будетъ:

$$\frac{[M]}{[L]} = [ML^{-1}]$$

и что

$$\Delta m = \sigma_1 \widehat{\Delta s} + \varepsilon_1 \widehat{\Delta s},$$

гдѣ ε_1 есть нѣкоторая безконечно малая величина, т. е. *произведеніе* $\sigma_1 \widehat{\Delta s}$ *изъ* **линейной плотности** *кривой въ данной ея точкѣ на* **длину** *ея безконечно малаго элемента* $\widehat{\Delta s}$, *заключающаго эту точку*, **эквивалентно массѣ** Δm *такого элемента.*

Если $\sigma_1 = const$, т. е. линейная плотность кривой во всѣхъ ея точкахъ есть **постоянная** величина, то такая кривая называется **однородною**.

Центромъ тяжести **сплошной**, *неизмѣняемой, матеріальной* **линіи** *называется предѣльное положеніе центра тяжести* **системы** *матеріальныхъ* **точекъ**, *если мы будемъ дѣлить эту линію на безконечно малые элементы и массу каждаго элемента будемъ предполагать сосредоточенною въ одной изъ его точекъ;* поэтому статическій моментъ центра тяжести сплошной матеріальной линіи, если сосредоточить въ этой точкѣ массу m всей этой линіи, относительно любой плоскости Q будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$mq_c = \text{пред.} \textstyle\sum \Delta m \,.\, q = \text{пред.} \textstyle\sum \sigma_1 \, q \, \Delta s = \int \sigma_1 \, q \, ds,$$

гдѣ

$$m = \textstyle\sum \Delta m = \text{пред.} \textstyle\sum \sigma_1 \, \Delta s = \int \sigma_1 \, ds,$$

а черезъ q_c и q обозначены соотвѣтственно разстоянія до плоскости Q искомаго центра тяжести и одной изъ точекъ элемента $\widehat{\Delta s}$, причемъ суммированія или интегрированія распространены на **всю длину** данной линіи.

Такимъ образомъ, назвавъ для краткости произведеніе mq_c изъ массы m данной линіи на разстояніе ея центра тяжести q_c до нѣкоторой плоскости Q статическимъ моментомъ **центра тяжести** этой линіи относительно данной плоскости Q, а пред. $\sum \Delta m \,.\, q$, т. е. предѣлъ суммы статическихъ моментовъ всѣхъ ея элементовъ относительно этой плоскости — статическимъ моментомъ **самой** этой линіи относительной той же плоскости, можно сказать, что *статическій*

моментъ **центра тяжести** *данной сплошной, неизмѣняемой, матеріальной линіи относительно любой плоскости Q равенъ статическому моменту относительно той же плоскости* **самой** *этой линіи.*

Примѣнивъ предъидущія равенства къ тремъ плоскостямъ прямоугольной, прямолинейной системы координатъ $(O;\ X,\ Y,\ Z)$, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} mx_c = \int \sigma_1 x\, ds; \\ my_c = \int \sigma_1 y\, ds; \quad \text{гдѣ } m = \int \sigma_1\, ds, \\ mz_c = \int \sigma_1 z\, ds, \end{cases}$$

опредѣляющимъ, координаты $(x_c,\ y_c,\ z_c)$ центра тяжести данной сплошной неизмѣняемой, матеріальной линіи.

Если данная линія однородна, т. е. $\sigma_1 = const$, то

$$m = \int \sigma_1\, ds = \sigma_1 \int ds = \sigma_1 s,$$

т. е. *масса* **однородной** *матеріальной линіи равна произведенію изъ длины этой линіи на ея* **линейную** *плотность* и потому, сокративъ предъидущія равенства на общаго множителя σ_1, мы придемъ къ равенствамъ:

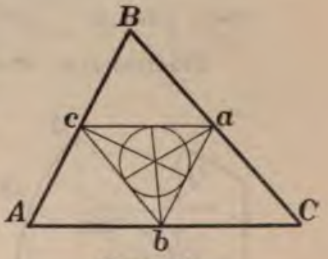
$$\begin{cases} sx_c = \int x\, ds; \\ sy_c = \int y\, ds; \\ sz_c = \int z\, ds, \end{cases}$$

изъ которыхъ видно, что положеніе центра тяжести **однородныхъ** матеріальныхъ линій **не зависитъ** отъ ихъ линейной плотности, а только отъ **вида** линіи и потому его называютъ просто центромъ тяжести **данной линіи,** причемъ, назвавъ подобно предъидущему произведеніе изъ **длины** данной линіи на разстояніе ея центра тяжести до нѣкоторой плоскости **статическимъ моментомъ** относительно этой плоскости **центра тяжести** данной **кривой,** а предѣлъ суммы произведеній каждаго изъ ея элементовъ на разстояніе до той же плоскости одной изъ его точекъ—**статическимъ моментомъ самой** этой **кривой** относительно той же плоскости, мы видимъ, что предъидущія равенства выражаютъ общую теорему, что *ста-*

тическій моментъ **центра тяжести** *данной кривой относительно любой плоскости равенъ статичему моменту относительно той же плоскости* **самой** *этой кривой.*

Примѣры. *Ц. тяж.* **отрѣзка прямой** *лежитъ на срединѣ этого отрѣзка;* дѣйствительно статическій моментъ отрѣзка данной прямой относительной любой проходящей черезъ нее плоскости очевидно равенъ нулю, слѣдовательно центръ тяжести этого отрѣзка долженъ лежать на данной прямой; кромѣ того статическій моментъ того же отрѣзка относительно перпендикулярной къ нему плоскости, проходящей черезъ его середину, тоже равенъ нулю, слѣдовательно искомый центръ тяжести долженъ лежать на пересѣченіи этой плоскости съ даннымъ отрѣзкомъ, т. е. на серединѣ даннаго отрѣзка.

2) *Ц. тяж.* **периметра треугольника** *совпадаетъ съ съ центромъ окружности, вписанной въ треугольникъ, стороны котораго соединяютъ средины сторонъ даннаго треугольника.*



Черт. 25.

Дѣйствительно, сосредоточивъ массы m_a, m_b m_c сторонъ (черт. 25) a, b, c даннаго треугольника въ соотвѣтствующихъ имъ центрахъ тяжести (a, b, c) этихъ сторонъ, намъ остается лишь найти центръ тяжести трехъ этихъ точекъ, но центръ тяжести точекъ b и c дѣлитъ разстояніе между ними въ отношеніи обратно пропорціональномъ ихъ массамъ:

$$\frac{m_c}{m_b} = \frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac},$$

т. е. пропорціонально прилежащимъ сторонамъ ab, ac треугольника (a, b, c), и потому центръ тяжести трехъ точекъ a, b, c долженъ лежать на линіи, дѣлящей пополамъ уголъ (cab); подобнымъ же образомъ убѣдимся, что онъ долженъ лежать на линіяхъ, дѣлящихъ пополамъ остальные углы треугольника (abc), т. е. искомый центръ тяжести совпадетъ съ центромъ окружности, вписанной въ этотъ треугольникъ.

3) *Ц. тяж.* **дуги окружности** $\widehat{AB}$ *лежитъ на радіусѣ, идущемъ въ середину этой дуги, въ разстояніи:*

$$x_c = r\,\frac{\sin\theta_1}{\theta_1} = r\,\frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}}$$

отъ ея центра, гдѣ θ_1 *есть половина центральнаго угла данной дуги.*

Дѣйствительно (черт. 26), дуга окружности симметрична относительно указаннаго радіуса, слѣдовательно ея центръ тяжести долженъ лежать на

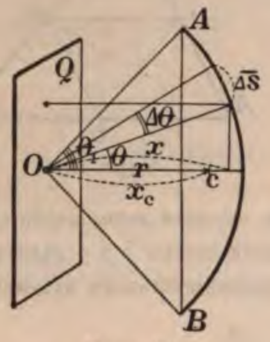
этомъ радіусѣ, статическій же моментъ центра тяжести данной дуги относительно плоскости, проходящей черезъ ея центръ и перпендикулярной къ тому же радіусу, будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$\widehat{AB}\, x_c = \text{пред.} \sum x\, \Delta s = 2 \int_0^{\theta_1} r^2 \cos\theta\, d\theta = 2r^2 \Big| \sin\theta \Big|_0^{\theta_1} = 2r^2 \sin\theta_1$$

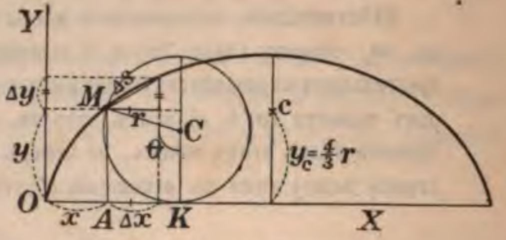
$$\left.\begin{array}{l} \text{но} \quad \widehat{AB} = 2r\,\theta_1 \\ \text{и} \quad \overline{AB} = 2r \sin\theta_1 \end{array}\right\} \text{слѣд.} \quad x_c = r\,\frac{\sin\theta_1}{\theta_1} = r\,\frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}}.$$

4) *Ц. тяж.* **дуги циклоиды** *лежитъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ средины ея основанія, въ разстояніи отъ этого основанія, равномъ* $\frac{4}{3}$ *радіуса образующаго ее, катящагося круга.*

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ θ (черт. 27) уголъ, составляемый радіусомъ точки M, чертящей данную циклоиду, съ радіусомъ, идущимъ въ точку касанія K катящагося круга, а черезъ (x, y) — координа-



Черт. 26.



Черт. 27.

ты этой точки M, если начало циклоиды и ея основаніе принять соотвѣтственно за начало и ось абсциссъ OX прямоугольной системы координатъ XOY, мы видимъ, что

$$x = OA = OK - AK = \widehat{KM} - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = AM = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta);$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{array}{l} dx = r(1-\cos\theta)\,d\theta, \\ dy = r\sin\theta\,d\theta, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = r\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta = \\ \qquad = 2r\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta, \end{array}$$

и потому

$$s = \text{пред.} \sum \Delta s = \text{пред.} \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \text{пред.} \sum ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2r\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2r\Big| -2\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8r.$$

Найдя такимъ образомъ длину циклоиды $s = 8r$ и замѣтивъ, что по симметріи этой кривой относительно перпендикуляра, возставленнаго изъ средины ея основанія, ея центръ тяжести долженъ лежать на этомъ перпендикулярѣ, намъ остается лишь найти ординату y_c этой точки, удовлетворяющую равенствамъ:

$$8ry_c = \text{пред.} \sum y\Delta s =$$

$$= \int y ds = 2r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 4r^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{\theta}{2} d\theta.$$

Для вычисленія послѣдняго интеграла положимъ:

$$\cos\frac{\theta}{2} = z;$$

тогда при $\theta = 0$ .... $z = 1$ и при $\theta = 2\pi$ .... $z = -1$; кромѣ того

$$dz = -\frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2} d\theta,$$

слѣдовательно

$$\int_0^{2\pi} \sin^3\frac{\theta}{2} d\theta = -2 \int_1^{-1} (1 - z^2) dz = -2 \left| z - \frac{z^3}{3} \right|_1^{-1} = \frac{8}{3},$$

т. е.

$$8ry_c = \frac{32r^2}{3}, \text{ или } y_c = \frac{4}{3} r.$$

§ 3. Центръ тяжести поверхностей.

Сплошною матеріальною поверхностью называется геометрическая поверхность, каждому элементу которой ΔU приписывается нѣкоторая масса или количество матеріи Δm, причемъ отношеніе

$$\frac{\Delta m}{\Delta U}$$

массы Δm выдѣленнаго элемента ΔU къ величинѣ этого элемента называется **среднею поверхностною плотностью** выдѣленнаго элемента, а предѣлъ этого отношенія:

$$\text{пред.} \frac{\Delta m}{\Delta U} = \sigma_2$$

для элемента ΔU, заключающаго нѣкоторую точку поверхности, на-

зывается плотностью поверхности въ **данной** ея точкѣ; откуда ясно, что **символъ единицы** поверхностной плотности будетъ:

$$\frac{[M]}{[L^2]} = [ML^{-2}]$$

и что

$$\Delta m = \sigma_2 \, \Delta U + \varepsilon_2 \, \Delta U,$$

гдѣ ε_2 есть нѣкоторая безконечно малая величина, т. е. **произведеніе** $\sigma_2 \, \Delta U$ *изъ плотности поверхности въ* **данной** *ея точкѣ на величину безконечно малаго ея элемента, заключающаго эту точку,* **эквивалентно массѣ** *выдѣленнаго элемента.*

Если $\sigma_2 = const$, т. е. плотность поверхности во всѣхъ ея точкахъ **одна и та же**, то такая поверхность называется **однородною**.

Центромъ тяжести **сплошной** *матеріальной* **поверхности** *называется предѣльное положеніе центра тяжести* **системы** *матеріальныхъ* **точекъ**, *если данную поверхность раздѣлить на безконечно малые элементы, оба измѣренія которыхъ безконечно малы, и массу каждаго такого элемента предположить сосредоточенною въ одной изъ его точекъ*; поэтому статическій моментъ центра тяжести сплошной матеріальной поверхности, если сосредоточить въ немъ массу m всей этой поверхности, относительно любой плоскости будетъ равенъ предѣлу суммы относительно той же плоскости статическихъ моментовъ всѣхъ элементовъ этой поверхности, т. е.

$$mq_c = \text{пред.} \sum \Delta m \, . \, q = \text{пред.} \sum \sigma_2 q \, \Delta U = \int \sigma_2 q \, dU,$$

гдѣ

$$m = \sum \Delta m = \text{пред.} \sum \sigma_2 \, \Delta U = \int \sigma_2 \, dU,$$

а черезъ q_c и q обозначены соотвѣтственно разстоянія до плоскости Q центра тяжести поверхности и одной изъ точекъ ея элемента ΔU, причемъ суммированія или интегрированія распространены на **всю** данную **поверхность**.

Примѣнивъ предъидущія равенства къ тремъ плоскостямъ прямоугольной, прямолинейной системы координатъ $(O; X, Y, Z)$, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} mx_c = \int \sigma_2 x \, dU, \\ my_c = \int \sigma_2 y \, dU, \quad \text{гдѣ } m = \int \sigma_2 \, dU, \\ mz_c = \int \sigma_2 z \, dU, \end{cases}$$

опредѣляющимъ координаты (x_c, y_c, z_c), центра тяжести данной сплошной, неизмѣняемой матеріальной поверхности.

Если поверхность **однородна**, т. е. $\sigma_2 = const$, то

$$m = \int \sigma_2 \, dU = \sigma_2 \int dU = \sigma_2 \, U,$$

т. е. *масса* **однородной** *поверхности равна произведенію изъ величины этой поверхности на ея поверхностную плотность*, и потому, сокративъ предъидущія равенства на σ_2, мы придемъ къ равенствамъ:

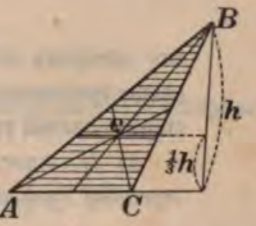
$$\begin{cases} U x_c = \int x \, dU, \\ U y_c = \int y \, dU, \\ U z_c = \int z \, dU, \end{cases}$$

изъ которыхъ видно, что положеніе центра тажести **однородной** поверхности **не зависитъ** отъ ея **плотности**, а только отъ **вида** этой поверхности и потому его называютъ просто центромъ тяжести **данной поверхности.**

Примѣры.

1) *Ц. тяж.* **треугольника** *лежитъ въ точкѣ пересѣченій его медіанъ.*

Дѣйствительно (черт. 28), произвольныя плоскости, проходящія черезъ медіаны даннаго треугольника, будутъ плоскостями діаметральной симметріи этой фигуры и потому центръ тяжести треугольника долженъ лежать на каждой изъ его медіанъ, т. е. въ точкѣ ихъ пересѣченій, или на серединѣ отрѣзка, проведеннаго параллельно основанію треугольника, въ разстояніи отъ этого основанія равномъ $\frac{1}{3}$ соотвѣтствующей ему высоты.



Черт. 28.

2) *Ц. тяж.* **параллелограмма** *лежитъ въ точкѣ пересѣченія его діагоналей.*

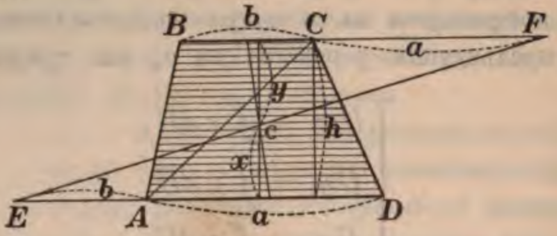
3) *Ц. тяж.* **трапеціи** *лежитъ въ точкѣ пересѣченія линіи, соединяющей средины ея параллельныхъ сторонъ, и линіи, соединяющей концы противоположныхъ продолженій этихъ сторонъ: одной на величину равную другой.*

Дѣйствительно, положимъ (черт. 29) мы имѣемъ трапецію $ABCD$; центръ тяжести этой трапеціи очевидно долженъ лежать на линіи, соединяю-

4*

щей средины ея параллелиныхъ сторонъ, ибо плоскости, проходящія черезъ эту линію, будутъ плоскостями діаметральной симметріи этой фигуры.

Обозначивъ черезъ x и y соотвѣтственно разстоянія искомаго центра тяжести до параллельныхъ сторонъ a и b данной трапеціи, а черезъ h ея высоту, раздѣлимъ данную трапецію діагональю AC на два треугольника; въ такомъ случаѣ, зная, что статическій моментъ всякой фигуры относи-



Черт. 29.

тельно любой плоскости равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ ея частей, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\frac{1}{2}(a+b)hx = \frac{1}{2}ah \cdot \frac{1}{3}h + \frac{1}{2}bh \cdot \frac{2}{3}h,$$

$$\frac{1}{2}(a+b)hy = \frac{1}{2}ah \cdot \frac{2}{3}h + \frac{1}{2}bh\frac{1}{3}h,$$

т. е.

$$\frac{x}{y} = \frac{a+2b}{b+2a} = \frac{\frac{a}{2}+b}{\frac{b}{2}+a},$$

изъ которыхъ ясно, что точка c лежитъ еще на линіи EF, соединяющей концы противоположныхъ продолженій $AE = b$ и $CF = a$ параллельныхъ сторонъ данной трапеціи.

4) *Ц. тяж.* **кругового сектора** *лежитъ на радіусѣ, идущемъ въ середину дуги сектора, въ разстояніи:*

$$x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin\theta}{\theta}$$

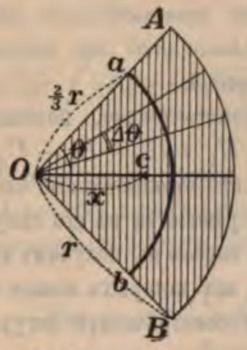
отъ ея центра, гдѣ θ есть половина центральнаго угла даннаго сектора.

Дѣйствительно, раздѣливъ данный секторъ (черт. 30) на безконечно-большое число безконечно малыхъ секторовъ и замѣнивъ каждый такой секторъ вписаннымъ въ него равнобедреннымъ треугольникомъ, сосредоточимъ массы этихъ треугольниковъ въ ихъ центрахъ тяжести; въ такомъ случаѣ

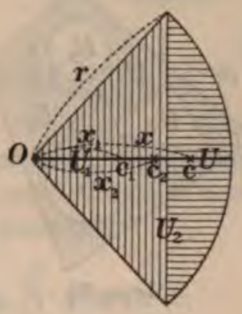
вопросъ приведется къ отысканію предѣльнаго положенія центра тяжести этой системы матеріальныхъ точекъ, т. е. центра тяжести дуги окружности $\widehat{ab}$ радіуса равнаго $\frac{2}{3}r$, гдѣ r есть радіусъ даннаго сектора, что и выражаетъ вышеприведенная формула.

5) *Ц. тяж.* **кругового сегмента.**

Такъ какъ статическій моментъ кругового сектора относительно любой плоскости равенъ суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости составляющихъ его треугольника и сегмента, то, обозначивъ (черт. 31)



Черт. 30.



Черт. 31.

соотвѣтственно черезъ U, U_1, U_2 площади сегмента, треугольника и сектора, а черезъ x, x_1, x_2—разстоянія ихъ центровъ тяжести отъ центра O, мы придемъ къ равенству:

$$U_2x_2 = Ux + U_1x_1,\ \text{въ которомъ}\ U = U_2 - U_1;$$

слѣдовательно
$$x = \frac{U_2x_2 - U_1x_1}{U_2 - U_1}.$$

Обозначивъ наконецъ черезъ r и 2θ соотвѣтственно радіусъ и центральный уголъ даннаго сегмента, мы знаемъ, что

$$U_1 = \frac{r^2 \sin 2\theta}{2}, \qquad x_1 = \frac{2}{3} r \cos\theta,$$

$$U_2 = 2r\theta, \qquad x_2 = \frac{2}{3} r \frac{\sin\theta}{\theta},$$

и потому
$$x = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3\theta}{2\theta - \sin 2\theta}.$$

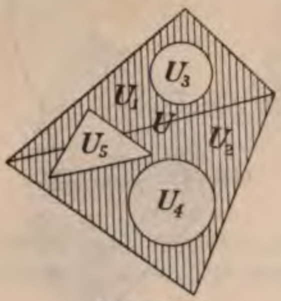
6) *Если данная площадь U равна* **алгебраической** *суммѣ:*

$$U = U_1 \pm U_2 \pm \ldots + U_n$$

n площадей, положенія центровъ тяжести которыхъ намъ **извѣстны**, *то, обозначивъ черезъ* $q, q_1, q_2 \dots q_n$ *соотвѣтственно разстоянія центровъ тяжести этихъ площадей до нѣкоторой прямой, лежащей въ ихъ плоскости, мы придемъ къ равенству:*

$$Uq = U_1 q_1 \pm U_2 q_2 \pm \dots \pm U_n q_n,$$

выражающему, что статическій моментъ такой площади относительно перпендикулярной къ ней плоскости, проходящей черезъ эту прямую, будетъ равенъ **алгебраической** *суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости данныхъ площадей.*



Черт. 32.

Дѣйствительно, положимъ (черт. 32) $U = U_1 + U_2 - U_3 - U_4 - U_5$; перенесемъ всѣ отрицательные члены правой части этого равенства въ его лѣвую часть; въ такомъ случаѣ мы получимъ двѣ суммы площадокъ, изъ которыхъ можно составить одну и ту же геометрическую фигуру; слѣдовательно статическіе моменты этихъ суммъ площадокъ относительно любой перпендикулярной къ нимъ плоскости будутъ равны, т. е.

$$Uq + U_3 q_3 + U_4 q_4 + U_5 q_5 = U_1 q_1 + U_2 q_2,$$

откуда и придемъ къ требуемому равенству:

$$Uq = U_1 q_1 + U_2 q_2 - U_3 q_3 - U_4 q_4 - U_5 q_5.$$

Примѣнивъ послѣднее равенство къ двумъ прямымъ, лежащимъ въ плоскости данной фигуры, мы опредѣлимъ положеніе центра тяжести этой фигуры, какъ точки пересѣченія прямыхъ, параллельныхъ двумъ выбраннымъ прямымъ и проведенныхъ въ соотвѣтствующихъ имъ разстояніяхъ q отъ этихъ прямыхъ; то же равенство въ примѣненіи къ двумъ взаимно-перпендикулярнымъ **осямъ** (O; X, Y), лежащимъ въ плоскости данной фигуры, опредѣлитъ координаты (x, y) ея центра тяжести:

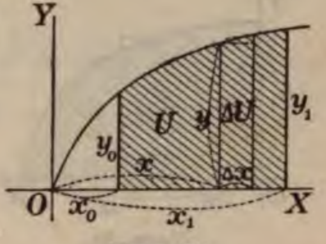
$$\begin{cases} x = \dfrac{U_1 x_1 \pm U_2 x_2 \pm \dots \pm U_n x_n}{U_1 \pm U_2 \pm \dots \pm U_n} \\[2ex] y = \dfrac{U_1 y_1 \pm U_2 y_2 \pm \dots \pm U_n y_n}{U_1 \pm U_2 \pm \dots \pm U_n} \end{cases}.$$

7) *Ц. тяж.* **площади параболы:**

$$y^2 = 2p\,x,$$

заключенной между ординатами y_0 *и* y_1, *соотвѣтствующими даннымъ абсциссамъ:* x_0, x_1.

Указанная площадь параболы U (черт. 33) опредѣлится изъ равенствъ:



Черт. 33.

$$U = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x_1} \Delta U = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x_1} y \Delta x =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} y dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2p}\, x\, dx =$$

$$= \sqrt{2p} \int_{x_0}^{x_1} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{2p} \left| \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_{x_0}^{x_1} = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \left(x_1^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}} \right),$$

координаты же (x_c, y_c) центра тяжести этой площади, по теоремѣ, что статическій моментъ всякой площади равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ ея элементовъ, будутъ удовлетворять равенствамъ:

$$Ux_c = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x_1} \Delta U x = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x_1} y\, \Delta x \,.\, x =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} yx\, dx = \sqrt{2p} \int_{x_0}^{x_1} x^{\frac{3}{2}} dx = \sqrt{2p} \left| \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_{x_0}^{x_1} =$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{2p} \left(x_1^{\frac{5}{2}} - x_0^{\frac{5}{2}} \right).$$

Подобнымъ же образомъ:

$$Uy_c = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x_1} \Delta U \,.\, \frac{y}{2} = \text{пред.} \sum_{x_0}^{x} y\, \Delta x\, \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} y^2\, dx =$$

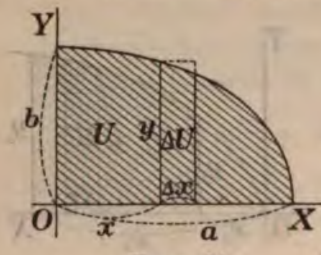
$$= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} 2p\, x dx = p \int_{x_0}^{x_1} x\, dx = p \left| \frac{x^2}{2} \right|_{x_0}^{x_1} = \frac{p}{2} \left(x_1^2 - x_0^2 \right),$$

изъ которыхъ дѣленіемъ на U опредѣлятся координаты центра тяжести указанной площади параболы.

При $x_0 = 0$, т. е. для площади параболы, заключенной между ея вершиною и нѣкоторою ординатою y_1,

$$x_c = \frac{3}{5} x_1, \quad y_c = \frac{3}{8} y_1.$$

8) *Ц. тяж. площади* **четверти эллипса**:



Черт. 34.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Площадь U четверти эллипса (черт. 34) опредѣлится изъ равенствъ:

$$U = \text{пред.}\, \mathop{S}_0^a \Delta U = \text{пред.}\, \mathop{S}_0^a y\,\Delta x = \int_0^a y\,dx,$$

гдѣ

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

слѣдовательно, положивъ $\frac{x}{a}=\sin\varphi$, мы видимъ, что при $x=0\ldots.\varphi=0$, при $x=a\ldots.\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $dx=a\cos\varphi\,d\varphi$, поэтому

$$U=\int_0^a y\,dx = b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\; a\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{ab}{2}\left|\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}.$$

Итакъ

$$U=\frac{\pi ab}{4};$$

координаты же (x_c, y_c) искомаго центра тяжести будутъ удовлетворять равенствамъ:

$$Ux_c = \text{пред.}\, \mathop{S}_0^a \Delta U\, x = \text{пред.}\, \mathop{S}_0^a y\,\Delta x\, x = \int_0^a xy\,dx =$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Для вычисленія послѣдняго интеграла положимъ $a^2-x^2=z$; въ та-

комъ случаѣ при $x=0 \dots z=a^2$ и при $x=a \dots z=0$; кромѣ того $dz=-2x\,dx$ и потому

$$Ux_c=\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_{a^2}^0 -\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}\,dz=-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\int_{a^2}^0 z^{\frac{1}{2}}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left|\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{a^2}^0=\frac{1}{3}ba^2,\ \text{т. е.}\ x_c=\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

Подобнымъ же образомъ:

$$Uy_c=\text{пред.}\sum_0^a \Delta U\frac{y}{2}=\text{пред.}\sum_0^a y\,\Delta x\,\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left|a^2x-\frac{x^3}{a}\right|_0^a=\frac{1}{3}b^2a,$$

т. е.

$$y_c=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}.$$

9) *Ц. тяж.* **шароваго пояса** *лежитъ на серединѣ прямой, соединяющей центры его основаній.*

Дѣйствительно, ц. тяж. шароваго пояса долженъ лежать на прямой, соединяющей центры его основаній, ибо эта линія есть ось симметріи такой поверхности; припомнивъ наконецъ, что поверхность шароваго пояса равна $2\pi rh$, гдѣ r есть радіусъ сферы, а h — высота пояса, раздѣлимъ данный поясъ плоскостями, параллельными его основаніямъ на безконечно тонкіе поясы; въ такомъ случаѣ, взявъ статическій моментъ поверхности пояса относительно одного изъ основаній и обозначивъ черезъ x_c, x соотвѣтственно разстоянія отъ этого основанія до искомаго центра тяжести и одной изъ плоскостей сѣченій, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$2\pi rh\,x_c=\text{пред.}\sum_0^h 2\pi r\,\Delta x\,.\,x=\int_0^h 2\pi\,rx\,dx=2\pi\,r\int_0^h x\,dx=$$

$$=2\pi r\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^h=\pi rh^2,\quad \text{т. е.}\ x_c=\frac{h}{2}\ \text{ч. т. д.}$$

10) *Ц. тяж. поверхности* **шароваго сегмента** *лежитъ на серединѣ его высоты,* ибо на эту поверхность можно смотрѣть, какъ на частный случай поверхности шароваго пояса.

§ 4. Центръ тяжести объемовъ.

Сплошнымъ матеріальнымъ тѣломъ называется такое геометрическое тѣло, каждому элементу объема котораго ΔV приписываютъ нѣкоторое количество матеріи или массу Δm; причемъ отношеніе

$$\frac{\Delta m}{\Delta V},$$

называютъ **среднею плотностью** выдѣленнаго элемента, а предѣлъ этого отношенія для безконечно-малаго объема ΔV, заключающаго **данную** точку тѣла, т. е.

$$\text{пред.}\, \frac{\Delta m}{\Delta V} = \sigma_3$$

называютъ плотностью тѣла въ **данной** его точкѣ.

Ясно, что символъ единицы плотности **тѣла** есть

$$\frac{[M]}{[L^3]} = [ML^{-3}]$$

и что

$$\Delta m = \sigma_3 \Delta V + \varepsilon_3 \Delta V,$$

т. е. *произведеніе $\sigma_3 \Delta V$ изъ плотности тѣла въ данной его точкѣ на величину безконечно-малаго объема ΔV, заключающаго эту точку,* **эквивалентно** *массѣ Δm выдѣленнаго объема ΔV.*

Если $\sigma_3 = const.$, т. е. плотность тѣла во всѣхъ его точкахъ **одинакова**, то такое матеріальное тѣло называютъ **однороднымъ**; слѣдовательно масса однороднаго тѣла:

$$m = \sum \Delta m = \text{пред.} \sum \sigma_3 \Delta V = \sigma_3\, \text{пред.} \sum \Delta V = \sigma_3 V$$

равна произведенію изъ его плотности σ_3 на объемъ V.

Центромъ тяжести **сплошного** *матеріальнаго тѣла называется предѣльное положеніе центра тяжести* **системы** *матеріальныхъ точекъ, если мы раздѣлимъ данное тѣло на безконечно-малые элементы Δm, всѣ измѣренія которыхъ безконечно-малы, и массу Δm каждаго такого элемента сосредоточимъ въ одной изъ его точекъ*; поэтому статическій моментъ центра тяжести сплошного тѣла, если сосредоточить въ этой точкѣ всю массу даннаго тѣла, относительно

любой плоскости Q, будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$mq_c = \text{пред.} \sum \Delta m\, q = \text{пред.} \sum \sigma_3\, \Delta V\, q = \int \sigma_3 q\,.\, dV,$$

въ которыхъ

$$m = \sum \Delta m = \text{пред.} \sum \sigma_3\, \Delta V = \int \sigma_3 dV,$$

а черезъ q_c и q обозначены соотвѣтственно разстоянія центра тяжести даннаго тѣла и одной изъ точекъ выдѣленнаго элемента ΔV до плоскости Q, причемъ суммированія или интегрированія распространены на **весь объемъ** V даннаго тѣла.

Примѣнивъ эти равенства къ тремъ плоскостямъ прямоугольной, прямолинейной системы координатъ (O; X, Y, Z), мы придемъ къ равенствамъ:

$$\left\{\begin{aligned} mx_c &= \int \sigma_3\, x\, dV, \\ my_c &= \int \sigma_3\, y\, dV, \quad \text{гдѣ } m = \int \sigma_3 dV, \\ mz_c &= \int \sigma_3\, z\, dV, \end{aligned}\right.$$

опредѣляющимъ координаты (x_c, y_c, z_c) центра тяжести C даннаго тѣла.

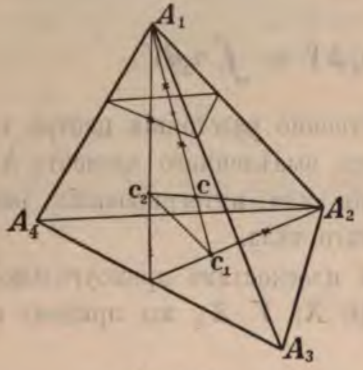
Если тѣло **однородно**, т. е. $\sigma_3 = const$, то $m = \sigma_3 V$, и потому, сокративъ предъидущія равенства на σ_3, мы получимъ:

$$\left\{\begin{aligned} Vx_c &= \int x\, dV, \\ Vy_c &= \int y\, dV, \\ Vz_c &= \int z\, dV, \end{aligned}\right.$$

т. е. положеніе центра тяжести однороднаго тѣла не зависитъ отъ плотности этого тѣла σ_3, а только отъ **вида** его объема, и потому центры тяжести **однородныхъ тѣлъ** называютъ центрами тяжести ихъ **объемовъ**.

Примѣры. 1) *Ц. тяж.* **тетраэдра** *лежитъ на прямой, соединяющей одну изъ вершинъ тетраэдра съ центромъ тяжести противо-*

лежащей ей стороны, въ разстояніи $\frac{3}{4}$ этого отрѣзка отъ выбранной вершины тетраэдра.



Черт. 35.

Дѣйствительно такая прямая A_1c_1 есть геометрическое мѣсто предѣльныхъ положеній центровъ тяжести безконечно тонкихъ сѣченій тетраэдра плоскостями, параллельными выбранному основанію, поэтому центръ тяжести тетраедра долженъ лежать на этой прямой; по той же причинѣ онъ долженъ лежать на прямой A_2c_2, т. е. совпадетъ съ точкою пересѣченій c этихъ прямыхъ, причемъ изъ подобныхъ треугольниковъ (cc_1c_2) и (cA_1A_2) ясно, что (черт. 35)

$$\frac{A_1c}{cc_1} = \frac{A_1A_2}{c_1c_2} = 3, \text{ т. е. } A_1c = 3cc_1.$$

2) *Центръ тяжести многоугольной* **пирамиды** *лежитъ на прямой, соединяющей ея вершину съ центромъ тяжести ея основанія, въ разстояніи $\frac{3}{4}$ этого отрѣзка отъ вершины пирамиды.*

Дѣйствительно, указанная прямая очевидно есть геометрическое мѣсто предѣльныхъ положеній центровъ тяжести безконечно тонкихъ сѣченій пирамиды плоскостями, параллельными ея основанію, слѣдовательно центръ тяжести пирамиды долженъ лежать на этой прямой; кромѣ того, проведя въ пирамидѣ сѣкущую плоскость въ разстояніи $\frac{1}{4}$ h высоты пирамиды отъ ея основанія, мы знаемъ что центры тяжести всѣхъ треугольныхъ пирамидъ, составляющихъ данную многоугольную пирамиду, будутъ лежать въ этой плоскости, слѣдовательно въ этой же плоскости будетъ лежать и центръ тяжести данной многоугольной пирамиды.

Такъ какъ приведенная теорема справедлива для произвольнаго числа граней пирамиды, то:

3) *Ц. тяж. всякаго* **конуса** *лежитъ на линіи, соединяющей вершину конуса съ центромъ тяжести его основанія, въ разстояніи $\frac{3}{4}$ этого отрѣзка отъ вершины конуса.*

4) *Ц. тяж.* **сферическаго сектора** *лежитъ на серединѣ высоты отсѣкаемаго имъ сегмента концентрической шаровой поверхности, радіусъ которой равенъ $\frac{3}{4}$ радіуса даннаго сектора.*

Дѣйствительно, представивъ данный сферическій секторъ, какъ предѣлъ суммы правильныхъ многоугольныхъ пирамидъ, основанія которыхъ касательны къ шаровой поверхности сектора, а вершины совпадаютъ съ центромъ этой шаровой поверхности и сосредоточивъ массу каждой такой пирамиды въ ея центрѣ тяжести, мы знаемъ, что на центръ тяжести даннаго сектора можно смотрѣть, какъ на предѣльное положеніе центра тяжести этой системы матеріальныхъ точекъ, равныхъ массъ и правильно расположенныхъ на сферической поверхности, радіусъ которой равенъ $\frac{3}{4}$ радіуса данной сферической поверхности; слѣдовательно искомый центръ тяжести совпадетъ съ центромъ тяжести сегмента этой сферической поверхности, отсѣкаемаго боковою поверхностью даннаго сектора, т. е. будетъ находиться на серединѣ высоты указаннаго сегмента.

5) *Если данный объемъ V равенъ* **алгебраической** *суммѣ:*

$$V = V_1 \pm V_2 \pm \ldots \pm V_n$$

объемовъ, положенія центровъ тяжести которыхъ намъ извѣстны, то обозначивъ соотвѣтственно черезъ q, q_1, q_2, ... q_n разстоянія центровъ тяжести этихъ объемовъ до нѣкоторой плоскости Q, мы придемъ къ очевидному равенству:

$$Vq = V_1 q_1 \pm V_2 q_2 \pm \ldots \pm V_n q_n,$$

выражающему, что статическій моментъ такого объема относительно любой плоскости равенъ **алгебраической** *суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости составляющихъ его объемовъ.*

Дѣйствительно, перенеся всѣ отрицательные члены правой части перваго равенства въ его лѣвую часть, мы получимъ двѣ равныхъ суммы объемовъ, образующихъ одно и то же геометрическое тѣло, слѣдовательно статическіе моменты этихъ суммъ объемовъ относительно любой плоскости будутъ равны, откуда и придемъ къ требуемому равенству.

Напримѣръ, зная, что объемъ сферическаго сегмента есть разность объемовъ соотвѣтствующихъ ему сферическаго сектора и конуса и зная положенія центровъ тяжести этихъ двухъ тѣлъ и ихъ объемы, найдемъ положеніе центра тяжести сферическаго сегмента, зная же положеніе центра тяжести сферическаго сегмента найдемъ положеніе центра тяжести сферическаго слоя, какъ разности двухъ сферическихъ сегментовъ; причемъ въ томъ и другомъ случаяхъ достаточно примѣнить предъидущее равенство къ плоскости, проходящей черезъ центръ сферы и перпендикулярной къ общему радіусу симметріи этихъ тѣлъ; впрочемъ тѣ же результаты нетрудно получить и непосредственно.

6) *Ц. тяж.* **сферическаго слоя.**

Обозначивъ черезъ V объемъ даннаго сферическаго слоя, мы знаемъ, что его центръ тяжести долженъ лежать на линіи, соединяющей центры его основаній, какъ на оси симметріи этого тѣла.

Черт. 36.

Раздѣлимъ теперь (черт. 36) данный слой плоскостями параллельными его основаніямъ на безконечно тонкіе слои и обозначимъ черезъ x и y соотвѣтственно разстояніе отъ центра и радіусъ сѣченія одной изъ такихъ плоскостей; въ такомъ случаѣ по теоремѣ, что статическій моментъ всего слоя равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ его частей, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$Vx_c = \text{пред.} \mathop{S}_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \Delta x \text{ , } x = \int_{x_1}^{x_2} \pi x y^2 \, dx$$

но

$$y^2 = r^2 - x^2;$$

слѣдовательно

$$Vx_c = \pi \int_{x_1}^{x_2} x(r^2 - x^2)\, dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 x - x^3)\, dx =$$

$$= \pi \left| \frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{\pi}{4} \left[2r^2 (x_2^2 - x_1^2) - (x_2^4 - x_1^4) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} (x_2^2 - x_1^2) \left[2r^2 - (x_2^2 + x_1^2) \right]$$

гдѣ x_1 и x_2 суть разстоянія основаній даннаго сферическаго слоя отъ центра его шаровой поверхности, а r—радіусъ этой поверхности, причемъ

$$V = \text{пред.} \mathop{S}_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \Delta x = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{x_1}^{x_2} = \pi \left[r^2 (x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \right] =$$

$$= \pi (x_2 - x_1) \left[r^2 - \frac{x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2}{3} \right];$$

слѣдовательно:

$$x_c = \frac{3(x_2 + x_1)}{4} \, \frac{2r^2 - (x_2^2 + x_1^2)}{3r^2 - (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)}.$$

При $x_2 = r$ эта формула опредѣлитъ положеніе центра тяжести сферическаго сегмента:

$$x_c = \frac{3}{4}\,\frac{(r+x_1)^2}{2r+x_1} = \frac{3}{4}\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h},$$

гдѣ h есть высота сегмента; наконецъ если въ послѣдней формулѣ положить $x_1 = 0$, то получимъ положеніе центра тяжести полусферы:

$$x_c = \frac{3}{8}r.$$

§ 5. Теоремы Гюльдена.

Теоремы *Гюльдена* приводятъ вычисленіе поверхностей и объемовъ тѣлъ, образованныхъ вращеніями плоскихъ фигуръ около неизмѣнно съ ними связанныхъ, неподвижныхъ осей, лежащихъ въ плоскостяхъ этихъ фигуръ, къ вычисленію контуровъ и площадей данныхъ фигуръ и нахожденію ихъ центровъ тяжести.

Теорема I. Поверхность, *образованная вращеніемъ плоской, кривой вокругъ неизмѣнно съ нею связанной, неподвижной оси, лежащей въ ея плоскости, равна произведенію изъ длины этой линіи на величину окружности, описываемой ея центромъ тяжести.*

Дѣйствительно, раздѣливъ такую поверхность вращенія S (черт. 37) плоскостями, перпендикулярными къ ея оси, на безконечно тонкіе поясы, мы знаемъ, что поверхность каждаго пояса будетъ **эквивалентна** поверхности вписаннаго въ него усѣченнаго конуса, т. е. произведенію:

$$2\pi\frac{y+(y+\Delta y)}{2}\,\overline{\Delta s} = 2\pi y\,\overline{\Delta s} + \pi\,\Delta y\,\overline{\Delta s}$$

изъ окружности $2\pi\,\dfrac{y+(y+\Delta y)}{2}$ средняго сѣченія этого конуса на длину $\overline{\Delta s}$ его образующей или—произведенію $2\pi y\,\overline{\Delta S}$; слѣдовательно

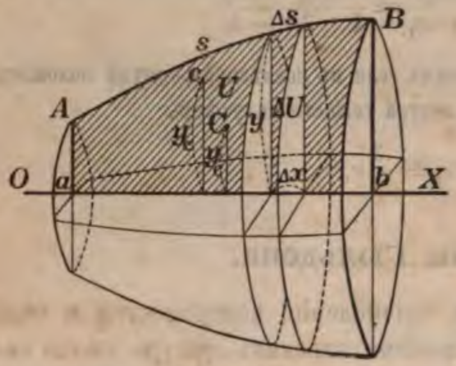
$$S = \text{пред.}\textstyle\sum \Delta S = \text{пред.}\sum 2\pi y\,\overline{\Delta s} =$$

$$= 2\pi\,.\,\text{пред.}\textstyle\sum y\,\widehat{\Delta s} = 2\pi\, y_c\, s,$$

ибо пред. $\sum y\,\widehat{\Delta s}$, какъ предѣлъ суммы статическихъ моментовъ всѣхъ элементовъ $\widehat{\Delta s}$ данной дуги равенъ статическому моменту ея

центра тяжести, т. е. произведенію sy_c изъ длины s этой дуги на разстояніе y_c ея центра тяжести до оси вращенія, итакъ

$$S = 2\pi y_c s, \text{ ч. т. д.}$$



Черт. 37.

Теорема II. Объемъ *тѣла вращенія, образованнаго плоскою кривою, вращающеюся вокругъ неизмѣнно съ нею связанной, неподвижной оси, лежащей въ ея плоскости, равенъ произведенію изъ величины* **площади**, *ограниченной данною кривою, осью вращенія и перпендикулярами, опущенными изъ концовъ кривой на эту ось, умноженной на длину окружности, описываемой центромъ тяжести указанной площади.*

Дѣйствительно, раздѣливъ такой объемъ V (черт. 37) плоскостями, перпендикулярными къ его оси, на безконечно тонкіе слои ΔV, мы знаемъ, что объемъ каждаго слоя будетъ эквивалентенъ объему вписаннаго въ него или описаннаго около него цилиндра, радіусъ основанія котораго есть y, а высота Δx, т. е. произведенію $\pi y^2 \Delta x$ и потому.

$$V = \int \Delta V = \text{пред.} \int \pi y^2 \Delta x =$$

$$= 2\pi \,.\, \text{пред.} \int y \,\Delta x \,.\, \frac{y}{2} = 2\pi\, y_c U,$$

ибо

$$\text{пред.} \int y\,\Delta x \,.\, \frac{y}{2} = \text{пред.} \int \Delta U \,\frac{y}{2}$$

есть предѣлъ суммы статическихъ моментовъ всѣхъ элементовъ ΔU данной площади U относительно перпендикулярной къ ней плоскости, проходящей черезъ ось OX, т. е. равенъ статическому моменту относительно той же плоскости всей этой площади U; другими словами произведенію Uy_c изъ величины этой площади U на разстояніе y_c ея центра тяжести C до оси вращенія; итакъ

$$V = 2\pi\, y_c U, \text{ ч. т. д.}$$

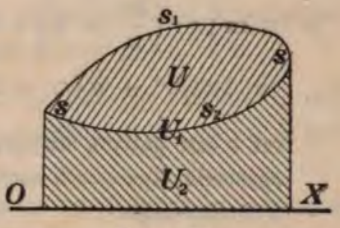
Замѣтимъ наконецъ, что эти двѣ теоремы распространяются на поверхности и объемы тѣлъ, образованныхъ вращеніемъ плоской, **замкнутой** фигуры вокругъ неизмѣнно съ нею связанной, неподвижной оси, лежащей въ плоскости этой фигуры.

Дѣйствительно (черт. 38), проведя изъ крайнихъ точекъ данной фигуры перпендикуляры къ оси OX, мы знаемъ, что поверхность S, образованная вращеніемъ этой фигуры около оси OX, будетъ равна суммѣ поверхностей S_1, S_2, образованныхъ вращеніями линій s_1, s_2, т. е.

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi y_1 s_1 + 2\pi y_2 s_2 = 2\pi (y_1 s_1 + y_2 s_2),$$

гдѣ черезъ y_1 и y_2 мы обозначили соотвѣтственно разстоянія центровъ тяжести линій s_1, s_2 до оси вращенія OX; слѣдовательно

$$y_1 s_1 + y_2 s_2 = s y_c,$$



Черт. 38.

гдѣ $s = s_1 + s_2$ есть длина контура данной фигуры, а y_c — разстояніе до оси OX центра тяжести этого **контура** и потому

$$S = 2\pi y_c s.$$

Подобнымъ же образомъ объемъ V тѣла, образованнаго вращеніемъ фигуры U около оси OX, будетъ равенъ разности $(V_1 - V_2)$ объемовъ V_1, V_2, образованныхъ вращеніемъ фигуръ U_1, U_2, ограниченныхъ кривыми s_1, s_2, осью OX и указанными перпендикулярными, т. е.

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi y_1 U_1 - 2\pi y_2 U_2 = 2\pi (y_1 U_1 - y_2 U_2),$$

гдѣ y_1 и y_2 суть разстоянія центровъ тяжести площадей U_1, U_2 до оси OX; слѣдовательно

$$U_1 y_1 - U_2 y_2 = U y_C,$$

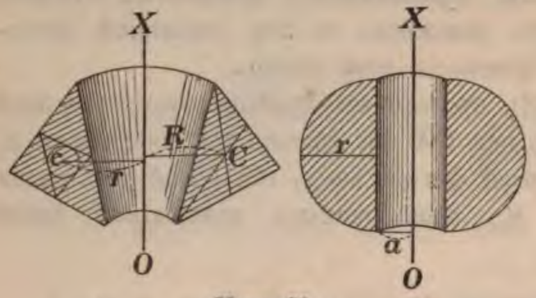
гдѣ $U = U_1 - U_2$ есть площадь данной фигуры, а y_C — разстояніе центра тяжести этой **площади** до оси OX и потому

$$V = 2\pi y_C U.$$

Примѣры. 1) **Поверхность S и объемъ V тѣла, образованнаго вращеніемъ треугольника (черт. 39) около неизмѣнно съ нимъ связанной оси OX, лежа-**

щей въ плоскости этого треугольника, выразятся соотвѣтственно равенствами:

$$S = 2\pi r\, s, \quad V = 2\pi R\, U,$$



Черт. 39.

гдѣ s есть периметръ, U площадь этого треугольника, а r и R суть соотвѣтственно разстоянія центровъ тяжести этого периметра s и площади U до оси вращенія.

2) Поверхность S и объемъ V кольца, образованнаго вращеніемъ половины круга около неизмѣнно съ нимъ связанной оси OX, лежащей въ плоскости этой фигуры и параллельной ея діаметру, выразятся соотвѣтственно равенствами:

$$S = 2\pi\left[\pi r\left(\frac{2r}{\pi} + a\right) + 2\,ra\right] = 2\pi\,[2r^2 + a(\pi r + 2r)],$$

$$V = 2\pi\left(a + \frac{2}{3}\,r\,\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{2}\,\pi r^2 = \pi^2 r^2\left(\frac{4r}{3\pi} + a\right),$$

гдѣ r есть радіусъ полукруга, а a разстояніе между его діаметромъ и осью вращенія. При $a = 0$ послѣднія формулы даютъ соотвѣтственно поверхность и объемъ шара.

3) Поверхность S и объемъ V кольца, образованнаго вращеніемъ круга около неизмѣнно съ нимъ связанной оси, лежащей въ его плоскости, выразятся соотвѣтственно равенствами:

$$S = 4\pi^2 r\, R \quad \text{и} \quad V = 2\pi^2 r^2\, R,$$

гдѣ r есть радіусъ даннаго круга, а R — разстояніе его центра до оси вращенія.

ГЛАВА II.

Равновѣсіе точекъ, твердыхъ тѣлъ и системъ.

I. Равновѣсіе матеріальной точки.

§ 1. Условія равновѣсія свободной матеріальной точки.

Матеріальная точка называется **свободною**, когда ея перемѣщенія не ограничены никакими условіями.

Если **свободная** м. точка m подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ ней силъ $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$ остается въ **покоѣ** или **равновѣсіи,** то равнодѣйствующая

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = 0$$

всѣхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ, необходимо должна быть равна нулю, ибо въ противномъ случаѣ м. точка, обладая ускореніемъ $\overline{u} = \frac{\overline{F}}{m}$, не могла бы пребывать въ покоѣ; наоборотъ, если къ свободной м. точкѣ, пребывающей въ покоѣ, приложить систему силъ, геометрическая сумма которыхъ равна нулю, то м. точка, не обладая ускореніемъ, будетъ оставаться въ равновѣсіи.

Итакъ, *для равновѣсія* **свободной** *матеріальной точки необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма или равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, находившейся первоначально въ покоѣ, была равна нулю.*

Примѣры. 1. *Если свободная м. точка находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ* **двухъ** *силъ, то эти силы должны быть равны и прямопротивоположны.*

2. *Если свободная м. точка находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ* **трехъ** *силъ, то каждая изъ этихъ силъ должна быть равна и прямопротивоположна діагонали параллелограмма, построеннаго на двухъ остальныхъ.*

3. *Если свободная м. точка остается въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ* **четырехъ** *силъ, то каждая изъ этихъ силъ должна быть равна и прямопротивоположна діагонали параллелепипеда, построеннаго на трехъ остальныхъ.*

§ 2. Уравненія равновѣсія свободной матеріальной точки.

Обозначивъ черезъ (X_i, Y_i, Z_i) проекціи одной изъ силъ $\overline{F}_i$, приложенныхъ къ свободной м. точкѣ, на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$, а черезъ (X, Y, Z) — проекціи на тѣ же оси равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ этихъ силъ, мы знаемъ, что условіе равновѣсія свободной м. точки:

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = 0$$

равносильно тремъ равенствамъ въ проекціяхъ:

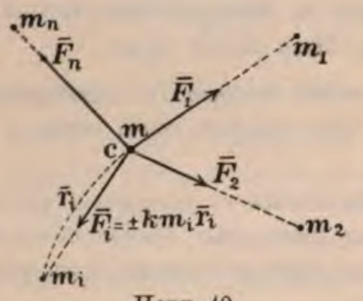
$$X = \Sigma X_i = 0,\ Y = \Sigma Y_i = 0,\ Z = \Sigma Z_i = 0,$$

называемымъ **уравненіями** равновѣсія свободной м. точки.

Итакъ, **аналитически** *для равновѣсія свободной матеріальной точки необходимо и достаточно, чтобы суммы проекцій приложенныхъ къ ней силъ на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ были соотвѣтственно равны нулю.*

Примѣръ. *Найти положеніе равновѣсія свободной м. точки m, притягиваемой или отталкиваемой n неподвижными м. точками: m_1, m_2, ... m_n пропорціонально ихъ массамъ и разстояніямъ до точки m.* Обозначивъ черезъ $\overline{F_i}$ (черт. 40) силу, дѣйствующую на точку m со стороны точки m_i, согласно допущенію, мы можемъ положить:

$$\overline{F_i} = \pm k m_i \overline{r_i},$$



Черт. 40.

гдѣ k есть множитель пропорціональности, общій для всѣхъ точекъ m_i, а $\overline{r_i} = \overline{mm_i}$ — векторъ, соединяющій точку m съ точкою m_i, причемъ знакъ $(+)$ соотвѣтствуетъ силамъ притяженія, а знакъ $(-)$ силамъ отталкиванія; поэтому, обозначивъ черезъ (X_i, Y_i, Z_i) проекціи силы $\overline{F_i}$ на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ $(O;\ X, Y, Z)$, а черезъ (x, y, z) и (x_i, y_i, z_i) — соотвѣтственно координаты точекъ m и m_i относительно тѣхъ же осей, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$X_i = \pm k m_i (x_i - x),\quad Y_i = \pm k m_i (y_i - y),\quad z_i = \pm k m_i (z_i - z),$$

причемъ уравненія равновѣсія точки m подъ дѣйствіемъ этихъ силъ напишутся подъ видомъ:

$$\Sigma m_i (x_i - x) = 0,\ \Sigma m_i (y_i - y) = 0,\ \Sigma m_i (z_i - z) = 0,$$

откуда получимъ:

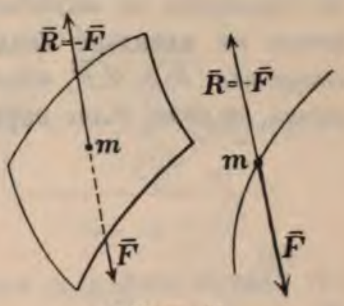
$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i},\ y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i},\ z = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i},$$

т. е. положеніе равновѣсія м. точки m, подверженной дѣйствію указанныхъ силъ, совпадаетъ съ **центромъ тяжести** данной системы м. точекъ.

§ 3. Условія равновѣсія несвободной матеріальной точки.

Матеріальная точка называется **несвободною**, когда ея перемѣщенія ограничены нѣкоторыми условіями или преградами; напр. м. точка при своихъ перемѣщеніяхъ должна оставаться на нѣкоторой поверхности или линіи.

Если **несвободная** м. точка остается въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ системы n силъ: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, то (черт. 41) всегда можно подобрать такую силу $\overline{R}$, что м. точка подъ дѣйствіемъ тѣхъ же силъ $\overline{F}_i$ и этой силы $\overline{R}$ останется въ равновѣсіи, будучи **свободною,** для чего необходимо и достаточно, какъ мы знаемъ, чтобы сила $\overline{R}$ удовлетворяла геометрическому равенству:



Черт. 41.

$$\Sigma \overline{F}_i + \overline{R} = 0,$$

т. е.

$$\overline{R} = -\Sigma \overline{F}_i = -\overline{F}.$$

Такимъ образомъ *на равновѣсіе всякой* **несвободной** *м. точки можно смотрѣть, какъ на равновѣсіе* **свободной** *м. точки, если къ дѣйствующимъ на точку силамъ F_i присоединить еще силу R, замѣняющую собою присутствіе преграды, и называемую* **реакціей преграды.**

Силы, **непосредственно** приложенныя къ м. точкѣ, мы будемъ называть еще **активными** силами, а реакціи преградъ, въ отличіе отъ нихъ, **пассивными** силами, такъ какъ реакціи преградъ не непосредственно задаются, а опредѣляются въ зависимости отъ активныхъ силъ.

Но, если преграда дѣйствуетъ на м. точку съ силою $\overline{R}$, то по началу «*равенства дѣйствія и противодѣйствія*» м. точка будетъ въ свою очередь дѣйствовать на преграду съ силою $-\overline{R} = \Sigma \overline{F}_i = \overline{F}$, равною и прямопротивоположною силѣ реакціи $\overline{R}$, называемою **давленіемъ** точки на преграду.

Такимъ образомъ *при равновѣсіи* **несвободной** *матеріальной точки* **давленіе** *этой точки на преграду геометрически равно*

равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *всѣхъ* **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ.*

Поверхности и линіи, т. е. вообще преграды называются **идеально гладкими**, когда онѣ могутъ оказывать лишь **нормальныя** къ нимъ реакціи.

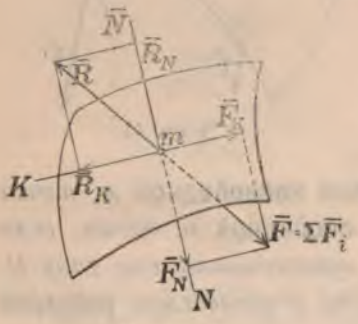
Принявъ во вниманіе, что при равновѣсіи несвободной м. точки:

$$\Sigma \overline{F}_i + \overline{R} = 0,$$

т. е.

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = -\overline{R},$$

мы приходимъ къ заключенію, что *при равновѣсіи матеріальной точки на* **идеально гладкой** *поверхности или линіи равнодѣйствующая* $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *всѣхъ* **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, должна быть* **нормальна** *къ преградѣ*, такъ какъ она равна и прямопротивоположна реакціи $\overline{R}$ этой преграды.



Черт. 42.

Если преграды могутъ оказывать наклонныя къ нимъ реакціи, то онѣ называются **шероховатыми.**

Разложивъ реакцію $\overline{R} = \overline{R}_N + \overline{R}_K$ (черт. 42) шероховатой поверхности или линіи на нормальную и касательную къ нимъ реакціи $\overline{R}_N$ и $\overline{R}_K$, первую изъ нихъ называютъ **нормальною** реакціей, а вторую—**касательною** реакціей или **силою тренія.**

Но при равновѣсіи несвободной матеріальной точки, какъ мы знаемъ:

$$\overline{R} = -\Sigma \overline{F}_i = -\overline{F};$$

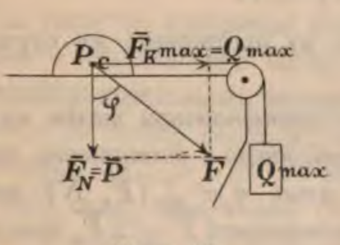
слѣдовательно

$$\overline{R}_N = -\overline{F}_N \quad \text{и} \quad \overline{R}_K = -\overline{F}_K,$$

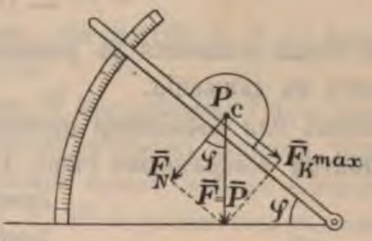
гдѣ черезъ $\overline{F}_N$ и $\overline{F}_K$ мы обозначили соотвѣтственно **нормальную** и **касательную** составляющія равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ **активныхъ** силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ.

Итакъ при равновѣсіи несвободной м. точки на **шероховатой** поверхности или линіи нормальная реакція преграды равна и прямо-

противоположна нормальной составляющей $\overline{F}_N$ равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, а сила тренія $\overline{R}_K$ — касательной составляющей $\overline{F}_K$ той же равнодѣйствующей, причемъ, какъ показываютъ опыты (черт. 43) надъ треніемъ соприкасающихся тѣлъ, при одной и той же нормальной составляющей или нормальномъ давленіи $\overline{F}_N$ касательную составляющую $\overline{F}_K$ равнодѣйствующей $\overline{F}$ можно измѣнять въ предѣлахъ отъ нуля до нѣкотораго **наибольшаго** значенія $\overline{F}_{K,\,max.}$ безъ нарушенія равновѣсія тѣла, при дальнѣйшемъ же увеличеніи $\overline{F}_K$ тѣло прихо-



Черт. 43.



Черт. 44.

дитъ въ движеніе; кромѣ того для каждаго рода **физическихъ** тѣлъ, находящихся въ соприкосновеніи, $F_{K,\,max.}$ зависитъ отъ величины F_N, но отношеніе

$$\frac{F_{K,\,max.}}{F_N} = const = k,$$

т. е.

$$F_{K,\,max.} = kF_N,$$

гдѣ k есть нѣкоторый коэффиціентъ, зависящій **лишь** отъ **природы** соприкасающихся тѣлъ; его называютъ **коэффиціентомъ статическаго тренія** соприкасающихся тѣлъ, а уголъ φ, удовлетворяющій равенству $tg\varphi = k$, **угломъ тренія**; этотъ уголъ (черт. 44) между прочимъ равенъ углу, при которомъ данное тѣло начинаетъ скользить на наклонной плоскости, построенной изъ матеріала другого тѣла.

Такъ какъ коэффиціентъ статическаго тренія двухъ соприкасающихся тѣлъ не зависитъ отъ **величины** соприкасающихся поверхностей, то это понятіе примѣняютъ и къ м. точкамъ, находящимся на шероховатой поверхности или линіи.

Такимъ образомъ, если къ м. точкѣ, пребывающей въ равновѣсіи на какой-либо шероховатой поверхности или линіи, приложить

силу $\overline{F} = \overline{F}_N + \overline{F}_K$, причемъ (черт. 45)

$$F_K \leqslant F_{K,max.} = kF_N,$$

т. е.

$$\frac{F_K}{F_N} \leqslant k = tg\,\varphi$$

или

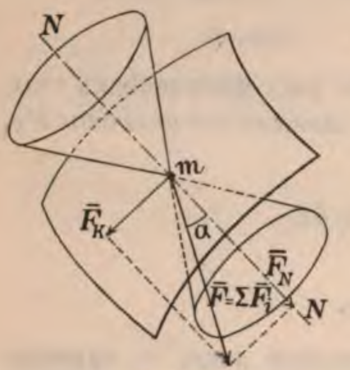
$$tg\,(F, N) \leqslant tg\,\varphi,$$

т. е.

$$\alpha = \angle\,(F, N) \leqslant \varphi,$$

то м. точка останется въ равновѣсіи, въ противномъ же случаѣ — придетъ въ движеніе.

Итакъ *для равновѣсія несвободной матеріальной точки на* **шероховатой** *поверхности* (черт. 45) *необходимо и достаточно, чтобы острый уголъ* $\alpha = \angle\,(F, N)$ *между равнодѣйствующей* $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *всѣхъ* **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ и нормалью къ поверхности былъ менѣе* **угла тренія** φ, *соотвѣтствующаго данной поверхности, другими словами, чтобы эта равнодѣйствующая лежала внутри или на поверхности, такъ называемаго,* **конуса тренія** *данной шероховатой поверхности, т. е. круговаго конуса, описаннаго около нормали къ поверхности въ данной ея точкѣ* **угломъ тренія** φ.



Черт. 45.

Примѣры. *1. Если* **тяжелая** *м. точка находится въ равновѣсіи на* **шероховатой** *наклонной плоскости, то уголъ, составляемый этою плоскостью съ горизонтомъ, необходимо долженъ быть равенъ или менѣе угла тренія, соотвѣтствующаго этой плоскости.*

2. На **шероховатой** *шаровой поверхности* **тяжелая** *м. точка можетъ находиться въ равновѣсіи въ любой точкѣ сегментовъ, отсѣкаемыхъ круговою коническою поверхностью, имѣющею вершину въ центрѣ этого шара и образующая которой составляетъ съ его вертикальнымъ діаметромъ уголъ, равный* **углу тренія** *данной шаровой поверхности.*

§ 4. Уравненія равновѣсія несвободной матеріальной точки.

Найдемъ теперь **уравненія** равновѣсія м. точки, остающейся на нѣкоторой **идеально гладкой** поверхности или линіи.

Всякая поверхность, какъ извѣстно, аналитически можетъ быть выражена нѣкоторымъ уравненіемъ между координатами (x, y, z) ея точекъ:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Для удобства изложенія положимъ, что оси $(O; X, Y, Z)$ **прямоугольны** и введемъ одно новое понятіе.

Дифференціальнымъ параметромъ $\overline{N}$ *поверхности* $f(x, y, z) = 0$ *въ данной ея точкѣ* (x, y, z) *мы будемъ называть векторъ, проекціи котораго* N_x, N_y, N_z *на выбранныхъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осяхъ координатъ* $(O; X, Y, Z)$ *выражаются соотвѣтственно частными производными отъ функціи поверхности:*

$$N_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \; N_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \; N_z = \frac{\partial f}{\partial z};$$

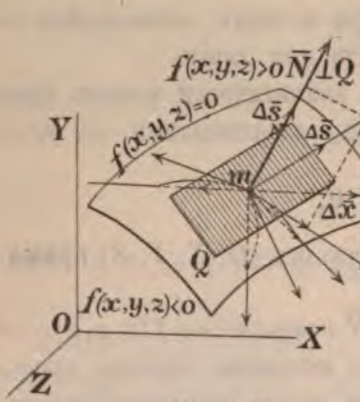
слѣдовательно:

$$N = + \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

и

$$\begin{cases} \cos(N, X) = \dfrac{N_x}{N} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{+\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\[2ex] \cos(N, Y) = \dfrac{N_y}{N} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{+\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\[2ex] \cos(N, Z) = \dfrac{N_z}{N} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{+\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \end{cases}$$

Докажемъ, что *ни величина, ни направленіе дифференціальнаго параметра поверхности въ данной ея точкѣ не зависятъ отъ* **выбора** *осей координатъ* (O; X, Y, Z); съ этою цѣлью вообразимъ на поверхности нѣкоторую точку m (черт. 46); координаты этой точки (x, y, z) будутъ очевидно обращать функцію поверхности $f(x, y, z)$ въ нуль, если же точка m перемѣнится на безконечно малый векторъ



Черт. 46.

$$\overline{\Delta s} = \overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z},$$

то функція $f(x, y, z)$ вообще получитъ нѣкоторое новое значеніе $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, отличное отъ нуля, причемъ полное приращеніе Δf функціи $f(x, y, z)$ при переходѣ точки m изъ перваго положенія во второе, какъ извѣстно, можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$\Delta f = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \varepsilon\Delta s,$$

гдѣ черезъ $\varepsilon\Delta s$ мы обозначили нѣкоторую безконечно малую величину **высшаго порядка** относительно Δx, Δy, Δz, а слѣдовательно и относительно

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Но

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = N_x\Delta x + N_y\Delta y + N_z\Delta z =$$
$$= \overline{N}\,\overline{\Delta s} = N\Delta s \cos(N,\ \Delta s);$$

слѣдовательно

$$\Delta f = N\Delta s \cos(N,\ \Delta s) + \varepsilon\Delta s,$$

т. е. *безконечно малое приращеніе* Δf *функціи* $f(x, y, z)$ *при перемѣщеніи точки* m *изъ положенія* (x, y, z), *занимаемаго ею на*

поверхности $f(x, y, z) = 0$, *на безконечно малый векторъ* $\overline{\Delta s}$, **эквивалентно** *геометрическому произведенію* $\overline{N}\,\overline{\Delta s}$ *изъ вектора перемѣщенія* $\overline{\Delta s}$ *на дифференціальный параметръ поверхности* $\overline{N}$ *въ разсматриваемой ея точкѣ.*

Изъ предыдущаго равенства вытекаютъ слѣдующія свойства дифференціальнаго параметра $\overline{N}$ поверхности въ данной ея точкѣ:

1) **Направленіе** *дифференціальнаго параметра поверхности въ данной ея точкѣ совпадаетъ съ* **нормалью** *къ поверхности въ этой точкѣ и идетъ въ ту сторону, въ которой функція поверхности—* **болѣе нуля.**

Дѣйствительно, предположимъ, что точка m (черт. 46) перемѣщается по поверхности $f(x, y, z) = 0$; въ такомъ случаѣ $\Delta f = 0$; слѣдовательно

$$N\Delta s \cos(N, \Delta s) + \varepsilon\Delta s = 0;$$

раздѣливъ послѣднее равенство на Δs и переходя къ предѣлу при $\Delta s = 0$, мы получимъ

$$N \cos(N, K) = 0,$$

гдѣ подъ K мы подразумѣваемъ предѣльное положеніе сѣкущей, совпадающей съ направленіемъ $\overline{\Delta s}$, т. е. направленіе нѣкоторой касательной mK къ данной поверхности въ разсматриваемой ея точкѣ m.

Итакъ $\cos(N, K) = 0$, т. е. направленіе дифференціальнаго параметра $\overline{N}$ поверхности въ данной ея точкѣ перпендикулярно ко всевозможнымъ прямымъ, проходящимъ черезъ эту точку и касательнымъ въ ней къ поверхности; слѣдовательно всѣ такія касательныя прямыя лежатъ въ одной плоскости Q (черт. 46), перпендикулярной къ $\overline{N}$. Эта плоскость называется плоскостью **касательною** къ поверхности въ **данной** ея точкѣ, а прямая перпендикулярная къ касательной плоскости и проходящая черезъ точку касанія — **нормалью** къ поверхности въ той же точкѣ, такимъ образомъ направленіе нормали къ поверхности въ данной ея точкѣ и направленія дифференціальнаго параметра поверхности въ той же точкѣ совпадаютъ; кромѣ того, изъ равенствъ:

$$\Delta f = N\Delta s \cos(N, \Delta s) + \varepsilon\Delta s = \Delta s\,[N \cos(N, \Delta s) + \varepsilon]$$

ясно, что знакъ Δf совпадаетъ со знакомъ $\cos(N, \Delta s)$; слѣдова-

тельно при перемѣщенiи точки по направленiю $\overline{N}$ приращенiе функцiи Δf будетъ **болѣе нуля**, ибо въ этомъ случаѣ $cos\,(N, \Delta s) = 1$.

2) **Величина** *дифференцiальнаго параметра поверхности въ данной ея точкѣ равна предѣлу отношенiя* $\frac{\Delta f}{\Delta s_N}$ *безконечно малаго приращенiя* Δf *функцiи поверхности при безконечно маломъ перемѣщенiи* Δs_N *точки, по направленiю дифференцiальнаго параметра* $\overline{N}$ *поверхности въ разсматриваемой точкѣ, къ самому этому перемѣщенiю* Δs_N.

Дѣйствительно, при такомъ перемѣщенiи точки $cos\,(N, \Delta s) = 1$; слѣдовательно:

$$\Delta f = N \Delta s_N + \varepsilon \Delta s_N,$$

т. е.

$$N = \text{пред.}\ \frac{\Delta f}{\Delta s_N}$$

Введя понятiе о дифференцiальномъ параметрѣ поверхности въ данной ея точкѣ, нетрудно написать уравненiя равновѣсiя несвободной м. точки, остающейся на **идеально гладкой** поверхности.

Дѣйствительно, т. к. реакцiя $\overline{R}$ идеально гладкой поверхности направлена по нормали къ поверхности или, что все равно, — въ ту или другую сторону по дифференцiальному параметру $\overline{N}$ поверхности въ данной ея точкѣ,

то

$$\overline{R} = \lambda \overline{N},$$

гдѣ λ есть нѣкоторый положительный или отрицательный множитель, и потому проекцiи (R_x, R_y, R_z) реакцiи $\overline{R}$ идеально гладкой поверхности на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$ будутъ соотвѣтственно пропорцiональны проекцiямъ N_x, N_y, N_z на тѣхъ же осяхъ дифференцiальнаго параметра поверхности въ разсматриваемой точкѣ, т. е.

$$\left\{\begin{aligned} R_x &= \lambda N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ R_y &= \lambda N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ R_z &= \lambda N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Положимъ теперь, что несвободная м. точка m подъ дѣйствіемъ силы $\overline{F}$ остается въ равновѣсіи на идеально-гладкой поверхности $f(x, y, z) = 0$; въ такомъ случаѣ условіе равновѣсія этой м. точки:

$$\overline{F} + \overline{R} = 0$$

аналитически выразится тремя равенствами проекцій обѣихъ частей этого геометрическаго равенства, на трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осяхъ координатъ (O; X, Y, Z), а именно:

$$\begin{cases} X + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ Y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ Z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Присоединивъ къ послѣднимъ тремъ равенствамъ уравненіе поверхности:

$$f(x, y, z) = 0,$$

мы получимъ четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ x, y, z и λ, и вообще указанныя четыре равенства, называемыя **уравненіями равновѣсія** несвободной м. точки на идеально гладкой поверхности, даютъ возможность по тремъ изъ величинъ:

$$x,\ y,\ z;\ \ X,\ Y,\ Z \text{ и } \lambda$$

опредѣлить остальныя четыре.

Примѣръ. *Найти положенія равновѣсія и давленіе* **тяжелой** *м. точки, находящейся на идеально гладкомъ трехъ-осномъ эллипсоидѣ, меньшая ось котораго вертикальна, если м. точка притягивается къ центру этого эллипсоида постоянною силою* F_1.

Принявъ за оси координатъ (O; X, Y, Z) соотвѣтственно большую, среднюю и меньшую полуоси (a, b, c) даннаго эллипсоида, мы знаемъ, что уравненіе эллипсоида напишется подъ видомъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Проекціи (X_1, Y_1, Z_1) на тѣ же оси силы притяженія $\overline{F}_1$ м. точки

центромъ эллипсоида опредѣлятся изъ равенствъ:

$$X_1 = -\frac{F_1 x}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$Y_1 = -\frac{F_1 y}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$Z_1 = -\frac{F_1 z}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

наконецъ проекціи (X_2, Y_2, Z_2) вѣса $\overline{p}$ м. точки на тѣхъ же осяхъ будутъ:

$$X_2 = Y_2 = 0 \text{ и } Z_2 = -p;$$

слѣдовательно уравненія равновѣсія напишутся подъ видомъ:

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{F_1 x}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \lambda\,\frac{2x}{a^2} = 0,\\ &-\frac{F_1 y}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \lambda\,\frac{2y}{b^2} = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.\\ &-\frac{F_1 z}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \lambda\,\frac{2z}{c^2} - p = 0, \end{aligned}\right.$$

Эти уравненія допускаютъ слѣдующія рѣшенія:

1) $x = 0,\ y = 0,\ z = \pm c;\ \ \lambda = \pm\frac{c}{2}[\pm F_1 + p];$

2) $x = 0,\ y \gtrless 0.$

Сокративъ второе уравненіе на y, найдемъ:

$$\lambda = \frac{b^2}{2}\frac{F_1}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

подставивъ затѣмъ это выраженіе въ послѣднее уравненіе и принявъ во вниманіе, что $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, получимъ:

$$y = \pm\frac{b}{c}(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}},\ z = \pm\frac{pb}{\left(\frac{b^2-c^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[F_1^{\,2}\frac{b^2-c^2}{c^2}+p^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

3) $x \gtrless 0,\ y = 0.$

Подобно предыдущему найдемъ:

$$x = \pm\frac{a}{c}(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}};\ z = \pm\frac{pa}{\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[F_1^{\,2}\frac{a^2-c^2}{a^2}+p^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Давленіе м. точки на эллипсоидъ, будучи геометрически равно равнодѣйствующей всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, опредѣлится его проекціями (X, Y, Z) на осяхъ координатъ:

$$1)\ \text{при } x = 0,\ y = 0 \ldots\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = -(\pm F_1 + p)$$

$$2)\ \text{при } x = 0,\ y \gtrless 0 \ldots\ X = 0,\ Y = -\frac{F_1 y}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$Z = -\left(\frac{Fz}{\sqrt{y^2 + z^2}} - p\right)$$

$$3)\ \text{при } x \gtrless 0,\ y + 0 \ldots\ X = -\frac{F_1 x}{\sqrt{x^2 + z^2}},\ Y = 0,$$

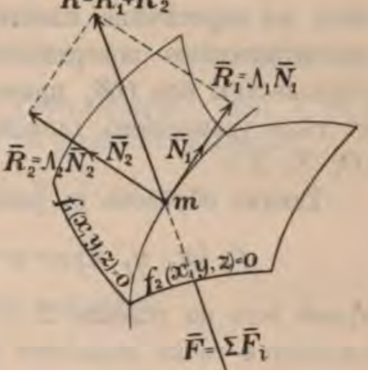
$$Z = -\left(\frac{F_1 x}{\sqrt{x^2 + z^2}} - p\right)$$

Если м. точка m подъ дѣйствіемъ силы $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ должна оставаться въ равновѣсіи на нѣкоторой идеально гладкой (черт. 47) **линіи**, то, принявъ во вниманіе, что на такую линію можно смотрѣть, какъ на пересѣченіе двухъ идеально гладкихъ поверхностей:

$$f_1(x,\ y,\ z) = 0$$

$$\text{и } f_2(x,\ y,\ z) = 0$$

и обозначивъ черезъ $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ соотвѣтственно реакціи этихъ поверхностей, а черезъ $\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2$ — реакцію идеально гладкой линіи, мы знаемъ, что



Черт. 47.

$$\overline{R}_1 = \lambda_1 \overline{N}_1 \text{ и } \overline{R}_2 = \lambda_2 \overline{N}_2,$$

гдѣ $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ суть соотвѣтственно дифференціальные параметры этихъ поверхностей въ разсматриваемой точкѣ, а λ_1 и λ_2 нѣкоторые множители, причемъ условіе равновѣсія такой м. точки:

$$\overline{F} + \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = 0$$

аналитически выразится тремя равенствами проекцій обѣихъ частей этого геометрическаго равенства на выбранныхъ трехъ взаимно-пер-

пендикулярныхъ осяхъ координатъ (O; X, Y, Z), а именно:

$$\begin{cases} X + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \\ Y + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \\ Z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

присоединивъ къ которымъ два уравненія поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = 0 \text{ и } f_2(x, y, z) = 0,$$

мы получимъ пять уравненій для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ:

$$x, y, z; \lambda_1, \lambda_2.$$

Если данная линія есть **плоская** кривая, причемъ равнодѣйствующая $\overline{F} = \Sigma \overline{F_i}$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, лежитъ въ этой плоскости и въ этой же плоскости взять прямоугольныя оси координатъ (O; X, Y), то на данную кривую можно смотрѣть, какъ на пересѣченіе плоскости координатъ $z = 0$ съ нѣкоторою цилиндрическою поверхностью $f(x, y) = 0$, образующія которой параллельны оси OZ, причемъ послѣднее уравненіе будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіемъ данной плоской кривой, отнесенной къ осямъ (O; X, Y).

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$f_1(x, y, z) = z \text{ и } f_2(x, y, z) = f(x, y);$$

кромѣ того по условію $Z = 0$, поэтому уравненія равновѣсія несвободной точки обратятся въ слѣдующія:

$$\begin{cases} X + \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ Y + \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \lambda_1 = 0, \end{cases} \quad z = 0 \text{ и } f(x, y) = 0.$$

Оставивъ въ сторонѣ очевидныя равенства $z = 0$ и $\lambda_1 = 0$, изъ которыхъ первое выражаетъ, что м. точка лежитъ въ плоскости

кривой, а второе, — что реакція этой плоскости $R_1 = \lambda_1 N_1 = 0$ равна нулю и замѣнивъ въ остальныхъ уравненіяхъ λ_2 для простоты черезъ λ, мы получимъ **три** уравненія:

$$\begin{cases} X + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0; \\ Y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad f(x, y) = 0$$

равновѣсія м. точки на идеально гладкой **плоской** кривой, при условіи, что равнодѣйствующая $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ **активныхъ** силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, лежитъ въ плоскости этой кривой и оси координатъ $(O;\ X,\ Y)$ взяты въ той же плоскости.

Примѣръ. *Опредѣлить положенія равновѣсія и давленіе* **тяжелой** *м. точки, находящейся на эллипсѣ, мѐньшая ось котораго вертикальна и отталкиваетъ м. точку горизонтальною силою, пропорціональною разстоянію м. точки до этой оси.*

Принявъ за оси координатъ $(O;\ X,\ Y)$ соотвѣтственно бо̀льшую и мѐньшую полуоси $(a,\ b)$ даннаго эллипса и направивъ ось OY по вертикали вверхъ, мы знаемъ, что уравненіе эллипса будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причемъ проекціи $(X_1,\ Y_1)$ и $(X_2,\ Y_2)$ отталкивающей силы и вѣса $\overline{p}$ м. точки на тѣхъ же осяхъ опредѣлятся изъ очевидныхъ равенствъ:

$$X_1 = kx,\ Y_1 = 0;\ X_2 = 0,\ Y_2 = -p;$$

слѣдовательно:

$$X = kx,\ Y = -p,$$

и уравненія равновѣсія м. точки напишутся подъ видомъ:

$$\begin{cases} kx + \lambda \dfrac{2x}{a^2} = 0, \\ -p + \lambda \dfrac{2y}{b^2} = 0, \end{cases} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эти уравненія допускаютъ слѣдующія рѣшенія:

1) $x = 0,\ y = \pm b,\ \lambda = \pm \dfrac{pb}{2}$;

2) $x \gtrless 0;\ \lambda = -\dfrac{ka^2}{2},\ y = -\dfrac{b^2 p}{ka^2},\ x = \pm \dfrac{1}{ka}\sqrt{k^2a^4 - p^2b^2}$.

При $k^2a^4 > p^2b^2$, въ послѣднемъ случаѣ получаются два положенія равновѣсія м. точки.

Давленіе м. точки на эллипсъ, будучи геометрически равно равнодѣйствующей всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, опредѣлится его проекціями (X, Y) на осяхъ координатъ:

1) при $x = 0$: $X = 0,\ Y = -p$

2) при $x \gtrless 0$: $X = \pm \frac{1}{a}\sqrt{k^2a^4 - p^2b^2},\ Y = -p.$

II. Равновѣсіе твердаго тѣла.

§ 1. Условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Твердое тѣло называется **свободнымъ**, когда перемѣщенія его не ограничены никакими условіями.

Если свободное твердое тѣло подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нему силъ: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2 \ldots \overline{F}_n$ остается въ покоѣ или равновѣсіи, т. е. не измѣняетъ своего кинематическаго состоянія, то совокупность этихъ силъ необходимо должна быть системою **взаимно-уравновѣшивающихся** по отношенію къ твердому тѣлу силъ, т. е. должна приводиться къ двумъ равнымъ, прямопротивоположнымъ и дѣйствующимъ по одной прямой силамъ, для чего необходимо и достаточно, чтобы данная система силъ удовлетворяла **двумъ** условіямъ:

$$1)\ \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i = 0 \text{ и } 2)\ \overline{L}_O = \Sigma\overline{M}_O(\overline{F}_i) = 0,$$

т. е. чтобы **инваріанты** данной системы силы были бы равны нулю.

Наоборотъ, если къ покоющемуся твердому тѣлу приложить систему силъ, удовлетворяющую этимъ двумъ условіямъ, то такая система, какъ система взаимно-уравновѣшивающихся по отношенію къ твердому тѣлу силъ, не можетъ измѣнить его кинематическаго состоянія, т. е. твердое тѣло будетъ пребывать въ покоѣ, что и непосредственно очевидно, ибо въ этомъ случаѣ система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ двумъ силамъ равнымъ, прямопротивоположнымъ и дѣйствующимъ по одной прямой, а такія двѣ силы, согласно допущенію, не измѣняютъ кинематическаго состоянія твердаго тѣла.

Итакъ, *для равновѣсія* **свободнаго** *твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы система силъ, приложенныхъ къ такому тѣлу, находившемуся первоначально въ покоѣ, удовлетворяла* **двумъ** *условіямъ:*

$$1)\ \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \overline{L}_O = \Sigma \overline{M}_O\ (\overline{F}_i) = 0,$$

т. е. чтобы геометрическая сумма всѣхъ силъ этой системы и ея линейный моментъ относительно нѣкотораго центра O были равны нулю.

Замѣтивъ наконецъ, что при $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = 0$ линейный моментъ системы силъ не зависитъ отъ выбора центра. Мы приходимъ къ заключенію, что *при равновѣсіи* **свободнаго** *твердаго тѣла линейный моментъ приложенныхъ къ нему силъ относительно* **любого** *центра, а слѣдовательно и относительно* **любой** *оси равенъ нулю.*

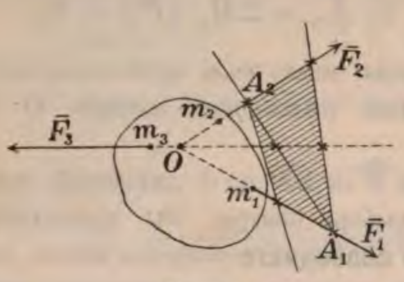
Примѣры. *1. Если* **свободное** *твердое тѣло находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ* **двухъ** *силъ, то эти силы должны быть равны, прямопротивоположны и дѣйствовать по одной прямой.*

Съ одной стороны это есть прямое слѣдствіе сдѣланнаго нами допущенія, что **двѣ** силы, приложенныя къ твердому тѣлу, тогда и только тогда не измѣняютъ его кинематическаго состоянія, когда онѣ равны, прямопротивоположны и дѣйствуютъ по одной прямой; съ другой стороны тоже самое получается изъ общихъ условій равновѣсія свободнаго твердаго тѣла; дѣйствительно, такъ какъ при равновѣсіи свободнаго твердаго тѣла геометрическія суммы приложенныхъ къ нему силъ и ихъ линейныхъ моментовъ относительно любого центра равны нулю, то въ случаѣ **двухъ** силъ, на основаніи перваго условія, онѣ должны быть равны и прямопротивоположны, на основаніи же второго условія, онѣ должны дѣйствовать по одной прямой, ибо въ противномъ случаѣ такія двѣ силы представляли бы собою нѣкоторую **пару** силъ и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ не была бы равна нулю.

2. Если **свободное** *твердое тѣло находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ* **трехъ** *непараллельныхъ силъ, то эти силы должны лежать въ* **одной** *плоскости, проходитъ черезъ* **общую** *точку и каждая изъ нихъ должна быть равна и прямопротивоположна діагонали параллелограмма, построеннаго на остальныхъ двухъ.*

Дѣйствительно, взявъ на направленіи первой силы F_1 (черт. 48) произвольную точку A_1 и проведя черезъ нее двѣ оси, проходящія черезъ вторую силу, не трудно убѣдиться, что третья сила будетъ лежать въ плоскости этихъ осей, ибо сумма моментовъ данныхъ трехъ силъ относительно **любой**

оси должна быть равна нулю, но моменты первыхъ двухъ силъ относительно указанныхъ осей очевидно равны нулю; слѣдовательно должны быть равны нулю и моменты третьей силы относительно этихъ осей, т. е. третья сила должна лежать въ одной плоскости съ проведенными осями, а слѣдовательно и со второю силою; проведя затѣмъ черезъ вторую и третью силы двѣ произвольныя оси, подобнымъ же образомъ убѣдимся, что первая сила будетъ лежать въ плоскости этихъ осей, т. е. въ одной плоскости со второю и третьею силами.



Черт. 48.

Если кромѣ того эти силы непараллельны, то двѣ изъ нихъ должны пересѣкаться въ нѣкоторой точкѣ 0, принявъ которую за центръ линейныхъ моментовъ данныхъ силъ, мы знаемъ, что геометрическая сумма этихъ линейныхъ моментовъ должна быть равна нулю, но линейные моменты двухъ пересѣкающихъ силъ относительно ихъ точки пересѣченія 0 очевидно равны нулю, слѣдовательно и линейный моментъ третьей силы относительно этой точки тоже равенъ нулю, т. е. третья сила проходитъ черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ; другими словами всѣ три силы проходятъ черезъ общую точку.

Наконецъ изъ того, что геометрическая сумма трехъ данныхъ силъ равна нулю, ясно, что каждая изъ нихъ равна и прямопротивоположна діагонали параллелограмма, построеннаго на остальныхъ двухъ, напр.

$$\bar{F}_1 = -(\bar{F}_2 + \bar{F}_3).$$

Укажемъ теперь еще нѣкоторыя другія формулировки условій равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

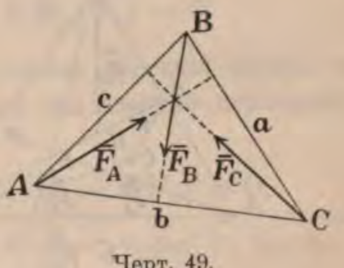
1) *Для равновѣсія* **свободнаго** *твердаго тѣла, находившагося первоначально въ покоѣ, необходимо и достаточно, чтобы линейные моменты системы приложенныхъ къ нему силъ, относительно* **трехъ**, *не лежащихъ на одной прямой,* **центровъ**, *были равны нулю.*

Дѣйствительно, если линейный моментъ системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно нѣкотораго центра равенъ нулю, а ихъ геометрическая сумма не равна нулю, то такая система силъ приводится къ одной равнодѣйствующей силѣ, равной ихъ геометрической суммѣ и проходящей черезъ этотъ центръ; такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ эта равнодѣйствующая должна

была бы пройти черезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой, но это невозможно; слѣдовательно въ данномъ случаѣ геометрическая сумма всѣхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, должна быть равна **нулю**, что въ связи съ равенствомъ нулю линейнаго момента данной системы силъ относительно одного изъ трехъ центровъ составляетъ необходимыя и достаточныя условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Эта формулировка условій равновѣсія свободнаго твердаго тѣла особенно удобна и обыкновенно примѣняется въ томъ случаѣ, когда силы, приложенныя къ твердому тѣлу, лежатъ въ одной плоскости: взявъ въ такомъ случаѣ въ этой же плоскости три не лежащихъ на одной прямой центра и условившись линейные моменты этихъ силъ, идущіе въ одну сторону, считать **положительными**, а въ другую — **отрицательными**, мы приходимъ къ заключенію, что каждый изъ этихъ линейныхъ моментовъ по величинѣ и направленію выразится взятымъ съ тѣмъ или другимъ знакомъ произведеніемъ изъ силы на ея разстояніе отъ даннаго центра, причемъ для равновѣсія твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы **алгебраическія** суммы такихъ произведеній относительно каждаго изъ **трехъ** центровъ были равны нулю.

Примѣръ. *Если къ тремъ вершинамъ A, B, C покоющагося* (черт. 49) *треугольника приложить соотвѣтственно три силы: $\overline{F}_A$, $\overline{F}_B$, $\overline{F}_C$, лежащія въ плоскости этого треугольника, перпендикулярныя и пропорціональныя противоположнымъ сторонамъ и всѣ направленныя внутрь или во внѣшнюю сторону его площади, то треугольникъ останется въ равновѣсіи.*



Черт. 49.

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ a, b, c, стороны треугольника и положивъ

$$\frac{F_A}{a} = \frac{F_B}{b} = \frac{F_C}{c} = k,$$

возьмемъ моменты этихъ силъ, относительно вершины A; въ такомъ случаѣ мы видимъ, что

$$M_A(\overline{F}_A) = 0,\ M_A(\overline{F}_B) = F_B \,.\, c \cos A = k\, bc \cos A$$

и

$$M_A(\overline{F}_C) = -F_C\, b \cos A = -k\, cb \cos A;$$

слѣдовательно:

$$L_A = M_A(\overline{F}_A) + M_A(\overline{F}_B) + M_A(\overline{F}_C) = 0$$

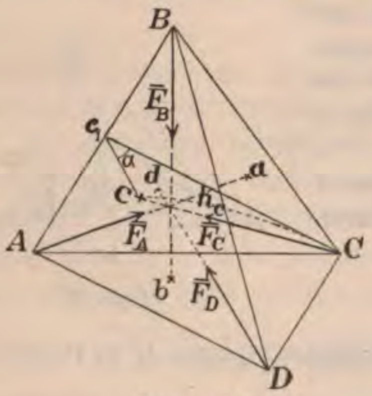
подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$L_B = 0 \text{ и } L_C = 0, \text{ ч. т. д.}$$

2) *Для равновѣсія* **свободнаго** *твердаго тѣла, находившагося первоначально въ покоѣ, необходимо и достаточно, чтобы моменты системы приложенныхъ къ нему силъ относительно* **шести** *реберъ любого тетраедра были равны нулю.*

Дѣйствительно, если моменты данной системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно трехъ выходящихъ изъ одной вершины реберъ нѣкотораго тетраедра равны нулю, то и линейный моментъ такой системы относительно этой вершины тоже будетъ равенъ нулю, ибо моментъ системы силъ относительно каждаго ребра есть проекція на это ребро линейнаго момента той же системы силъ относительно вершины, изъ которой оно выходитъ; подобнымъ же образомъ убѣдимся, что въ разсматриваемомъ случаѣ линейные моменты системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно **всѣхъ** вершинъ тетраедра равны нулю и потому твердое тѣло останется въ равновѣсіи.

Примѣръ. *Если къ четыремъ вершинамъ* (черт. 50) *покоющагося тетраедра* ($ABCD$) *приложить соотвѣтственно четыре силы:* $\overline{F}_A, \overline{F}_B, \overline{F}_C, \overline{F}_D$, *перпендикулярныя и пропорціональныя противоположнымъ гранямъ a, b, c, d, притомъ всѣ направленныя во внутреннюю или во внѣшнюю сторону его объема V, то тетраедръ останется въ равновѣсіи.*



Черт. 50.

Дѣйствительно, положивъ

$$\frac{F_A}{a} = \frac{F_B}{b} = \frac{F_C}{c} = \frac{F_D}{d} = k$$

и взявъ моменты этихъ силъ относительно ребра AB, мы видимъ, что моменты первыхъ двухъ силъ относительно этой оси равны нулю, ибо эти силы проходятъ черезъ выбранную ось, что же касается до моментовъ остальныхъ двухъ силъ относительно той же оси, то не трудно убѣдиться, что они равны

по абсолютной величинѣ, но противоположны по знакамъ. Въ самомъ дѣлѣ, (черт. 50) опустивъ изъ вершины C высоту $Cc = h_c$ на противолежащую грань c, а изъ точки c — перпендикуляръ cc_1 на ребро AB и соединивъ точку c_1 съ вершиною C, ясно, что плоскость Cc_1c будетъ перпендикулярна къ ребру AB и потому уголъ $Cc_1c = \alpha$ будетъ мѣрою двуграннаго угла ребра AB; слѣдовательно:

$$M_{AB}(\overline{F}_C) = F_C \cdot cc_1 = k \cdot c \cdot h_c \operatorname{cotg} \alpha = 3kV \operatorname{cotg} \alpha,$$

гдѣ черезъ V мы обозначили объемъ тетраедра; подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$M_{AB}(\overline{F}_D) = -3kV \operatorname{cotg} \alpha;$$

и потому

$$L_{AB} = \Sigma M_{AB}(\overline{F}_{A,B,C,D}) = 0.$$

Такія же равенства, очевидно, справедливы и по отношенію къ остальнымъ ребрамъ тетраедра; слѣдовательно тетраедръ останется въ равновѣсіи.

§ 2. Уравненія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

Обозначивъ черезъ (X_i, Y_i, Z_i) проекціи одной изъ силъ $\overline{F}_i$, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, а черезъ (x_i, y_i, z_i) — координаты ея точки приложенія относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей координатъ (O, X, Y, Z), мы знаемъ, что два условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла, подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нему n силъ:

$$1)\ \Sigma \overline{F}_i = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \overline{L}_0 = \Sigma \overline{M}_0(\overline{F}_i) = 0$$

аналитически равносильны шести равенствамъ проекцій обѣихъ частей этихъ геометрическихъ равенствъ на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ, а именно:

$$1) \begin{cases} \Sigma X_i = 0, \\ \Sigma Y_i = 0, \\ \Sigma Z_i = 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \\ \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) = 0, \end{cases}$$

изъ которыхъ первыя три выражаютъ **первое условіе** равновѣсія свободнаго твердаго тѣла, а вторыя три — **второе**.

Эти шесть равенствъ называются **уравненіями равновѣсія** свободнаго твердаго тѣла.

Итакъ **аналитически** *для равновѣсія* **свободнаго** *твердаго тѣла, находившагося первоначально въ покоѣ и подвергнутаго дѣйствію n силъ, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекцій всѣхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ были соотвѣтственно равны нулю и чтобы суммы моментовъ этихъ силъ относительно тѣхъ же осей были тоже соотвѣтственно равны нулю.*

§ 3. Условія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла.

Твердое тѣло называется **несвободнымъ**, когда его перемѣщенія ограничены нѣкоторыми условіями; напр., твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку, неподвижную ось, должно перемѣщаться параллельно неподвижной плоскости и т. д.

Черт. 51.

Если **несвободное** твердое тѣло (черт. 51) находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ данной системы силъ:

$$\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,\ \ldots\ \bar{F}_n,$$

два инваріанта которой суть соотвѣтственно:

$$\Sigma \bar{F}_i = \bar{F} \text{ и } \Sigma \bar{M}_0(\bar{F}_i) = \bar{L}_0,$$

то всегда можно подобрать такую новую систему силъ $\bar{R}_k$, что твердое тѣло подъ совмѣстнымъ дѣйствіемъ этихъ двухъ системъ силъ, останется въ равновѣсіи будучи **свободнымъ**, для чего необходимо и достаточно, какъ мы знаемъ, чтобы геометрическая сумма $\bar{R} = \Sigma \bar{R}_k$ силъ второй системы и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ $\bar{S}_0 = \Sigma \bar{M}_0(\bar{R}_k)$ относительно того же центра 0 удовлетворяли геометрическимъ равенствамъ:

$$\bar{F} + \bar{R} = 0 \text{ и } \bar{L}_0 + \bar{S}_0 = 0,$$

выражающимъ, какъ извѣстно, условія равновѣсія **свободнаго** твердаго тѣла, находившагося первоначально въ покоѣ и подвергнутаго **совмѣстному** дѣйствію системъ силъ:

$$\bar{F}_i \text{ и } \bar{R}_k.$$

Такія силы $\overline{R}_k$, замѣняющія собою присутствіе преградъ, называются **реакціями** этихъ послѣднихъ.

Итакъ, *на равновѣсіе всякаго* **несвободнаго** *твердаго тѣла можно смотрѣть, какъ на равновѣсіе* **свободнаго** *твердаго тѣла, если къ дѣйствующимъ на твердое тѣло* **активнымъ** *силамъ присоединить еще нѣкоторыя* **пассивныя** *силы, называемыя* **реакціями преградъ**, *замѣняющія собою присутствіе этихъ послѣднихъ и удовлетворяющія равенствамъ:*

$$\overline{R} = -\overline{F} = -\Sigma\overline{F}_i \text{ и } \overline{S}_0 = -\overline{L}_0 = -\Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i),$$

изъ которыхъ видно, что по заданнымъ **активнымъ** силамъ, приложеннымъ къ твердому тѣлу, опредѣляются вообще **не сами** реакціи преградъ, или **пассивныя** силы, а лишь ихъ геометрическая сумма $\overline{R} = \Sigma\overline{R}_k$ и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ $\overline{S}_0 = \Sigma\overline{M}_0(\overline{R}_k)$, что и само собою понятно, ибо всѣ такія системы реакцій, или пассивныхъ силъ, **эквивалентны** по отношенію къ твердому тѣлу.

Но, по началу *равенства дѣйствія и противодѣйствія*, если преграда дѣйствуетъ на твердое тѣло въ нѣкоторой его точкѣ съ силою $\overline{R}_k$, то твердое тѣло будетъ въ свою очередь дѣйствовать на преграду въ той же точкѣ съ силою $-\overline{R}_k$, называемою **давленіемъ** твердаго тѣла на преграду; поэтому геометрическая сумма всѣхъ давленій несвободнаго твердаго тѣла на преграды и геометрическая сумма линейныхъ моментовъ этихъ давленій, относительно нѣкотораго центра O, опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\Sigma(-\overline{R}_k) = -\Sigma\overline{R}_k = -\overline{R} = \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i,$$

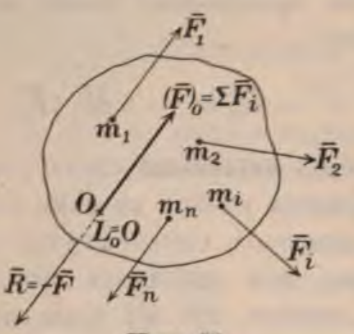
$$\Sigma\overline{M}_0(-\overline{R}_k) = -\Sigma\overline{M}_0(\overline{R}_k) = -\overline{S}_0 = \overline{L}_0 = \Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i),$$

т. е. *геометрическая сумма* **давленій** *покоющагося твердаго тѣла на преграды и геометрическая сумма линейныхъ моментовъ этихъ давленій относительно нѣкотораго центра O соотвѣтственно геометрически равны: геометрической суммѣ* $\Sigma\overline{F}_i = \overline{F}$ *всѣхъ* **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и линейному моменту* $\overline{L}_0 = \Sigma\overline{M}_0(F_i)$ *этой системы силъ относительно того же центра O.*

Примѣры: *1) Найти условія равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго* **идеальную неподвижную** *точку и подверженнаго дѣйствію системы n силъ:*

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2 \ldots \overline{F}_n.$$

Подъ **идеальною** неподвижною точкою твердаго тѣла мы подразумѣваемъ такую его точку, которая остается неподвижною, каковы бы ни были активныя, силы приложенныя къ твердому тѣлу, причемъ реакціи идеальной неподвижной точки приводятся къ силѣ, приложенной къ твердому тѣлу въ **этой** точкѣ.



Черт. 52.

Присоединивъ къ дѣйствующимъ на твердое тѣло активнымъ силамъ еще силу реакціи $\overline{R}$ идеальной неподвижной точки O (черт. 52), замѣняющую присутствіе этой послѣдней, мы можемъ смотрѣть на твердое тѣло, какъ на **свободное**, а въ такомъ случаѣ для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы эти силы удовлетворяли двумъ условіямъ:

$$1)\ \Sigma\overline{F}_i + \overline{R} = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i) + \overline{M}_0(\overline{R}) = 0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ опредѣляетъ величину и направленіе реакціи идеальной неподвижной точки O:

$$\overline{R} = -\Sigma\overline{F}_i = -\overline{F},$$

а второе обращается въ

$$\Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i) = 0, \text{ ибо } \overline{M}_0(\overline{R}) = 0$$

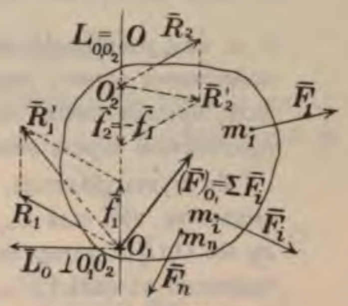
и выражаетъ условіе, которому должны удовлетворять силы, приложенныя къ покоющемуся твердому тѣлу, имѣющему идеальную неподвижную точку O, чтобы оно оставалось въ равновѣсіи, а именно: *для равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго* **идеальную** *неподвижную точку O и находившагося первоначально въ покоѣ, необходимо, чтобы линейный моментъ* $\overline{L}_0 = \Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i)$ *системы приложенныхъ къ нему* **активныхъ** *силъ относительно этой точки O былъ равенъ нулю, причемъ* **давленіе** — $\overline{R} = \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$ *твердаго тѣла на неподвижную точку равно геометрической суммѣ всѣхъ приложенныхъ къ нему* **активныхъ** *силъ.*

Не трудно убѣдиться, что послѣднее условіе не только необходимо, но и достаточно, ибо при $\overline{L}_0 = \Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i) = 0$ система силъ, приложенныхъ къ

твердому тѣлу, приводится къ одной **равнодѣйствующей** силѣ $(\overline{F})_0 = \Sigma \overline{F}_i$, приложенной къ неподвижной точкѣ O и уравновѣшивающейся реакціей этой послѣдней.

2) *Найти условія равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго* **двѣ идеальныхъ** *неподвижныхъ точки и подверженнаго дѣйствію системы n силъ:*

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2 \, . \; . \; . \, \overline{F}_n \, .$$



Черт. 53.

Присоединивъ къ дѣйствующимъ на твердое тѣло активнымъ силамъ, (черт. 53) еще реакціи $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ неподвижныхъ точекъ O_1, O_2, замѣняющія присутствіе этихъ послѣднихъ, мы можемъ смотрѣть на твердое тѣло, какъ на **свободное**, а въ такомъ случаѣ для его равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы эти силы удовлетворяли двумъ условіямъ:

$$1) \; \Sigma \overline{F}_i + \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = 0$$

и

$$2) \; \Sigma \overline{M}_0 (\overline{F}_i) + \overline{M}_0 \; (\overline{R}_1) + \overline{M}_0 \; (\overline{R}_2) = 0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ опредѣляетъ геометрическую сумму реакцій неподвижныхъ точекъ:

$$\overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = - \Sigma \overline{F}_i = - \overline{F},$$

а второе — геометрическую сумму линейныхъ моментовъ этихъ реакцій относительно центра O:

$$\overline{S}_0 = \overline{M}_0 \; (\overline{R}_1) + \overline{M}_0 \, (\overline{R}_2) = - \Sigma \overline{M}_0 \; (\overline{F}_i) = - \overline{L}_0,$$

причемъ сами реакціи $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, а слѣдовательно и давленія $-\overline{R}_1$, $-\overline{R}_2$ твердаго тѣла на неподвижныя точки остаются **неопредѣленными**, что и и непосредственно очевидно, ибо къ покоющемуся твердому тѣлу безъ нарушенія его равновѣсія можно приложить въ точкахъ O_1, O_2 двѣ равныя и прямопротивоположныя силы $\overline{f}_1$ и $\overline{f}_2 = -\overline{f}_1$, дѣйствующія по прямой O_1O_2, соединивъ которыя соотвѣтственно съ реакціями $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, мы получимъ новую совокупность реакцій (черт. 53):

$$\overline{R}_1{}' = \overline{R}_1 + \overline{f}_1 \text{ и } \overline{R}_2{}' = \overline{R}_2 + \overline{f}_2.$$

Припомнивъ наконецъ, что при равновѣсіи свободнаго твердаго тѣла моментъ системы приложенныхъ къ нему силъ относительно **любой** оси равенъ нулю, примемъ за ось моментовъ прямую, соединяющую неподвижныя точки

O_1, O_2; въ такомъ случаѣ моменты силъ реакцій $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ относительно этой оси будутъ очевидно равны нулю, и мы придемъ къ равенству:

$$L_{O_1O_2} = \Sigma M_{O_1O_2}(\overline{F}_i) = 0;$$

т. е. *для равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго двѣ* **идеальныя** *неподвижныя точки, необходимо, чтобы моментъ системы* **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ такому твердому тѣлу, относительно оси проходящей черезъ эти точки былъ равенъ нулю.*

Не трудно убѣдиться, что послѣднее условіе не только необходимо, но и достаточно, ибо, если $L_{O_1O_2} = 0$, то $\overline{L}_{O_1} = \Sigma\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_i)$ перпендикуляренъ къ оси O_1O_2 и система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть приведена къ **силѣ** $(\overline{F})_{O_1} = \Sigma\overline{F}_i$, приложенной къ точкѣ O_1, и къ **парѣ** силъ, приложенныхъ въ точкахъ O_1, O_2, линейный моментъ которой $\overline{L} = \overline{L}_{O_1}$, т. е. къ парѣ силъ, численно равныхъ $\frac{L_{O_1}}{O_1O_2}$, лежащихъ въ плоскости перпендикулярной къ $\overline{L}_{O_1}$ и имѣющихъ плечомъ отрѣзокъ O_1O_2; слѣдовательно данная система силъ приведется къ **двумъ** силамъ, приложеннымъ къ твердому тѣлу въ двухъ его неподвижныхъ точкахъ O_1, O_2, каковыя силы уравновѣсятся реакціями этихъ точекъ.

3) *Если твердое тѣло имѣетъ* **три** *или большее число* **идеальныхъ** *неподвижныхъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, то оно очевидно останется въ равновѣсіи, каковы бы ни были приложенныя къ нему силы* $\overline{F}_i$, *причемъ реакціи* $\overline{R}_k$ *этихъ точекъ, удовлетворяя равенствамъ:*

$$\Sigma\overline{F}_i + \Sigma\overline{R}_k = 0$$

и

$$\Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_i) + \Sigma\overline{M}_0(\overline{R}_k) = 0,$$

остаются **неопредѣленными.**

4) *Найти условія равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго* **идеальную** *неподвижную ось* **вращенія** *и* **скольженія** *OZ и подверженнаго дѣйствію системы n силъ:* $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$.

Подъ **идеальною** неподвижною осью вращенія и скольженія твердаго тѣла мы подразумѣваемъ такую прямую, вокругъ которой твердое тѣло можетъ вращаться и вдоль которой оно можетъ скользить, причемъ эта прямая остается неподвижною, каковы бы ни были силы, приложенныя къ твердому тѣлу, и можетъ оказывать лишь нормальныя къ ней реакціи, приложенныя къ твердому тѣлу въ точкахъ этой прямой.

Такъ какъ геометрическая сумма всѣхъ реакцій $\overline{R} = \Sigma\overline{R}_k$ такой оси OZ (черт. 54) очевидно будетъ перпендикулярна къ этой оси и сумма мо-

ментовъ этихъ реакцій относительно самой оси OZ равна нулю, то для равновѣсія твердаго тѣла необходимо, чтобы геометрическая сумма $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ была нормальна къ оси и чтобы моментъ этой системы силъ относительно оси OZ былъ равенъ нулю, т. е.

$$F_z = \Sigma F_{i,z} = 0 \text{ и } L_{0Z} = \Sigma M_{0Z}(\overline{F}_i) = 0.$$

Не трудно убѣдиться, что эти условія достаточны, ибо взявъ на оси OZ произвольную точку A, мы знаемъ, что $L_{AZ} = L_{A,Z} = 0$; слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ линейный моментъ $\overline{L}_A$ системы силъ относительно одной изъ точекъ A оси OZ перпендикуляренъ къ оси; и потому система силъ можетъ быть приведена къ **силѣ** $(\overline{F})_A = \Sigma \overline{F}_i$, приложенной къ тѣлу въ этой точкѣ A и, по условію, перпендикулярной къ оси OZ и къ **парѣ** силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу въ двухъ точкахъ той же оси и перпендикулярныхъ къ ней, такъ какъ линейный моментъ $\overline{L}_A$ этой пары силъ перпендикуляренъ къ оси OZ, каковыя три силы, будучи перпендикулярны къ оси, уравновѣсятся ея реакціями.

Черт. 54.

5) *Найти условіе равновѣсія твердаго тѣла, опирающагося одною точкою на* **идеально** *гладкую поверхность и подверженнаго дѣйствію системы n силъ:* $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$.

Такъ какъ реакція идеально гладкой поверхности нормальна къ ней и приложена къ твердому тѣлу въ точкѣ соприкосновенія A, то для равновѣсія такого твердаго тѣла система приложенныхъ къ нему силъ должна приводиться къ одной **равнодѣйствующей** силѣ, проходящей черезъ точку соприкосновенія A и нормальной къ поверхности въ этой точкѣ, притомъ направленной по **внутренней** нормали.

6) *Если* **тяжелое** *твердое тѣло опирается* **многими** *точками на* **идеально** *гладкую, горизонтальную плоскость, то для его равновѣсія необходимо, чтобы перпендикуляръ опущенный изъ его центра тяжести на плоскость опоръ проходилъ черезъ точку, лежащую внутри выпуклаго, замкнутаго многоугольника, имѣющаго своими вершинами крайніе опорные пункты и заключающаго въ себѣ всѣ остальные.*

Дѣйствительно, такъ какъ въ этомъ случаѣ активныя силы, приложенныя къ твердому тѣлу, приводятся къ одной равнодѣйствующей: вѣсу $\overline{P}$ твердаго тѣла, приложенному къ его центру тяжести, то при равновѣсіи такого твердаго тѣла равнодѣйствующая $\overline{R} = \Sigma \overline{R}_k$ реакцій всѣхъ опорныхъ

пунктовъ необходимо должна пройти черезъ центръ тяжести твердаго тѣла, но $\overline{R}$, какъ равнодѣйствующая системы параллельныхъ и одинаково направленныхъ силъ, перпендикулярныхъ къ опорной плоскости, проходитъ черезъ центръ этой системы силъ, т. е. черезъ точку c, координаты которой (x_c, y_c) относительно двухъ прямоугольныхъ осей координатъ $(O;\ X, Y)$, лежащихъ въ плоскости опоръ, опредѣляются изъ равенствъ:

$$x_c = \frac{\Sigma x_k R_k}{\Sigma R_k} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{\Sigma y_k R_k}{\Sigma R_k},$$

изъ которыхъ ясно, что

$$x_c \begin{matrix} > x_k,\ min. \\ < x_k.\ max. \end{matrix} \quad \text{и} \quad y_c \begin{matrix} > y_k,\ min. \\ < y_k,\ max. \end{matrix}$$

такъ какъ всѣ $R_k > 0$; слѣдовательно точка c необходимо должна лежать внутри указаннаго контура; и такъ какъ $\overline{R} = \Sigma \overline{R}_k$ перпендикулярна къ опорной плоскости, то перпендикуляръ опущенный изъ центра тяжести на эту плоскость, совпадая съ $\overline{R}$, будетъ пересѣкать ее внутри указаннаго контура.

Примѣчаніе. При равновѣсіи физическихъ тѣлъ неопредѣленности пассивныхъ силъ или силъ реакцій не существуетъ, ибо въ природѣ нѣтъ абсолютно твердыхъ тѣлъ: всѣ тѣла подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ деформируются, причемъ *каждой деформаціи* физическаго *тѣла соотвѣтствуетъ* **опредѣленная** *система приложенныхъ къ нему силъ и наоборотъ.*

§ 4. Уравненія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла.

Мы знаемъ, что каждое геометрическое равенство равносильно тремъ равенствамъ проекцій обѣихъ его частей на три взаимноперпендикулярныя оси координатъ; слѣдовательно два условія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла:

$$1)\ \Sigma \overline{F}_i + \Sigma \overline{R}_k = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \Sigma \overline{M}_0\ (\overline{F}_i) + \Sigma \overline{M}_0\ (\overline{R}_k) = 0$$

равносильны шести равенствамъ проекцій обѣихъ частей этихъ геометрическихъ равенствъ на три взаимноперпендикулярныя оси координатъ $(O;\ X, Y, Z)$:

$$\begin{cases} \Sigma X_i + \Sigma R_{k,x} = 0, \\ \Sigma Y_i + \Sigma R_{k,y} = 0, \\ \Sigma Z_i + \Sigma R_{k,z} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) + \Sigma(y_k R_{k,z} - z_k R_{k,y}) = 0, \\ \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) + \Sigma(z_k R_{k,x} - x_k R_{k,z}) = 0, \\ \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma(x_k R_{k,y} - y_k R_{k,x}) = 0, \end{cases}$$

въ которыхъ (x_i, y_i, z_i); (X_i, Y_i, Z_i) обозначаютъ соотвѣтственно координаты точки приложенія и проекціи на осяхъ $(O; X, Y, Z)$ **активной** силы $\overline{F}_i$, а (x_k, y_k, z_k), $(R_{k,x}, R_{k,y}, R_{k,z})$ — координаты точки приложенія и проекціи на тѣхъ же осяхъ **пассивной** силы или реакціи $\overline{R}_k$.

Эти шесть уравненій называются *уравненіями равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла*, изъ нихъ вообще могутъ быть опредѣлены не сами реакціи $\overline{R}_k$ и ихъ точки приложенія, а лишь геометрическая сумма этихъ реакцій и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ относительно начала координатъ:

$$\overline{R} = \Sigma \overline{R}_i \text{ и } \overline{S}_0 = \Sigma \overline{M}_0 (\overline{F}_i);$$

дѣйствительно, обозначивъ для краткости черезъ X, Y, Z; L_{OX}, L_{OY}, L_{OZ} соотвѣтственно проекціи на осяхъ $(O; X, Y, Z)$ геометрической суммы всѣхъ активныхъ силъ $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$, приложенныхъ къ твердому тѣлу и моменты этой системы силы относительно тѣхъ же осей, а черезъ R_x, R_y, R_z; S_{OX}, S_{OY}, S_{OZ} проекціи на тѣхъ же осяхъ геометрической суммы $\overline{R} = \Sigma \overline{R}_i$ всѣхъ реакцій и геометрической суммы $\overline{S}_0 = \Sigma \overline{M}_0 (\overline{R}_k)$ ихъ линейныхъ моментовъ, относительно начала координатъ, вышеприведенныя уравненія равновѣсія несвободнаго твердаго тѣла можно написать подъ видомъ:

$$\begin{cases} X + R_x = 0; \\ Y + R_y = 0, \\ Z + R_z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_{OX} + S_{OX} = 0, \\ L_{OY} + S_{OY} = 0, \\ L_{OZ} + S_{OZ} = 0; \end{cases}$$

слѣдовательно

$$R_x = -X,\ R_y = -Y,\ R_z = -Z$$

$$S_{OX} = -L_{OX},\ S_{OY} = -L_{OY},\ S_{OZ} = -L_{OZ}$$

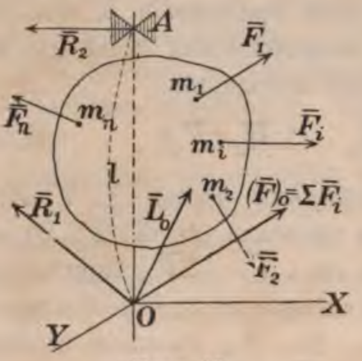
Наконецъ геометрическая сумма **давленій** твердаго тѣла на опоры и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ относительно начала координатъ, какъ силъ, равныхъ и прямопротивоположныхъ

реакціямъ $\overline{R}_i$, опредѣлятся изъ очевидныхъ равенствъ:

$$-R_x = X,\ -R_y = Y,\ -R_z = Z,$$
$$-S_{OX} = L_{OX},\ -S_{OY} = L_{OY},\ -S_{OZ} = L_{OZ}.$$

Впрочемъ иногда при нѣкоторыхъ **добавочныхъ** условіяхъ относительно силъ реакціи указанныя шесть уравненій несвободнаго твердаго тѣла **вполнѣ** опредѣляютъ реакціи преградъ.

Примѣръ. *Найти условіе равновѣсія и давленія на опоры твердаго тѣла, имѣющаго неизмѣнно съ нимъ связанную ось, проходящую черезъ* **идеально** *гладкое неподвижное кольцо и обладающую* **идеальною** *неподвижною точкою O, если къ твердому тѣлу приложена система n силъ:* $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *и* $\overline{L}_0 = \Sigma \overline{M}_0 (F_i)$.



Черт. 55.

Обозначивъ (черт. 55) черезъ $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ соотвѣтственно реакціи идеальной неподвижной точки O и кольца A, допустимъ, что **идеальное гладкое** кольцо можетъ оказывать лишь **нормальную** къ оси реакцію; въ такомъ случаѣ, принявъ ось OA за ось OZ прямоугольной системы координатъ (O; X, Y, Z); и обозначивъ черезъ l разстояніе между точкою O и кольцомъ A, нетрудно убѣдиться, что уравненія равновѣсія такого несвободнаго твердаго тѣла напишутся подъ видомъ:

$$X + R_{1,x} + R_{2,x} = 0,\quad L_{OX} - R_{2,y}\, l = 0,$$
$$Y + R_{1,y} + R_{2,y} = 0,\quad L_{OY} + R_{2,x}\, l = 0,$$
$$Z + R_{1,z} = 0,\qquad L_{OZ} = 0,$$

ибо по условію $R_{2,z} = 0$ и $z_2 = l$.

Послѣднее равенство, не заключающее реакцій, выражаетъ необходимое и достаточное условіе, которому должны удовлетворять активныя силы, приложенныя къ такому несвободному твердому тѣлу, чтобы оно оставалось въ равновѣсіи, а именно: $L_{OZ} = 0$, т. е. моментъ системы активныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно оси долженъ быть равенъ нулю, что и непосредственно очевидно, ибо въ данномъ случаѣ твердое тѣло можно разсматривать, какъ имѣющее двѣ **идеальныхъ** неподвижныхъ точки: O и A.

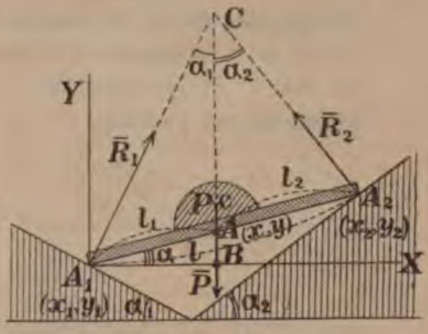
Изъ остальныхъ пяти равенствъ, принявъ во вниманіе, что по условію $R_{2,z} = 0$, мы опредѣлимъ $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$, а слѣдовательно и давленія: $-\overline{R}_1$ и $-\overline{R}_2$ твердаго тѣла на неподвижную точку O и на кольцо A.

Если всѣ активныя силы и реакціи преградъ, приложенныя къ твердому тѣлу, лежатъ въ **одной плоскости** и эту плоскость принять за плоскость координатныхъ осей $(O;\ X,\ Y)$, то три изъ шести общихъ уравненій несвободнаго твердаго тѣла обращаются въ тождества и остаются лишь три уравненія:

$$\begin{cases} \Sigma X_i + \Sigma R_{k,x} = 0, \\ \Sigma Y_i + \Sigma R_{k,y} = 0, \\ \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) + \Sigma(x_k R_{k,y} - y_k R_{k,x}) = 0. \end{cases}$$

Примѣръ. *Найти положеніе равновѣсія и давленія на опоры невѣсомаго стержня, положеннаго между двумя идеально гладкими плоскостями, составляющими съ горизонтомъ соотвѣтственно углы:* α_1, α_2, *если на стержень дѣйствуетъ нѣкоторый грузъ* P.

Обозначивъ (черт. 56) черезъ $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ соотвѣтственно реакціи плоскостей, черезъ α уголъ наклоненія стержня l къ горизонту и черезъ l_1, l_2 разстоянія отъ концовъ стержня точки пересѣченія A вѣса $\overline{P}$ съ прямой $A_1 A_2$, мы знаемъ, что вѣсъ $\overline{P}$ и реакціи $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, перпендикулярныя къ соотвѣтственнымъ опорнымъ плоскостямъ, должны лежать въ одной вертикальной плоскости и пересѣкаться въ общей точкѣ C.



Черт. 56.

Примемъ опорный пунктъ A_1 за начало прямоугольной системы координатъ $(A_1;\ X,\ Y)$, въ которой ось A_1X горизонтальна и лежитъ въ плоскости силъ, а ось A_1Y вертикальна и направлена вверхъ; въ такомъ случаѣ, обозначивъ соотвѣтственно черезъ (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) координаты точекъ A, A_1, A_2, изъ черт. (56) нетрудно убѣдиться, что

$$x = l_1 \cos\alpha,\ y = l_1 \sin\alpha;\ x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = l\cos\alpha,\ y_2 = l\sin\alpha,$$

гдѣ

$$l = l_1 + l_2;$$

кромѣ того проекціи на тѣ же оси вѣса $\overline{P}$ и реакцій $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ опредѣлятся изъ равенствъ:

$$X = O, \quad R_{1,x} = R_1 \sin\alpha_1, \; R_{2,x} = - R_2 \sin\alpha_2$$
$$Y = - P, \; R_{1,y} = R_1 \cos\alpha_1, \; R_{2,y} = R_2 \cos\alpha_2.$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненія равновѣсія твердаго тѣла, мы получимъ три уравненія для трехъ неизвѣстныхъ: R_1, R_2 и α:

$$R_1 \sin\alpha_1 - R_2 \sin\alpha_2 = 0,$$
$$R_1 \cos\alpha_1 + R_2 \cos\alpha_2 - P = 0,$$
$$- Pl_1 \cos\alpha + l\cos\alpha \, R_2 \cos\alpha_2 + l\sin\alpha \, R_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

изъ которыхъ найдемъ:

$$R_1 = P\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \qquad R_2 = P\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$
$$tg\,\alpha = \frac{l_1 \cot g\,\alpha_1 - l_2 \cot g\,\alpha_2}{l_1 + l_2}.$$

Впрочемъ, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ всѣ силы лежатъ въ *одной* плоскости, то ту же задачу можно рѣшить, приравнявъ нулю суммы моментовъ всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ стержню, относительно трехъ, не лежащихъ на одной прямой точекъ; напр. относительно двухъ опорныхъ пунктовъ A_1, A_2 и точки пересѣченія B направленія вѣса $\overline{P}$ съ горизонталью A_1X; въ такомъ случаѣ мы получимъ соотвѣтственно три уравненія:

$$- R_2 l\cos(\alpha_2 - \alpha) + Pl_1 \cos\alpha = 0,$$
$$R_1 l\cos(\alpha + \alpha_1) - Pl_2 \cos\alpha = 0,$$
$$R_1 \sin\alpha_1 - R_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

изъ которыхъ опредѣлятся выше приведенныя величины: R_1, R_2 и α.

Если мы имѣемъ не нагруженный, тяжелый, однородный стержень, то въ найденныхъ формулахъ надо положить $l_1 = l_2$; если наконецъ на тяжелый стержень дѣйствуетъ нѣкоторый грузъ, то соединивъ вѣса стержня и груза въ одну равнодѣйствующую $\overline{P}$, мы можемъ смотрѣть на стержень, какъ на невѣсомый и пользоваться найденными формулами.

III. Равновѣсіе системъ матеріальныхъ точекъ и твердыхъ тѣлъ.

§ 1. Общее необходимое условіе равновѣсія всякой свободной системы матеріальныхъ точекъ или принципъ отвердѣнія.

Систему м. точекъ, какъ угодно связанныхъ **между собою**, но не связанныхъ съ **внѣшними** точками или **внѣшними** преградами, мы будемъ называть **свободною** системою м. точекъ.

Примѣръ. Свободное твердое тѣло есть **свободная, неизмѣняемая** система м. точекъ.

Введя это понятіе, можно установить слѣдующее общее положеніе.

Если нѣкоторая **свободная** *система м. точекъ, какимъ бы то ни было образомъ между собою связанныхъ, находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ* **активныхъ** *силъ:*

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots . \overline{F}_n;$$

то эти силы **необходимо** *должны удовлетворять* **двумъ** *условіямъ:*

$$1) \ \Sigma \overline{F}_i = 0 \ \text{и} \ 2) \ \Sigma \overline{M}_0 (\overline{F}_i) = 0,$$

т. е. геометрическая сумма всѣхъ **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ* **свободной** *покоющейся системѣ и геометрическая сумма линейныхъ моментовъ этихъ силъ относительно нѣкотораго центра О необходимо должны быть равны нулю.*

Дѣйствительно, для **свободной, неизмѣняемой** системы м. точекъ или для **свободнаго твердаго** тѣла, какъ мы видѣли эти два условія равновѣсія не только необходимы но и достаточны, если твердое тѣло предварительно находилось въ покоѣ.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ не свободное твердое тѣло, а вообще нѣкоторую свободную систему м. точекъ, какъ нибудь между собою связанныхъ, причемъ эта система находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ активныхъ силъ:

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2 \ldots . \overline{F}_n;$$

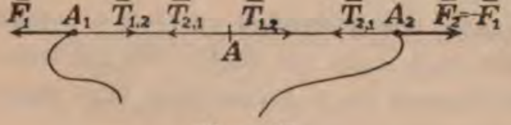
равновѣсіе такой системы очевидно не нарушится, если мы введемъ новыя связи, дѣлающія эту систему **неизмѣняемою;** а въ такомъ случаѣ, какъ мы замѣтили, активныя силы необходимо должны удовлетворять указаннымъ двумъ условіямъ; слѣдовательно указанныя **два** условія **необходимы** для равновѣсія **всякой свободной** системы м. точекъ, подверженныхъ дѣйствію любыхъ активныхъ силъ, хотя вообще они недостаточны.

Эту основную теорему статики измѣняемыхъ системъ называютъ еще **принципомъ отвердѣнія** *(principe de solidification)*.

Указанныя **два** условія равновѣсія всякой **свободной** системы матеріальныхъ точекъ, какъ мы сказали, будучи **необходимы,** вообще — **недостаточны;** однако можно указать такія системы, для равновѣсія которыхъ даже одно первое условіе является не только необходимымъ но и достаточнымъ.

§ 2. Равновѣсіе веревочнаго многоугольника.

Свободною, идеально гибкою, нерастяжимою, матеріальною нитью называется система м. точекъ, расположенныхъ по нѣкоторой линіи, которая можетъ принимать всевозможныя положенія и формы безъ измѣненія длинъ между любыми ея точками; кромѣ того отрѣзки такой нити не могутъ оказывать реакцій силамъ, стремящимся сблизить ихъ концы, подъ дѣйствіемъ же двухъ равныхъ и прямопротивоположныхъ силъ, направленныхъ по одной прямой, обращаются въ отрѣзки прямыхъ, совпадающихъ съ общимъ направленіемъ приложенныхъ къ ихъ концамъ силъ, причемъ длины отрѣзковъ остаются постоянными, какъ бы ни были велики приложенныя силы.



Черт. 57.

Если отрѣзокъ A_1A_2 (черт. 57) идеально гибкой, нерастяжимой нити находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, приложенныхъ къ его концамъ, то по *«принципу отвердѣнія»* эти силы необходимо должны быть равны, прямопротивоположны и дѣйствовать по одной прямой; кромѣ того онѣ должны быть направлены по продолженіямъ этого отрѣзка, ибо по опредѣленію

идеально гибкая, нерастяжимая нить не можетъ оказывать реакцій силамъ, стремящимся сблизить ея концы.

Представимъ теперь, что такой отрѣзокъ A_1A_2 идеально гибкой, нерастяжимой нити пересѣченъ въ нѣкоторой точкѣ A; въ такомъ случаѣ въ точкѣ сѣченія къ концамъ новыхъ двухъ отрѣзковъ для ихъ равновѣсія по «*принципу отвердѣнія*» придется приложить двѣ силы равныя и прямопротивоположныя силамъ, приложеннымъ къ концамъ даннаго отрѣзка. Такія силы, одинаковыя для всѣхъ сѣченій даннаго отрѣзка, называются **натяженіемъ** (*tension*) этого отрѣзка нити.

Такимъ образомъ въ каждой точкѣ A разсматриваемаго отрѣзка нити дѣйствуютъ два равныхъ и прямопротивоположныхъ натяженія $\overline{T}_{1,2}$ и $\overline{T}_{2,1}$; первое изъ нихъ совпадаетъ съ направленіемъ $\overline{A_1A_2}$, оно дѣйствуетъ въ точкѣ A на отрѣзокъ A_1A, а второе совпадаетъ съ направленіемъ A_2A_1, оно дѣйствуетъ въ точкѣ A на отрѣзокъ A_2A, причемъ то и другое по величинѣ равны силамъ: $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2 = -\overline{F}_1$, приложеннымъ къ концамъ даннаго отрѣзка.

Положимъ теперь (черт. 58), что къ идеально гибкой, нерастяжимой нити въ ея концахъ A_1, A_n и въ промежуточныхъ точкахъ: A_2, A_3 .... A_{n-1} приложены соотвѣтственно силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ ... $\overline{F}_n$; спрашивается, какимъ условіямъ должны удовлетворять эти силы, чтобы нить оставалась въ равновѣсіи и каковъ будетъ видъ этой нити или **веревочнаго многоугольника** въ положеніи равновѣсія.

Хотя для равновѣсія всякой системы м. точекъ необходимо, чтобы активныя силы, приложенныя къ этимъ точкамъ, удовлетворяли **двумъ** условіямъ:

$$1)\ \Sigma \overline{F}_i = 0 \ \text{ и } \ 2)\ \Sigma \overline{M}_0 (\overline{F}_i) = 0,$$

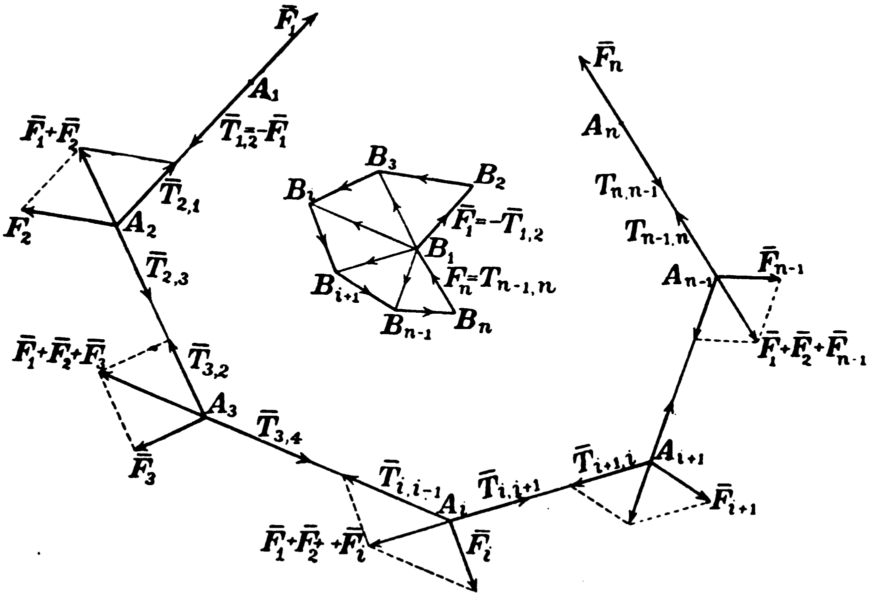
но не трудно убѣдиться, что въ разсматриваемомъ случаѣ **первое** условіе является не только **необходимымъ** но и **достаточнымъ** для равновѣсія, т. е. въ данномъ случаѣ второе условіе будетъ слѣдствіемъ перваго, пользуясь которымъ, можно опредѣлить, какъ фигуру равновѣсія веревочнаго многоугольника, такъ и натяженія всѣхъ его частей.

Дѣйствительно, если къ свободному концу A_1 идеально гибкой, нерастяжимой нити приложена активная сила $\overline{F}_1$, то, чтобы точка A_1 оставалась въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы на

нее со стороны нити дѣйствовало натяженіе $\overline{T}_{1,2} = -\overline{F}_1$; слѣдовательно первый отрѣзокъ нити A_1A_2 пойдетъ прямо-противоположно направленію силы $\overline{F}_1$ и натяженіе его будетъ:

$$T_{1,2} = T_{2,1} = F_1.$$

Точка A_2 должна находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ при-



Черт. 58.

ложенной къ ней активной $\overline{F}_2$ и натяженій $\overline{T}_{2,1}$ и $\overline{T}_{2,3}$, для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{F}_2 + \overline{T}_{2,1} + \overline{T}_{2,3} = 0,$$

т. е.

$$\overline{T}_{2,3} = -\overline{F}_2 - \overline{T}_{2,1} = -(\overline{F}_1 + \overline{F}_2);$$

слѣдовательно отрѣзокъ A_2A_3 пойдетъ противоположно геометрической суммѣ $\overline{F}_1 + \overline{F}_2$ и натяженіе его будетъ:

$$T_{2,3} = T_{3,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(F_1, F_2)}.$$

Точка A_3 должна находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ

приложенной къ ней активной силы $\overline{F}_3$ и двухъ натяженій $\overline{T}_{3,2}$ и $\overline{T}_{3,4}$, для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{F}_3 + \overline{T}_{3,2} + \overline{T}_{3,4} = 0,$$

т. е.

$$\overline{T}_{3,4} = -\overline{T}_{3,2} - \overline{F}_3 = -(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3);$$

слѣдовательно отрѣзокъ A_3A_4 пойдетъ противоположно геометрической суммѣ $(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3)$ и натяженіе его $T_{3,4} = T_{4,3}$ будетъ равно величинѣ этой геометрической суммѣ, и т. д.

Точка A_n должна находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенной къ ней активной силы $\overline{F}_n$ и натяженія $\overline{T}_{n,\,n-1}$, для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{F}_n + \overline{T}_{n,\,n-1} = 0,$$

причемъ

$$\overline{T}_{n,\,n-1} = -\overline{T}_{n-1,\,n} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_{n-1};$$

слѣдовательно послѣднее условіе приводится къ равенству:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = 0.$$

Итакъ, *если къ свободнымъ концамъ и промежуточнымъ точкамъ идеально гибкой, нерастяжимой нити приложить n силъ, геометрическая сумма которыхъ* $\Sigma \overline{F}_i = 0$ *равна нулю, то подъ дѣйствіемъ этой системы силъ нить можетъ оставаться въ равновѣсіи, при чемъ фигура нити въ равновѣсіи и натяженіе каждой изъ ея частей опредѣляются при помощи вышеприведеннаго построенія.*

Примѣчаніе. Нетрудно убѣдиться, что второе необходимое условіе равновѣсія всякой свободной системы м. точекъ:

$$\Sigma \overline{M}_0 (\overline{F}_i) = 0$$

здѣсь само собою выполняется.

Дѣйствительно,

$$\overline{M}_0 (\overline{F}_1)_{A_1} + \overline{M}_0 (\overline{F}_2)_{A_2} = \overline{M}_0 (\overline{F}_1)_{A_2} + \overline{M}_0 (\overline{F}_2)_{A_2} =$$

$$= \overline{M}_0 (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)_{A_2} = \overline{M}_0 (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)_{A_3};$$

подобнымъ же образомъ:

$$\overline{M}_0(\overline{F}_1)_{A_1} + \overline{M}_0(\overline{F}_2)_{A_2} + \overline{M}_0(\overline{F}_3)_{A_3} = \overline{M}_0(\overline{F}_1 + \overline{F}_2)_{A_3} +$$

$$\overline{M}_0(\overline{F}_3)_{A_3} = \overline{M}_0(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3)_{A_3} \text{ и т. д.}$$

$$\Sigma\,\overline{M}_0(\overline{F}_i)_{A_i} = \overline{M}_0(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n)_{A_n} = 0,$$

ибо

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = 0.$$

Тѣ же результаты, т. е. нахожденіе фигуры нити въ равновѣсіи и опредѣленіе натяженій всѣхъ ея частей можно проще получить посредствомъ построенія нѣкотораго вспомогательнаго многоугольника, называемаго **многоугольникомъ силъ** или *многоугольникомъ Вариньона;* съ этою цѣлью отъ произвольной точки B_1 (черт. 58) откладываютъ послѣдовательно силы: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, приложенныя къ послѣдовательнымъ точкамъ гибкой, нерастяжимой нити: въ такомъ случаѣ получится замкнутый многоугольникъ $B_1B_2B_3 \ldots B_n\ B_1$, крайнія стороны котораго $\overline{B_1B_2}, \overline{B_1B_n}$ и послѣдовательныя діагонали:

$$\overline{B_1B_3}, \ldots\ \overline{B_1B_i}, \ldots\ \overline{B_1B_{n-1}}$$

будутъ выражать собою величины и направленія натяженій послѣдовательныхъ сторонъ веревочнаго многоугольника, ибо

$$\overline{B_1B_2} = \overline{F}_1 = -\overline{T}_{1,2},\ \ \overline{B_1B_3} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = -\overline{T}_{2,3} \text{ и т. д.}$$

и потому, отложивъ отъ точки A_1 отрѣзокъ $\overline{A_1A_2}$ параллельный $\overline{B_1B_2}$, но противоположно ему направленный, отъ точки A_2 — отрѣзокъ $\overline{A_2A_3}$, параллельный $\overline{B_1B_3}$, но противоположно ему направленный и т. д., мы опредѣлимъ фигуру равновѣсія идеально гибкой нерастяжимой нити подъ дѣйствіемъ данной системы силъ $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, удовлетворяющихъ **необходимому** и **достаточному** условію:

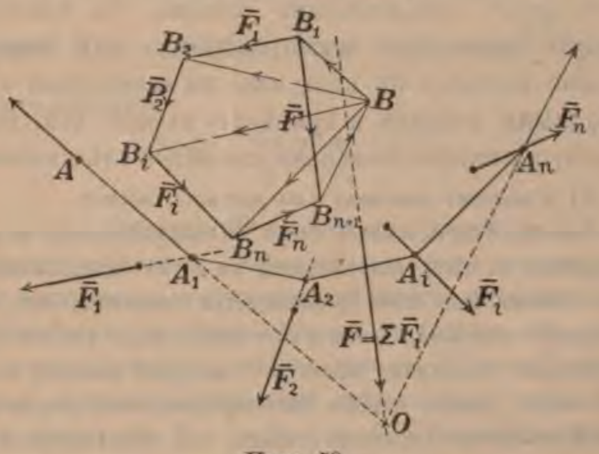
$$\Sigma\,\overline{F}_i = 0.$$

Примѣчаніе. Любое число послѣдовательныхъ узловъ покоющагося веревочнаго многоугольника находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ этимъ узламъ и натяженій прилегающихъ къ нимъ сторонъ, причемъ натяженія, приложенныя къ двумъ послѣдовательнымъ узламъ со стороны связывающаго ихъ отрѣзка нити попарно

равны и прямопротивоположны; слѣдовательно, если предположить данную часть веревочнаго многоугольника **отвердѣвшею**, то приложенныя къ ней активныя силы, уравновѣсятся натяженіями ея **крайнихъ** сторонъ, ибо натяженія внутреннихъ сторонъ можно откинуть, какъ систему взаимно уравновѣшивающихъ по отношенію къ твердому тѣлу силъ, и потому, если активныя силы, приложенныя къ данной части веревочнаго многоугольника, предположенной отвердѣвшею, приводятся къ одной **равнодѣйствующей** силѣ, то натяженія крайнихъ сторонъ этой части многоугольника должны тоже приводиться къ **одной** силѣ, т. е. ихъ направленія должны пересѣкаться; перенеся въ эту точку пересѣченія указанныя два натяженія и построивъ ихъ равнодѣйствующую, мы получимъ силу уравновѣшивающую данную систему активныхъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемой части веревочнаго многоугольника, предполагаемой **отвердѣвшей**; слѣдовательно равнодѣйствующая этихъ активныхъ силъ будетъ равна и прямопротивоположна построенной силѣ и пройдетъ черезъ ея точку приложенія, т. е. черезъ точку пересѣченія крайнихъ сторонъ разсматриваемой части веревочнаго многоугольника.

Слѣдствіе. *Пріемъ для построенія* **равнодѣйствующей** *системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и лежащихъ въ* **одной** *плоскости.*

Построивъ (черт. 59) отъ произвольной точки B_1 плоскости силъ ихъ геометрическую сумму $\overline{B_1B_{n+1}} = \Sigma \overline{F}_i$ и убѣдившись, что она **не равна**



Черт. 59.

нулю, мы знаемъ, что такая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, приводится къ одной равнодѣйствующей силѣ $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$; остается только найти одну изъ точекъ **приложеній** этой равнодѣйствующей; съ этою цѣлью

вообразимъ черезъ концы B_1, B_{n+1} построенной геометрической суммы двѣ произвольныя прямыя, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ B и принявъ эту точку за начальный пунктъ *многоугольника Вариньона*, проведемъ черезъ нее діагонали къ остальнымъ вершинамъ: $B_2 \ldots B_n$ этого многоугольника и построимъ соотвѣтствующій ему веревочный многоугольникъ, для чего достаточно: черезъ произвольную точку A плоскости силъ провести прямую AA_1 параллельную BB_1 до пересѣченія въ точкѣ A_1 съ направленіемъ силы $\overline{F}_1$, затѣмъ черезъ точку A_1 провести прямую $A_1A_2 \parallel BB_2$ до пересѣченія въ точкѣ A_2 съ направленіемъ силы $\overline{F}_2$ и т. д. черезъ полученную подобными построеніями точку A_n на направленіи послѣдней силы $\overline{F}_n$ провести прямую $\parallel BB_{n+1}$, связавъ затѣмъ точки $A, A_1, A_2 \ldots A_n$ гибкою нерастяжимою нитью, приложить въ точкахъ A, A_n силы, геометрически равныя $\overline{BB_1}$ и $\overline{B_{n+1}B}$ и перенести точки приложеній силъ $\overline{F}_1, \overline{F}_2 \ldots \overline{F}_n$ соотвѣтственно въ точки $A_1, A_2 \ldots A_n$; тогда полученный веревочный многоугольникъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нему силъ останется въ равновѣсіи, т. е. будетъ соотвѣтствовать данному *многоугольнику силъ* или многоугольнику Вариньона и потому, продолживъ крайнія стороны этого веревочнаго многоугольника до пересѣченія ихъ въ точкѣ O, на основаніи вышеприведеннаго примѣчанія, мы получимъ одну изъ точекъ приложеній равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ данной системы силы, приложенныхъ къ твердому тѣлу и лежащихъ въ одной плоскости.

Если концы веревочнаго многоугольника **не свободны**, а привязаны къ двумъ неподвижнымъ точкамъ, то, приложивъ къ концамъ такого веревочнаго многоугольника силы **реакцій** этихъ точекъ, можно смотрѣть на него, какъ на веревочный многоугольникъ съ **свободными** концами и примѣнять къ нему всѣ свойства послѣднихъ многоугольниковъ; пояснимъ сказанное слѣдующими примѣрами.

1) *Разсчетъ висячаго или цѣпного моста.*

Полотно висячаго моста (черт. 60) подвѣшивается на равноотстоящихъ стержняхъ къ цѣпи, закрѣпленной въ двухъ неподвижныхъ точкахъ, причемъ нижняя часть цѣпи предполагается **горизонтальною**, и нагрузки всѣхъ стержней—**равными**. Обозначивъ черезъ a общее разстояніе между послѣдовательными стержнями, черезъ p — нагрузку каждаго изъ нихъ и черезъ h — высоту точекъ подвѣса надъ горизонтальною стороною цѣпи, найдемъ длины послѣдовательныхъ ея сторонъ, ихъ направленія и натяженія, причемъ вѣсами самой цѣпи и стержней мы будемъ пренебрегать.

Предварительно замѣтимъ, что цѣпь должна принять форму **плоскаго** многоугольника, лежащаго въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точки подвѣса и симметричнаго относительно вертикали AY, проходящей

черезъ середину A его горизонтальной стороны. Дѣйствительно, такъ какъ одинъ изъ крайнихъ узловъ цѣпи находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ подвѣшеннаго къ нему груза и натяженій двухъ прилегающихъ къ нему сторонъ цѣпи, то эти стороны должны лежать въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ разсматриваемую точку подвѣса; подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и всѣ слѣдующія стороны цѣпи должны лежать въ той же плоскости, слѣдовательно вся цѣпь должна лежать въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точки подвѣса; кромѣ того, вслѣдствіе симметріи подвѣса грузовъ, ясно, что фигура цѣпи должна быть симметрична относительно оси AY, проходящей черезъ середину A ея горизонтальной стороны.

Вычислимъ теперь натяженіе T горизонтальной стороны цѣпи; съ этою цѣлью припомнимъ, что, въ силу сдѣланнаго нами примѣчанія, натяженіе T этой стороны и неизвѣстная намъ реакція точки подвѣса A_n, геометрически равная натяженію послѣдней стороны $A_{n-1} A_n$ цѣпи, уравновѣшиваются грузами, подвѣшенными къ промежуточнымъ узламъ, если эту часть цѣпи предположить отвердѣвшею; слѣдовательно геометрическая сумма всѣхъ этихъ силъ и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ относительно любого центра должны быть равны нулю.

Принявъ за центръ моментовъ точку подвѣса A_n и замѣтивъ, что моментъ неизвѣстной намъ реакціи точки A_n относительно этого центра очевидно равенъ нулю, условимся моменты остальныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, считать положительными, а — въ другую отрицательными; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$Th - [pa + p2a + \ldots p(n-1)a] = Th - ap\frac{n(n-1)}{2} = 0,$$

изъ которыхъ получимъ:

$$T = \frac{ap}{h}\frac{n(n-1)}{2}.$$

Зная величину натяженія T горизонтальной стороны и ея направленіе, для опредѣленія величинъ и направленій остальныхъ сторонъ цѣпи и ихъ натяженій, можно воспользоваться построеніемъ *многоугольника Вариньона* для разсматриваемой половины цѣпи; съ этою цѣлью отъ произвольной точки B плоскости подвѣса отложимъ векторъ $\overline{BB_1} = \overline{T}$, изъ полученной точки B_1 проведемъ вертикальный отрѣзокъ $B_1B_n = (n-1)p$ и раздѣливъ его точками $B_2, B_3, \ldots B_{n-1}$ на $(n-1)$ равныхъ частей, соединимъ точку B со всѣми этими точками B_i; въ такомъ случаѣ мы получимъ *многоугольникъ Вариньона*, соотвѣтствующій разсматриваемой половинѣ цѣпи; слѣдовательно діагонали BB_2, $BB_3 \ldots BB_{n-1}$ и сторона BB_n будутъ выражать собою величины и направленія натяженій послѣдователь-

ныхъ сторонъ цѣпи, начиная отъ точки A_1 и потому, проведя черезъ эту точку A_1 линію $A_1A_2 \parallel BB_2$ до пересѣченія въ точкѣ A_2 съ вертикалью a_2A_2, черезъ точку A_2 — линію $A_2A_3 \parallel BB_3$ до пересѣченія въ точкѣ A_3 съ вертикалью a_3A_3 и т. д., мы получимъ правую половину цѣпи, лѣвая же ея половина будетъ, какъ мы замѣтили, симметрична правой—относительно оси AY.

Приведемъ теперь формулы для вычисленія всѣхъ искомыхъ элементовъ:

1) Уголъ наклоненія $\alpha_{i,i+1}$ стороны $l_{i,i+1} = A_iA_{i+1}$ къ горизонтальной оси AX, будучи равенъ углу $(B_{i+1}BB_1)$, опредѣлится изъ равенствъ:

$$tg\,\alpha_{i,i+1} = \frac{B_1B_{i+1}}{BB_1} = \frac{p}{T}\,i.$$

2) Длина $l_{i,i+1}$ этой стороны A_iA_{i+1}, какъ имѣющей своей горизонтальной проекціей отрѣзокъ a, равный разстоянію между послѣдовательными стержнями, будетъ удовлетворять равенству:

$$l_{i,i+1} = \frac{a}{\cos\alpha_{i,i+1}}$$

3) Натяженіе $T_{i,i+1}$ той же стороны, будучи равно BB_{i+1}, выразится формулою:

$$T_{i,i+1} = \sqrt{T^2 + i^2p^2}.$$

Наконецъ координаты (x_i, y_i) узла A_i выразятся равенствами:

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{1}{2}\,a + (i-1)\,a = \dfrac{a}{2}\,(2i-1) \\ y_i = \dfrac{1}{2}\,(x_i - \dfrac{1}{2}\,a)\,tg\,\alpha_{i,\,i+1} = \dfrac{a}{2}\,\dfrac{p}{T}\,(i-1)\,i = \dfrac{h}{2}\,(i-1)\,i. \end{cases}$$

Первое изъ этихъ равенствъ очевидно, второе же ясно въ силу сдѣланнаго нами примѣчанія, что натяженія сторонъ A_iA_{i+1} и A_1A должны уравновѣшиваться силами, приложенными къ промежуточнымъ узламъ, если предположить разсматриваемую часть цѣпи отвердѣвшею; но равнодѣйствующая грузовъ, подвѣшенныхъ къ промежуточнымъ узламъ проходитъ черезъ середину отрѣзка a_1a_i; слѣдовательно и продолженіе стороны A_iA_{i+1} должно пройти черезъ ту же точку, причемъ мы получимъ прямоугольный треугольникъ съ вертикальнымъ катетомъ y_i, и угломъ $\alpha_{i,\,i+1}$ образуемымъ его гипотенузою и горизонтальнымъ катетомъ

$$\frac{1}{2}\,(x_i - \frac{1}{2}\,a);$$

слѣдовательно:

$$y_i = \frac{1}{2}\left(x_i - \frac{1}{2}a\right) tg\,\alpha_{i,\,i+1}$$

Исключая изъ найденныхъ двухъ равенствъ:

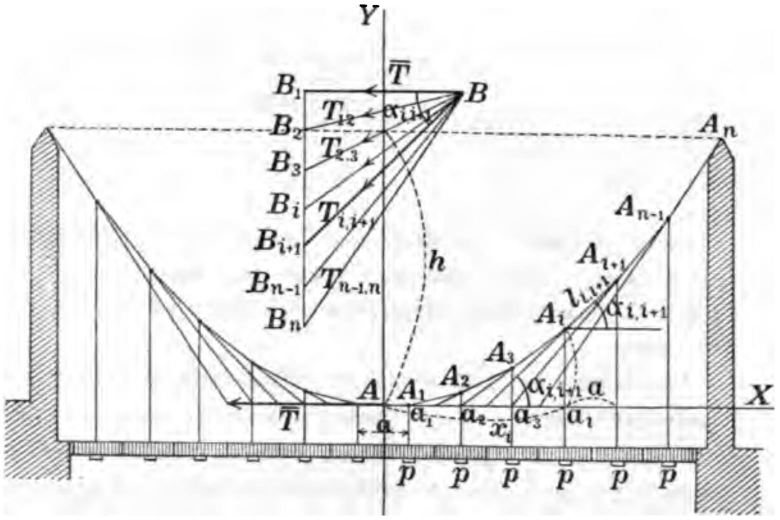
$$x_i = \frac{a}{2}(2i - 1) \quad \text{и} \quad y_i = \frac{h}{2}\,i\,(i - 1)$$

число i, мы получимъ:

$$i = \frac{x_i}{a} + \frac{1}{2}, \quad y_i = \frac{h}{2}\left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right),$$

причемъ изъ послѣдняго равенства видно, что всѣ узлы A_i лежатъ на параболѣ:

$$y = \frac{h}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right).$$



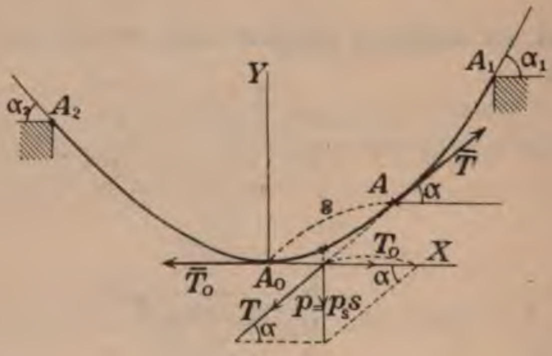
Черт. 60.

2) ***Цѣпная линія.*** **Цѣпною линіею** ***называется кривая, образуемая*** **однородною,** ***идеально гибкою, нерастяжимою,*** **тяжелою** ***нитью, подвѣшенною къ двумъ неподвижнымъ точкамъ и находящеюся въ покоѣ подъ дѣйствіемъ лишь собственнаго вѣса.***

Обозначивъ черезъ $p_s = \frac{P}{s}$ вѣсъ единицы длины данной тяжелой однородной нити, раздѣлимъ ее на безконечно малые элементы $\widehat{\Delta s}$ и прило-

жимъ вѣсъ $p_s\widehat{\Delta s}$ каждаго такого элемента, въ одной изъ точекъ этого элемента; въ такомъ случаѣ на цѣпную линію можно смотрѣть какъ на предѣлъ полученнаго веревочнаго многоугольника; слѣдовательно подобно предыдущему убѣдимся, что *цѣпная линія должна быть* плоскою *кривою, лежащею въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точки подвѣса*

Если разсѣчь цѣпную линію (черт. 61) въ какой нибудь ея точкѣ A, то къ обоимъ сѣченіямъ, чтобы удержать ихъ въ равновѣсіи, придется приложить двѣ равныя и прямопротивоположныя силы $\overline{T}$ и $-\overline{T}$, называемыя натяженіемъ нити въ данной точкѣ A; эти силы должны быть равны и прямопротиво-



Черт. 61.

положны по началу взаимодѣйствія; кромѣ того, разсматривая цѣпную линію, какъ предѣлъ указаннаго веревочнаго многоугольника, ясно, что $\overline{T}$ и $-\overline{T}$ должны быть направлены по касательной къ цѣпной линіи въ этой точкѣ.

Обозначивъ черезъ T_0 натяженіе цѣпной линіи въ ея нижней точкѣ A_0, припомнимъ, что по свойству веревочныхъ многоугольниковъ отрѣзокъ цѣпной линіи $\widehat{A_0A} = s$ между точками A_0 и A, предположенный отвердѣвшимъ будетъ оставаться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нему активныхъ силъ, т. е. его вѣса $p = p_s s$ и натяженій $\overline{T}_0$ и $\overline{T}$, приложенныхъ къ его концамъ A_0, A; слѣдовательно, продолживъ касательныя къ цѣпной линіи въ точкахъ A_0 и A до ихъ пересѣченія и разложивъ вѣсъ $p = p_s s$ разсматриваемой дуги $\widehat{A_0A} = s$ по этимъ двумъ направленіямъ, мы получимъ соотвѣтственно силы равныя и прямопротивоположныя натяженіямъ $\overline{T}_0$ и $\overline{T}$, причемъ изъ чертежа 61 ясно, что

$$T_0 = \frac{p}{tg\,\alpha} \quad \text{и} \quad T = \frac{p}{sin\,\alpha},$$

кромѣ того $p = p_s s$; слѣдовательно

$$tg\alpha = \frac{p_s}{T_0} s$$

т. е. *tg угла наклоненія къ горизонту касательной къ цѣпной линіи пропорціоналенъ длинѣ дуги $\widehat{A_0 A} = s$, отсчитанной отъ ея нижней точки A_0 и потому цѣпная линія* симметрична *относительно вертикали проходящей черезъ ея нижнюю точку A_0.*

Продифференцировавъ обѣ части послѣдняго равенства, мы получимъ:

$$\frac{d\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{p_s}{T_0} ds,$$

но

$$\frac{d\alpha}{ds} = \text{пред.} \frac{\Delta\alpha}{\widehat{\Delta s}} = k = \frac{1}{\rho},$$

гдѣ черезъ ρ мы обозначили радіусъ кривизны цѣпной линіи въ разсматриваемой точкѣ A; слѣдовательно для цѣпной линіи

$$\rho = \frac{T_0}{p_s \cos^2\alpha}$$

т. е. *радіусъ кривизны въ любой точкѣ цѣпной линіи обратно пропорціоналенъ квадрату $\cos$ — а угла наклоненія къ горизонту касательной къ ней въ разсматриваемой точкѣ.*

Обозначивъ черезъ α_1 и α_2 углы наклоненія къ горизонту касательныхъ къ цѣпной линіи въ точкахъ ея подвѣса A_1, A_2, мы получимъ:

$$T_0 = \frac{p_1}{tg\,\alpha_1} = \frac{p_2}{tg\,\alpha_2};$$

слѣдовательно

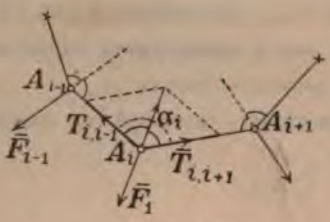
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1}$$

т. е. *отношеніе вѣсовъ двухъ сторонъ цѣпной линіи или длинъ этихъ сторонъ равно отношенію tg-овъ угловъ наклоненій къ горизонту касательныхъ проведенныхъ къ цѣпной линіи въ соотвѣтственныхъ точкахъ подвѣса.*

Примѣчаніе. *Если точки приложеній силъ, дѣйствующихъ на идеально гибкую, нерастяжимую нить, могутъ свободно скользить по ней; напримѣръ онѣ приложены къ идеально гладкимъ безконечно малымъ кольцамъ, надѣтымъ на нить, причемъ нить находится въ равновѣсіи, то натяженія всѣхъ частей нити будутъ*

одинаковы *и сила приложенная къ каждому кольцу будетъ дѣлить* **пополамъ** *уголъ между прилегающими къ нему частями нити.*

Дѣйствительно, положимъ мы имѣемъ нить (черт. 62) съ закрѣпленными концами, находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ системы активныхъ силъ $\overline{F}_i$, приложенныхъ къ надѣтымъ на нее идеально гладкимъ кольцамъ A_i. Принявъ въ разсмотрѣніе части нити, прилегающія къ выбранному кольцу A_i, мы знаемъ, что эта часть нити останется въ равновѣсіи, если предположить ея точки A_{i-1}, A_{i+1} закрѣпленными, а въ такомъ случаѣ кольцо A_i будетъ находиться на поверхности идеально гладкаго



Черт. 62.

эллипсоида вращенія, фокусами котораго будутъ точки A_{i-1} и A_{i+1}, ибо $A_iA_{i-1} + A_iA_{i+1} = const$, и потому при равновѣсіи кольца A_i приложенная къ нему активная сила $\overline{F}_i$ необходимо должна быть направлена по нормали къ этому эллипсоиду, т. е. будетъ дѣлить пополамъ уголъ

$$\angle (A_{i-1}, A_iA_{i+1}) = \alpha_i;$$

кромѣ того, такъ какъ на кольцо A_i можно смотрѣть, какъ на **свободную** м. точку, находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенной къ ней **активной** силы $\overline{F}_i$ и двухъ **пассивныхъ** силъ: натяженій $\overline{T}_{i,i-1}$ и $\overline{T}_{i,i+1}$ прилегающихъ къ ней сторонъ нити, то

$$T_{i,i-1} = T_{i,i+1} = \frac{F_i}{2\cos\frac{\alpha_i}{2}}$$

и потому натяженія всѣхъ частей нити будутъ одинаковы.

§ 3. Равновѣсіе системъ твердыхъ тѣлъ, послѣдовательно сопряженныхъ идеальными шарнирами.

Идеальнымъ *цилиндрическимъ и сферическимъ* **шарнирами** *называютъ такія сопряженія двухъ твердыхъ тѣлъ, при которыхъ они имѣютъ соотвѣтственно общую неизмѣнно связанную съ обоими тѣлами* **геометрическую** *ось или общую неизмѣнносвязанную съ обоими тѣлами точку*—**центръ** *сферическаго шарнира, причемъ силы реакцій* **идеальнаго** *цилиндрическаго шарнира приводятся къ силамъ, проходящимъ черезъ его* **ось**, *а реакціи идеальнаго сферическаго шарнира—къ силѣ, проходящей черезъ его* **центръ**.

На практикѣ цилиндрическіе шарниры воспроизводятся сопряженіемъ двухъ твердыхъ тѣлъ одною общею цилиндрическою осью, а сферическіе шарниры—посредствомъ сферы и полой сферической поверхности одного и того же радіуса, насаженныхъ другъ на друга, причемъ сфера неизмѣнно связана съ однимъ изъ сопряженныхъ тѣлъ, а полая сферическая поверхность—съ другимъ.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ (черт. 63) систему n тѣлъ:

$$S_1,\ S_2,\ S_i,\ .\ .\ .\ .\ S_{n-1},\ S_n,$$

послѣдовательно сопряженныхъ между собою идеальными сферическими или цилиндрическими шарнирами:

$$O_1,\ O_2,\ O_i,\ .\ .\ .\ .\ O_{n-1}$$

и къ каждому изъ этихъ тѣлъ S_i приложена произвольная система активныхъ силъ $(\overline{F}_i,\ \overline{L}_i)$, причемъ черезъ $\overline{F}_i$ мы обозначимъ гео-

Черт. 63.

метрическую сумму системы активныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу S_i, а черезъ $\overline{L}_i$ линейный моментъ той же системы силъ, относительно центра O_i сферическаго шарнира или относительно опредѣленной точки O_i геометрической оси цилиндрическаго шарнира; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что система активныхъ силъ $(\overline{F}_i,\ \overline{L}_i)$, приложенныхъ къ тѣлу S_i можетъ быть приведена къ **силѣ** $\overline{F}_i$, приложенной къ тѣлу S_i въ точкѣ O_i, и къ **парѣ силъ**, линейный моментъ которой есть $\overline{L}_i$, поэтому подъ точкою приложенія каждой

силы $\overline{F}_i$ мы будемъ подразумѣвать соотвѣтствующую ей точку шарнира O_i, а подъ точкою приложенія геометрической суммы $\overline{F}_n$ системы активныхъ силъ, приложенныхъ къ **послѣднему** тѣлу S_n — нѣкоторую его точку O_n и черезъ $\overline{L}_n$ обозначимъ линейный моментъ этой системы силъ относительно той же точки O_n.

Подобнымъ же образомъ силы реакцій тѣла S_{i+1} на тѣло S_i черезъ связывающій ихъ шарниръ O_i могутъ быть приведены къ **силѣ** $\overline{R}_{i,i+1}$, приложенной къ тѣлу S_i въ той же точкѣ O_i и къ **парѣ силъ**, линейный моментъ которой геометрически равенъ линейному моменту $\overline{S}_{i,i+1}$ той же системы **пассивныхъ** силъ относительно той же точки O_i, причемъ для **идеальнаго цилиндрическаго** шарнира $\overline{S}_{i,i+1}$ **перпендикуляренъ** къ его геометрической оси, ибо моменты всѣхъ силъ реакцій идеальнаго цилиндрическаго шарнира относительно его геометрической оси очевидно равны нулю, т. к. силы реакцій такого шарнира по опредѣленію проходятъ черезъ его геометрическую ось, а для **идеальнаго сферическаго** шарнира $\overline{S}_{i,i+1} = 0$, т. к. силы реакцій такого шарнира по опредѣленію проходятъ черезъ его центръ; наконецъ *по началу равенства дѣйствія и противодѣйствія* тѣло S_i будетъ дѣйствовать на тѣло S_{i+1} съ силами равными и прямопротивоположными силамъ реакцій тѣла S_{i+1} на тѣло S_i; слѣдовательно эти пассивныя силы приведутся къ **силѣ** $\overline{R}_{i+1,i} = -\overline{R}_{i,i+1}$ приложенной къ тѣлу S_{i+1} въ точкѣ O_i и—къ **парѣ силъ**, линейный моментъ которой $\overline{S}_{i+1,i} = -\overline{S}_{i,i+1}$.

Если данная система n твердыхъ тѣлъ, послѣдовательно сопряженныхъ между собою **идеальными** *цилиндрическими или сферическими* **шарнирами,** *находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенной къ каждому изъ этихъ тѣлъ S_i системы активныхъ силъ $(\overline{F}_i, \overline{L}_i)$, то по принципу отвердѣнія необходимо, чтобы геометрическая сумма всѣхъ этихъ силъ и геометрическая сумма ихъ линейныхъ моментовъ относительно любого центра O были равны нулю, т. е.*

$$\Sigma \overline{F}_i = 0 \text{ и } \Sigma \overline{L}_i + \Sigma \overline{M}_0 (\overline{F}_i) = 0,$$

причемъ на каждое изъ **сопряженныхъ** тѣлъ S_i можно смотрѣть какъ на **свободное**, если къ дѣйствующей на него системѣ **активныхъ** силъ $(\overline{F}_i, \overline{L}_i)$ присоединить еще реакціи, приложенныя къ нему со стороны сопряженныхъ съ нимъ тѣлъ S_{i+1} и S_{i-1}, т. е. двѣ си-

стемы **пассивныхъ** силъ:

$$(\overline{R}_{i,\,i+1},\ \overline{S}_{i,\,i+1}) \quad \text{и} \quad (\overline{R}_{i,\,i-1},\ \overline{S}_{i,\,i-1}).$$

Для опредѣленія системы силъ реакціи $(\overline{R}_{i,\,i+1},\ \overline{S}_{i,\,i+1})$ тѣла S_{i+1} на тѣло S_i замѣтимъ, что система твердыхъ тѣлъ $S_1, S_2 \ldots . S_i$ *по принципу отвердѣнія* будетъ оставаться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ тѣхъ же приложенныхъ къ нимъ системъ активныхъ силъ:

$$(\overline{F}_1,\ \overline{L}_1),\ (\overline{F}_2,\ \overline{L}_2)\ .\ .\ .\ .\ (\overline{F}_i,\ \overline{L}_i)$$

и системы реакцій $(\overline{R}_{i,\,i+1},\ \overline{S}_{i,\,i+1})$ на тѣло S_i тѣла S_{i+1}, если предположить эту систему i тѣлъ **отвердѣвшею** или **неизмѣняемою** и потому геометрическая сумма всѣхъ этихъ силъ и линейный моментъ этой системы силъ относительно любого центра, напр. O_i, должны быть равны нулю, т. е.

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{F}_i + \overline{R}_{i,\,i+1} = 0$$

и

$$\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{L}_i +$$
$$+ \overline{M}_{O_i}(\overline{F}_1) + \overline{M}_{O_i}(\overline{F}_2) + \ .\ .\ .\ .\ + M_{O_i}(\overline{F}_i) + \overline{S}_{i,\,i+1} = 0;$$

слѣдовательно

$$\overline{R}_{i,\,i+1} = -(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{F}_i),$$
$$\overline{S}_{i,\,i+1} = -[\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{L}_i +$$
$$+ M_{O_i}(\overline{F}_1) + M_{O_i}(\overline{F}_2) + \ .\ .\ .\ .\ + M_{O_i}(\overline{F}_i)],$$

наконецъ система реакцій $(\overline{R}_{i,\,i-1},\ \overline{S}_{i,\,i-1})$ тѣла S_{i-1} на тѣло S_i опредѣлятся по тѣмъ же формуламъ изъ равенствъ:

$$\overline{R}_{i,\,i-1} = -\overline{R}_{i-1,\,i} = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{F}_{i-1})$$
$$\overline{S}_{i,\,i-1} = -\overline{S}_{i-1,\,i} = [\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{L}_{i-1} +$$
$$+ \overline{M}_{O_{i-1}}(\overline{F}_1) + \overline{M}_{O_{i-1}}(\overline{F}_2) + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{M}_{O_{i-1}}(\overline{F}_{i-1})].$$

Если шарниръ O_i есть идеальный **сферическій** *шарниръ, то* $\overline{S}_{i,\,i+1} = 0$ *по опредѣленію*, и мы получимъ условіе:

$$\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \ .\ .\ .\ .\ + \overline{L}_i +$$
$$\overline{M}_{O_i}(\overline{F}_1) + \overline{M}_{O_i}(\overline{F}_2)\ .\ .\ .\ .\ \overline{M}_{O_i}(\overline{F}_i) = 0,$$

которому должны удовлетворять активныя силы для равновѣсія системы, а именно *линейный моментъ системы всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ послѣдовательнымъ тѣламъ* S_1, $S_2 \dots \dots S_i$ *относительно* **центра** *даннаго* **сферическаго** *шарнира* O_i *долженъ быть равенъ нулю*, что и непосредственно очевидно, ибо, предположивъ эту часть системы тѣлъ **отвердѣвшею**, т. е. твердыя тѣла S_1, $S_2 \dots \dots S_i$—неизмѣнно между собою связанными, а центръ O_i сферическаго шарнира—**неподвижнымъ**, мы знаемъ, что по принципу отвердѣнія, полученное твердое тѣло, имѣющее идеальную неподвижную точку O_i, должно оставаться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ тѣхъ же системъ активныхъ силъ, для чего необходимо, чтобы линейный моментъ системы всѣхъ этихъ силъ относительно неподвижной точки O_i былъ равенъ нулю.

Если шарниръ O_i *есть идеальный* **цилиндрическій** *шарниръ, то линейный моментъ его силъ реакцій* $\overline{S}_{i,\,i+1}$ *долженъ быть* **перпендикуляренъ** *къ его* **геометрической** *оси*, ибо по опредѣленію такого шарнира его силы реакціи проходятъ черезъ эту ось, и потому та же геометрическая сумма:

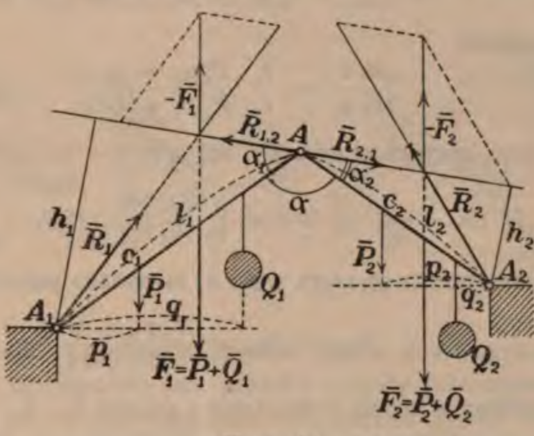
$$[\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \dots \overline{L}_i +$$
$$\overline{M}_{O_i}(\overline{F}_1) + \overline{M}_{O_i}(\overline{F}_2) + \dots \dots \overline{M}_{O_i}(\overline{F}_i)],$$

т. е. линейный моментъ системы всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣламъ S_1, $S_2 \dots \dots S_i$, относительно точки O_i геометрической оси такого шарнира долженъ быть перпендикуляренъ къ этой оси, слѣдовательно *моментъ указанной системы активныхъ силъ относительно геометрической* **оси** *даннаго* **цилиндрическаго** *шарнира* O_i *долженъ быть равенъ нулю*, что и непосредственно очевидно, ибо предположивъ опять систему i твердыхъ тѣлъ: S_1, S_2, $\dots \dots S_i$ **неизмѣнно** между собою связанными и ось цилиндрическаго шарнира **неподвижною**, мы знаемъ, что *по принципу отвердѣнія* полученное твердое тѣло, имѣющее идеальную неподвижную ось, неизмѣнно съ нимъ связанную, должно оставаться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ системъ активныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ этимъ тѣламъ, для чего необходимо, чтобы моментъ системы всѣхъ этихъ силъ относительно геометрической оси шарнира былъ равенъ нулю.

Если перемѣщенія твердыхъ тѣлъ, сопряженныхъ между собою

идеальными шарнирами, неограничены никакими внѣшними опорами или преградами, то такое шарнирное сопряженіе мы будемъ называть **свободнымъ**, въ противномъ же случаѣ—**несвободнымъ**, причемъ, присоединивъ къ дѣйствующимъ на данное **несвободное** шарнирное сопряженіе **активнымъ** силамъ еще нѣкоторую систему **пассивныхъ** силъ: реакціи опоръ или преградъ, на данное **несвободное** шарнирное сопряженіе можно смотрѣть, какъ на **свободное**.

Примѣры. 1) **Два** *стержня* (черт. 64), *сопряженныхъ идеальнымъ цилиндрическимъ шарниромъ съ горизонтальною осью, упираются*



Черт. 64.

своими концами въ неподвижныя опоры; вся система лежитъ въ вертикальной плоскости, причемъ на стержни кромѣ ихъ вѣсовъ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ *дѣйствуютъ еще подвѣшенные грузы* Q_1, Q_2, *вычислить реакціи шарнира и опоръ.*

Обозначивъ соотвѣтственно черезъ l_1, l_2 — длины стержней, черезъ α — уголъ между стержнями, черезъ p_1, p_2 и q_1, q_2 — соотвѣтственно разстоянія опорныхъ пунктовъ до вертикалей, проведенныхъ черезъ центры тяжести c_1, c_2 стержней и до нитей подвѣшенныхъ къ стержнямъ грузовъ Q_1, Q_2, черезъ $\overline{R}_{1,2}$ и $\overline{R}_{2,1}$ — реакціи шарнира на стержни l_1 и l_2; наконецъ черезъ α_1, α_2 — углы наклоненій этихъ реакцій къ стержнямъ, на которые онѣ дѣйствуютъ и черезъ $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ — реакціи опорныхъ пунктовъ A_1, A_2, мы знаемъ, что

$$\overline{R}_{2,1} = -\overline{R}_{1,2};$$

кромѣ того, если къ дѣйствующимъ на каждый стержень **активнымъ** силамъ присоединитъ еще реакціи опоры и шарнира, т. е. **всѣ** дѣйствующія на него

пассивныя силы, то на каждый стержень можно смотрѣть на свободный, находящійся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ всѣхъ этихъ силъ, и потому суммы моментовъ всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ каждому изъ стержней относительно любого центра должны быть равны нулю; принявъ за центры моментовъ соотвѣтственно опорные пункты A_1, A_2 каждаго изъ стержней и условившись моменты силъ, направленныхъ въ одну сторону, считать положительными, а въ другую—отрицательными, мы придемъ къ двумъ очевиднымъ равенствамъ:

$$P_1 p_1 + Q_1 q_1 - R_{1,2}\, l_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

$$-P_2 p_2 - Q_2 q_2 + R_{2,1}\, l_2 \sin\alpha_2 = 0;$$

слѣдовательно

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{l_2}{l_1}\,\frac{P_1 p_1 + Q_1 q_1}{P_2 p_2 + Q_2 q_2} = Q,$$

кромѣ того, принявъ во вниманіе, что $\alpha_2 = \pi - \alpha - \alpha_1$, получимъ:

$$tg\,\alpha = \frac{Q \sin\alpha}{1 - Q\cos\alpha};$$

опредѣливъ такимъ образомъ уголъ α_1 вычислимъ реакціи шарнира

$$R_{1,2} = R_{2,1} = \frac{P_1 p_1 + Q_1 q_1}{2\, l_1 \sin\alpha_1}.$$

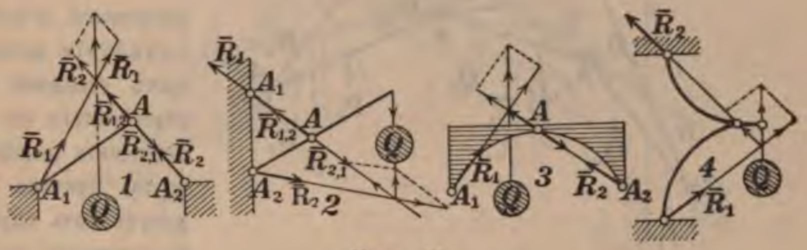
Наконецъ величины и направленія реакцій $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ опорныхъ пунктовъ A_1, A_2 опредѣлятся изъ очевидныхъ геометрическихъ равенствъ:

$$\overline{R}_1 + \overline{P}_1 + \overline{Q}_1 + \overline{R}_{1,2} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{R}_2 + \overline{P}_2 + \overline{Q}_2 + \overline{R}_{2,1} = 0,$$

ибо всѣ активныя и пассивныя силы, приложенныя къ каждому изъ стержней, должны взаимно уравновѣшиваться и потому направленія $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ должны проходить соотвѣтственно черезъ точки пересѣченій направленій равнодѣйствующихъ $\overline{F}_1 = \overline{P}_1 + \overline{Q}_1$ и $\overline{F}_2 = \overline{P}_2 + \overline{Q}_2$ активныхъ силъ, приложенныхъ къ стержнямъ, съ общимъ направленіемъ реакцій $\overline{R}_{1,2}$, $\overline{R}_{2,1}$ связывающаго ихъ шарнира; слѣдовательно величины и направленія реакцій $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ могутъ быть построены разложеніемъ силъ равныхъ и прямо противоположныхъ указаннымъ равнодѣйствующимъ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ активныхъ силъ на найденное общее направленіе реакцій $\overline{R}_{1,2}$, $\overline{R}_{2,1}$ шарнира и указанныя направленія реакцій $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ опорныхъ пунктовъ A_1, A_2.

Если вѣсами стержней сравнительно съ подвѣшенными къ нимъ грузами можно пренебречь, то стержни считаютъ **невѣсомыми**; и если въ такомъ случаѣ грузъ подвѣшенъ только къ **одному** изъ стержней, то *направленіе реакціи* **ненагруженнаго** *стержня совпадетъ съ направленіемъ*

этого стержня, т. к. на него можно смотрѣть, какъ на **свободный** стержень, находящійся въ равновѣсіи надъ дѣйствіемъ лишь двухъ пассивныхъ силъ: реакціи шарнира и реакціи опорнаго пункта, приложенныхъ въ его концахъ, а въ такомъ случаѣ эти силы должны быть равны прямопротивоположны и дѣйствовать по прямой, соединяющей ихъ точки приложеній; зная же направленія реакцій ненагруженнаго стержня и направленіе подвѣшеннаго груза, т. е. направленія двухъ силъ, дѣйствующихъ на нагруженный стержень, мы приходимъ къ заключенію, что направленіе третьей приложенной къ нему силы, т. е. реакціи опорнаго пункта должно пройти черезъ точку пересѣченія первыхъ двухъ направленій и потому приложенныя къ нему



Черт. 65.

двѣ **пассивныя** силы: реакція опорнаго пункта и ненагруженнаго стержня опредѣлятся разложеніемъ силы равной и прямопротивоположной подвѣшенному грузу на эти два направленія; прилагаемые чертежи (черт. 65) представляютъ частные случаи подобныхъ построеній, изъ которыхъ третьимъ опредѣляется дѣйствіе сосредоточеннаго груза на полуарки трехшарнирнаго моста.

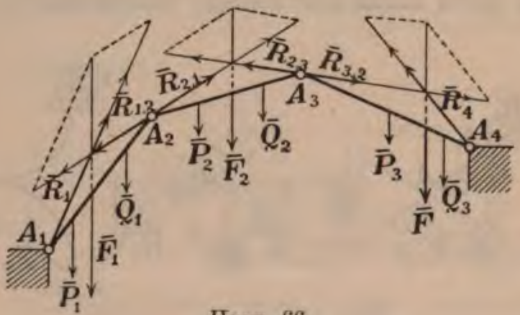
2) *Система* **трехъ** *стержней, лежащихъ въ вертикальной плоскости и послѣдовательно сопряженныхъ между собою идеальными цилиндрическими шарнирами, опирается своими концами на неподвижныя опоры, причемъ на стержни кромѣ ихъ вѣсовъ* $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$, *дѣйствуютъ еще подвѣшенные грузы* Q_1, Q_2, Q_3, *найти реакціи шарнировъ и опоръ.*

Такая система (черт. 66) можетъ находиться въ равновѣсіи при однихъ и тѣхъ же грузахъ въ **различныхъ** положеніяхъ, но, если положеніе равновѣсія задано, то всѣ пассивныя силы опредѣляются. Дѣйствительно, первые два стержня останутся въ равновѣстіи, если предложить шарниръ A_3 **неподвижнымъ** и всѣ пассивныя силы, дѣйствующія на эти стержни, т. е. реакція $\overline{R}_1$, перваго опорнаго пункта реакціи $\overline{R}_{1,2}$, и $\overline{R}_{2,1}$, шарнира A_2 и реакція $\overline{R}_{2,3}$, шарнира A_2, предположеннаго неподвижнымъ, могутъ быть опредѣлены при помощи формулъ, указанныхъ въ предыдущемъ случаѣ, за-

мѣною въ нихъ $\overline{R}_2$, на $\overline{R}_{2,3}$; кромѣ того $\overline{R}_{3,2} = -R_{2,3}$, причемъ третій стержень остается въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ его вѣса $\overline{P}_3$, подвѣшеннаго къ нему груза Q_3 и реакцій на него $\overline{R}_{3,2}$ и $\overline{R}_4$ шарнира и опорнаго пункта; слѣдовательно

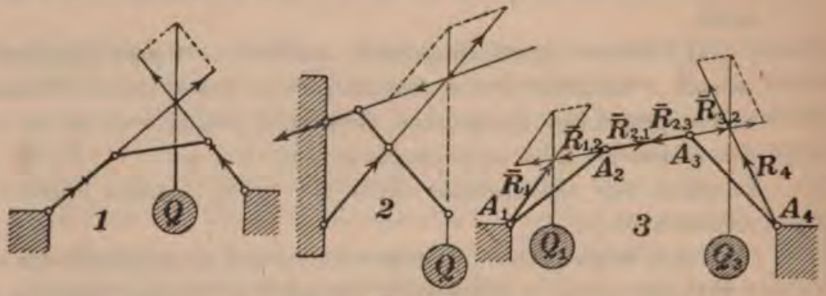
$$\overline{R}_4 = -(\overline{R}_{3,2} + \overline{Q}_3 + \overline{P}_3).$$

Если предположить стержни невѣсомыми и грузъ подвѣшеннымъ лишь къ **среднему** *стержню, то направленія реакцій* **ненагруженныхъ** *стержней совпадутъ съ направленіями самихъ этихъ стержней* и потому направленія ненагруженныхъ стержней должны пересѣкаться на направленіи нити подвѣшеннаго груза, причемъ реакціи могутъ быть опредѣлены разложеніемъ силы равной и прямопротивоположной подвѣшенному грузу на эти направленія; приведенные здѣсь чертежи (черт. $67_{1,2}$) служатъ примѣрами такихъ случаевъ.



Черт. 66.

Если наоборотъ **средній** *стержень остается* **ненагруженнымъ** *то направленія его реакцій будутъ совпадать съ его собственнымъ направленіемъ* и реакціи опорныхъ пунктовъ могутъ быть получены при помощи уже указанныхъ нами построеній (черт. $67_{,3}$).

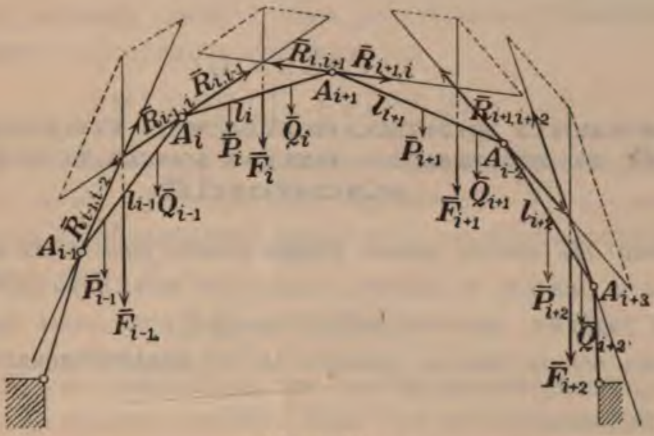


Черт. 67.

3) *Если дана* **система** *n* **стержней** (черт. 68), *лежащихъ въ вертикальной плоскости и послѣдовательно сопряженныхъ идеальными цилиндрическими шарнирами съ горизонтальными осями, причемъ*

концы крайнихъ стержней опираются въ **неподвижныя** *опоры, то такая система можетъ принимать* **различныя** *положенія равновѣсія при однихъ и тѣхъ же грузахъ, но если положеніе равновѣсія какихъ либо* **двухъ** *ея сопряженныхъ стержней извѣстно, то положеніе всей системы и всѣ ея пассивныя силы вполнѣ опредѣляются.*

Дѣйствительно, положимъ, что положенія равновѣсія двухъ сопряженныхъ стержней l_i, l_{i+1} намъ извѣстны; въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что



Черт. 68.

эти два стержня останутся въ равновѣсіи, если предположить ихъ крайніе шарниры **неподвижными** и потому мы можемъ опредѣлить реакціи $R_{i,\,i+1} = - R_{i+1,\,i}$, $\overline{R}_{i,\,i-1}$ и $\overline{R}_{i+1,\,i+2}$ трехъ ихъ шарнировъ при помощи извѣстныхъ намъ формулъ, указанныхъ въ первомъ примѣрѣ, зная же, что $\overline{R}_{i-1,\,i} = - \overline{R}_{i,\,i-1}$ и что стержень l_{i-1} долженъ, будучи **свободнымъ**, оставаться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенной къ нему **активной** силы: $\overline{F}_{i-1} = \overline{P}_{i-1} + \overline{Q}_{i-1}$, равнодѣйствующей его вѣса P_{i-1} и подвѣшеннаго груза Q_{i-1} и двухъ приложенныхъ къ нему **пассивныхъ** силъ $\overline{R}_{i-1,\,i}$ и $\overline{R}_{i-1,\,i-2}$ — реакцій его шарнировъ, мы приходимъ къ заключенію, что направленіе неизвѣстной намъ реакціи $\overline{R}_{i-1,\,i-2}$ должно пройти черезъ точку пересѣченія силъ $\overline{R}_{i-1,\,i}$ и $\overline{F}_{i-1}$, причемъ

$$\overline{R}_{i-1,\,i-2} + \overline{F}_{i-1} + \overline{R}_{i-1,\,i} = 0;$$

съ другой стороны та же реакція проходитъ черезъ точку A_{i-1} стержня l_{i-1}; слѣдовательно положеніе стержня l_{i-1} вполнѣ опредѣляется; подобнымъ же образомъ опредѣлится положеніе стержня l_{i+2} и т. д.

Замѣтимъ наконецъ, что системы твердыхъ тѣлъ, въ которыхъ **пассивныя** силы или **реакціи** могутъ быть **опредѣлены**, предполагая тѣла идеально твердыми, т. е. неизмѣняемыми, называются **статически опредѣлимыми системами**, въ противномъ же случаѣ— **статически неопредѣлимыми**; въ послѣднемъ случаѣ для полнаго опредѣленія реакцій или пассивныхъ силъ надо принимать во вниманіе **деформаціи** тѣлъ данной системы.

ГЛАВА III.

Начало возможныхъ перемѣщеній и начало виртуальныхъ отклоненій.

Эти два начала даютъ **общія** *условія равновѣсія матеріальной точки и системъ м. точекъ, связанныхъ такъ называемыми* **идеальными связями**, *причемъ второе начало есть лишь другая формулировка перваго начала, удобная для его* **аналитическаго** *выраженія.*

I. Начало возможныхъ перемѣщеній.

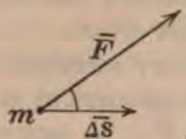
§ 1. Элементарная работа силъ и ея свойства.

Для **общаго** опредѣленія **идеальныхъ связей** введемъ одно важное механическое понятіе.

1. **Элементарною работою силы** *называется* **геометрическое** *произведеніе* (черт. 69)

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F\,\Delta s \cos(F, \Delta s)$$

изъ силы $\overline{F}$ *на элементарный векторъ перемѣщенія* $\overline{\Delta s}$ *ея точки приложенія* m.



Черт. 69.

Изъ этого опредѣленія ясно, что элементарная работа силы можетъ быть $\lesseqgtr 0$, причемъ знакъ ея совпадаетъ со знакомъ $cos\,(F, \Delta s)$, т. е. если направленіе силы $\overline{F}$ и вектора элементарнаго перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ ея точки приложенія составляютъ **острый** уголъ, то элементарная работа **положительна**, въ против-

номъ же случаѣ — **отрицательна**; кромѣ того элементарная работа силы равна нулю въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

$$1)\ F = 0,\ 2)\ \Delta s = 0,\ 3)\ \overline{F} \perp \overline{\Delta s},$$

т. е. 1) *когда сила равна нулю,*

2) *когда ея точка приложенія не перемѣщается и*

3) *когда направленіе силы и вектора элементарнаго перемѣщенія ея точки приложенія* **взаимноперпендикулярны**.

Наконецъ символъ единицы элем. работы, какъ произведенія изъ силы на длину, опредѣлится изъ равенства:

$$[MLT^{-2}][L] = [ML^2 T^{-2}].$$

Теорема 1. *Элементарная работа* **равнодѣйствующей** *силы* $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *на любомъ элементарномъ перемѣщеніи* $\overline{\Delta s}$ *ея точки приложенія равна* **алгебраической** *суммѣ элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ силъ, т. е.*

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = \Sigma\,(\overline{F}_i \overline{\Delta s})$$

Дѣйствительно, припомнивъ, что при **геометрическомъ** произведеніи можно раскрывать скобки, какъ при **алгебраическомъ**, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n)\,\overline{\Delta s} =$$

$$= \overline{F}_1 \overline{\Delta s} + \overline{F}_2 \overline{\Delta s} + \ldots + \overline{F}_n \overline{\Delta s} = \Sigma\,\overline{F}_i \overline{\Delta s},\ \text{ч. т. д.}$$

Теорема 2. *Элементарная работа силы* $\overline{F}$ *на* **составномъ** *перемѣщеніи* $\overline{\Delta s} = \Sigma\,\overline{\Delta s}_k$ *ея точки приложенія равна* **алгебраической** *суммѣ элементарныхъ работъ той же силы на каждомъ изъ составляющихъ перемѣщеній, т. е.*

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = \Sigma \overline{F}\,\overline{\Delta s}_k.$$

Дѣйствительно, по тому же свойству геометрическаго произведенія мы получимъ:

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = \overline{F}\,\Sigma\,\overline{\Delta s}_k = \overline{F}\,(\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \ldots \overline{\Delta s}_p) =$$

$$= \overline{F}\,\overline{\Delta s}_1 + \overline{F}\,\overline{\Delta s}_2 + \cdot\ \cdot\ \overline{F}\,\overline{\Delta s}_p = \Sigma\,\overline{F}\,\overline{\Delta s}_k\ \text{ч. т. д.}$$

Теорема 3. *Элементарная работа* **равнодѣйствующей** *силы* $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *на* **составномъ** *перемѣщеніи* $\overline{\Delta s} = \Sigma \overline{\Delta s}_k$ *ея точки приложенія равна* **алгебраической** *суммѣ элементарныхъ работъ каждой изъ дѣйствующихъ силъ на каждомъ изъ составляющихъ перемѣщеній, т. е.*

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = \Sigma \overline{F}_i\,\overline{\Delta s}_k.$$

Дѣйствительно, по указанному свойству геометрическаго произведенія ясно, что

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots \overline{F}_n)(\overline{\Delta s}_1 + \overline{\Delta s}_2 + \ldots \overline{\Delta s}_p) =$$
$$= \Sigma \overline{F}_i\,\overline{\Delta s}_k, \text{ ч. т. д.}$$

Слѣдствіе. Аналитическое *выраженіе элементарной работы силы.*

Обозначивъ черезъ X, Y Z; Δx, Δy, Δz соотвѣтственно проекціи на три взаимноперпендикулярныя оси координатъ (O; X, Y, Z) силы $\overline{F}$ и вектора элементарнаго перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ ея точки приложенія, мы знаемъ, что

$$\overline{F} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} \text{ и } \overline{\Delta s} = \overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z};$$

слѣдовательно:

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = (\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z}) =$$
$$= \overline{X}\,\overline{\Delta x} + \overline{Y}\,\overline{\Delta y} + \overline{Z}\,\overline{\Delta z} = X\,\Delta x + Y\,\Delta y + Z\,\Delta z,$$

т. к. геометрическія произведенія проекцій силы и вектора эл. перемѣщенія ея точки приложенія на **различныя** оси равны нулю, ибо оси прямоугольны, а **геометрическія** произведенія тѣхъ же проекцій на **однѣ и тѣ же** оси по величинѣ и по знаку равны ихъ **алгебраическимъ** произведеніямъ.

Итакъ, **аналитически** *элементарная работа силы выражается* **алгебраическою** *суммою произведеній соотвѣтственныхъ проекцій силы и вектора элементарнаго перемѣщенія ея точки приложенія на три взаимноперпендикулярныя оси координатъ* (O; X, Y, Z), *т. е.*

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = X\,\Delta x + Y\,\Delta y + Z\,\Delta z,$$

что и непосредственно ясно изъ аналитическаго выражннія геометрическаго произведенія двухъ векторовъ (см. Введеніе).

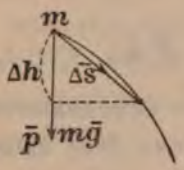
Примѣры. *1) Элементарная работа* **силы тяжести**, *тяжелой м. точки равна взятому со знакомъ* $\pm$ *произведенію* $p\Delta h$ *изъ вѣса* p *матеріальной точки на ея вертикальное перемѣщеніе* Δh, *причемъ знакъ* $(+)$ *надо брать при опусканіи м. точки, а знакъ* $(-)$ *при поднятіи.*

Дѣйствительно, (черт. 70)

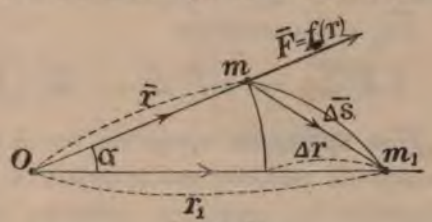
$$\overline{p}\,\overline{\Delta s} = p\,\Delta s \cos(p, \Delta s) = \pm\, p\,\Delta h,$$

гдѣ знакъ $(+)$ надо брать при опусканіи м. точки, а знакъ $(-)$ при поднятіи, ибо эти знаки должны совпадать со знакомъ $\cos(p, \Delta s)$.

2) Элементарная работа **центральной силы**, *т. е. силы* $F = f(r)$ *притяженія или отталкиванія неподвижнаго центра* O, *направленной по прямой, соединяющей этотъ центръ съ м. точкою* m *и по*



Черт. 70.



Черт. 71.

величинѣ зависящей лишь отъ разстоянія r *мат. точки* m *отъ этого центра,* **эквивалентна** *произведенію* $\pm f(r)\,\Delta r$, *гдѣ* Δr *есть элементарное измѣненіе указаннаго разстоянія точки* m, *причемъ знакъ* $(+)$ *надо брать при силахъ отталкиванія, а знакъ* $(-)$ *при силахъ притяженія.*

Дѣйствительно, (черт. 71)

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F\,\Delta s \cos(F, \Delta s) = \pm f(r)\,\Delta s \cos(\Delta s, r)$$

причемъ знакъ $(+)$ надо брать при силахъ **отталкиванія**, ибо въ этомъ случаѣ направленія $\overline{F}$ и $\overline{r}$ совпадаютъ, а знакъ $(-)$ при силахъ **притяженія**, ибо въ такомъ случаѣ указанныя направленія противоположны.

Но, $\overline{\Delta s} = \overline{r_1} - \overline{r}$; слѣдовательно:

$$\Delta s \cos(\Delta s, r) = r_1 \cos\alpha - r = (r + \Delta r)\cos\alpha - r$$

$$= \Delta r \cos\alpha - r(1 - \cos\alpha) = \Delta r\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - r\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \Delta r - 2(r + \Delta r)\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{т. е.}$$

$$\Delta s \cos(\Delta s, r) \ \text{экв.}\ \Delta r$$

и потому эл. работа центральной силы $F = f(r)$ эквивалентна $\pm f(r)\,\Delta r$ ч. т. д.

2) Элементарною работою силъ, приложенныхъ къ **твердому тѣлу**, *называется* **алгебраическая** *сумма* $\Sigma\ \overline{F}_i\ \overline{\Delta s}_i$ *элементарныхъ работъ всѣхъ этихъ силъ.*

Разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе случаи.

a) При **поступательномъ** *перемѣщеніи твердаго тѣла элементарная работа приложенныхъ къ нему силъ выражается элементарною работою ихъ* **геометрической суммы** $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ *на поступательномъ перемѣщеніи* $\overline{\Delta s} = \overline{\Delta s}_i$ *твердаго тѣла, т. е.*

$$\Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s}_i = \overline{F}\, \overline{\Delta s}$$

Дѣйствительно, при поступательномъ перемѣщеніи твердаго тѣла $\overline{\Delta s}_i = \overline{\Delta s}$; слѣдовательно:

$$\Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s}_i = \Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s} = \overline{\Delta s}\, \Sigma\, \overline{F}_i = \overline{F}\, \overline{\Delta s}\text{, ч. т. д.}$$

b) При **вращеніи** *твердаго тѣла вокругъ* **неподвижной** *оси* OZ *элементарная работа приложенныхъ къ нему силъ* **эквивалентна** *произведенію изъ момента системы силъ* L_{oz} *относительно этой оси на элементарное угловое перемѣщеніе* $\Delta\theta$ *твердаго тѣла вокругъ той же оси, т. е.*

$$\Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s}_i \ \textbf{эквивалента}\ L_{oz}\Delta\theta\,.$$

Дѣйствительно, разложивъ силу $\overline{F}_i$ (черт. 72), приложенную къ точкѣ m_i твердаго тѣла:

$$\overline{F}_i = \overline{F}_{i,1} + \overline{F}_{i,2} + \overline{F}_{i,3}$$

на три силы, изъ которыхъ первая направлена по касательной къ дугѣ окружности, описываемой ея точкою приложенія m_i, вторая— параллельно оси OZ, а третья по радіусу r_i точки m_i, мы видимъ, что

$$M_{oz}(\overline{F}_i) = \overline{M}_{oz}(\overline{F}_{i,1}) + M_{oz}(\overline{F}_{i,2}) + M_{oz}(\overline{F}_{i,3}) =$$
$$= M_{oz}(\overline{F}_{i,1})\,,$$

ибо моменты остальныхъ двухъ составляющихъ силъ относительно оси OZ очевидно равны нулю; кромѣ того $F_{i,1} = F_i cos(F_i, \Delta s_i) + \varepsilon_i$, гдѣ ε_i есть нѣкоторая безк. мал. вел. и Δs_i эквивалентно $r_i\Delta\theta$, слѣдовательно:

$$\overline{F}_i\, \overline{\Delta s}_i = F_i \Delta s_i\, cos\,(F_i, \Delta s_i)\ \textit{экв.}\ F_{i,1} r_i \Delta\theta = M_{oz}\,(\overline{F}_i)\,.\,\Delta\theta;$$

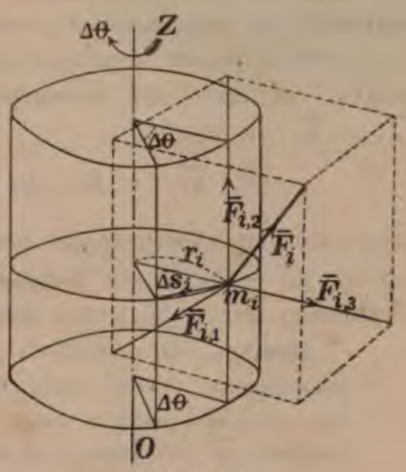
и потому:

$$\Sigma\,\overline{F}_i\,\overline{\Delta s}_i \;\; экв. \;\; \Sigma M_{oz}(\overline{F}_i)\,.\,\Delta\theta = \Delta\theta\,\Sigma\,M_{oz}(\overline{F}_i) = L_{oz}\Delta\theta,$$

ч. т. д.

c) Элементарная работа силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, **въ общемъ случаѣ** *его движенія,* **эквивалентна** *суммѣ элементарныхъ работъ этихъ силъ на поступательномъ перемѣщеніи $\overline{\Delta s}_P$ твердаго тѣла вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P и на вращательномъ перемѣщеніи твердаго тѣла на уголъ $\Delta\theta$ вокругъ соотвѣтствующей данному перемѣщенію* **средней оси** *PA, проходящей черезъ выбранный полюсъ P, т. е.*

$$\Sigma\overline{F}_i\,\overline{\Delta s}_i \;\; экв. \;\; \overline{F}\,\overline{\Delta s}_P + L_{PA}\,\Delta\theta.$$



Черт. 72.

Дѣйствительно, т. к. перемѣщеніе всякой точки твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія есть геометрическая сумма ея **поступательнаго** перемѣщенія $\overline{\Delta s}_P$ вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P и **вращательнаго** перемѣщенія на уголъ $\Delta\theta$ вокругъ неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ средней оси PA, проходящей черезъ выбранный полюсъ, причемъ по теоремѣ (2) работа всякой силы $\overline{F}_i$ на составномъ перемѣщеніи ея точки приложенія m_i равна алгебраической суммѣ работъ той же силы на составляющихъ его перемѣщеніяхъ, то ясно, что элементарная работа всѣхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, въ общемъ случаѣ его движенія, разложится на сумму работъ тѣхъ же силъ при **поступательномъ** перемѣщеніи, вмѣстѣ съ выбраннымъ полюсомъ P, и при его **вращательномъ** перемѣщеніи на уголъ $\Delta\theta$ вокругъ средней оси PA, проходящей чрезъ тотъ же полюсъ, причемъ, какъ мы доказали, первая работа **равна** $\overline{F}\,\overline{\Delta s}_P$, а вторая **эквивалентна** $L_{PA}\,\Delta\theta$; слѣдовательно теорема наша доказана.

Слѣдствіе. *Элементарная работа* **внутреннихъ** *силъ* **твердаго** *тѣла, какъ бы оно ни перемѣщалось, есть безконечно малая вели-*

чина **высшаго** *порядка или* **нуль**, *ибо по доказанной теоремѣ элементарная работа этихъ силъ* **эквивалентна** *выраженію:*

$$\overline{\Delta s}_P \Sigma \overline{f}_i + \Delta\theta \, \Sigma M_{PA}(\overline{f}_i),$$

причемъ $\Sigma \overline{f}_i = 0$ и $\Sigma M_{PA}(\overline{f}_i) = 0$, т. к. внутреннія силы попарно равны, прямопротивоположны и дѣйствуютъ по одной прямой.

Теорема. *Элементарныя работы системъ силъ* $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$, **эквивалентныхъ** *по отношенію къ твердому тѣлу, на одномъ и томъ же его элементарномъ перемѣщеніи* **эквивалентны**, ибо инваріанты такихъ системъ силъ геометрически равны, т. е. $\overline{F}_{\mathrm{I}} = \overline{F}_{\mathrm{II}}$ и $\overline{L}_{0,\mathrm{I}} = \overline{L}_{0,\mathrm{II}}$ и потому

$$\overline{F}_{\mathrm{I}} \,.\, \overline{\Delta s}_P + L_{OA,\mathrm{I}} \Delta\theta = \overline{F}_{\mathrm{II}} \, \overline{\Delta s}_P + L_{OA,\mathrm{II}} \Delta\theta \,;$$

слѣдовательно элементарныя работы такихъ системъ силъ на одномъ и томъ же перемѣщеніи твердаго тѣла могутъ отличаться только на безконечно малую величину **высшаго** порядка.

Примѣръ. *Элементарная работа силъ тяжести при всякомъ элементарномъ перемѣщеніи* **тяжелаго** *твердаго тѣла* **эквивалентна** *элементарной работѣ вѣса p этого тѣла на вертикальномъ перемѣщеніи* $\overline{\Delta h}_c$ *его центра тяжести, т. е. эквивалентна произведенію* $\pm\, p\, \Delta h_c$, *гдѣ знакъ (+) надо брать при* **опусканіи** *центра тяжести c, а знакъ (—) при его* **поднятіи**.

Дѣйствительно, мы знаемъ, что система силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ твердаго тѣла, эквивалентна вѣсу $\overline{p} = \Sigma \overline{p}_i$ твердаго тѣла, приложенному къ его центру тяжести c и потому элементарная работа этой системы силъ будетъ эквивалентна элементарной работѣ вѣса $\overline{p}$ на элементарномъ перемѣщеніи $\overline{\Delta s}_c$ его точки приложенія c, т. е.—произведенію $\pm\, p\, \Delta h_c$.

3) *Элементарною работою вообще* **всякой системы** *силъ называется алгебраическая сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ данной системы, т. е.*

$$\Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s}_i = \Sigma\, F_i \Delta s_i \cos (F_i \Delta s_i)$$

Теорема. *Элементарная работа силъ* **взаимодѣйствія двухъ** *матеріальныхъ точекъ* m_i, m_k, *т. е. двухъ силъ* $\overline{f}_{i,k}$, $\overline{f}_{k,i}$, *равныхъ, прямопротивоположныхъ, дѣйствующихъ по прямой соединяющей точки* m_i, m_k *и зависящихъ лишь отъ разстоянія* $r_{i,k}$ *между этими точками*, **эквивалентна** *произведенію* $\pm\, f(r_{i,k})\, \Delta r_{i,k}$, *въ ко-*

торомъ $f(r_{i,k}) = f_{i,k} = f_{k,i}$ *есть функція, выражающая зависимость силъ взаимодѣйствія отъ разстоянія* $r_{i,k}$ *между матеріальными точками, причемъ знакъ* (+) *надо брать при силахъ* **отталкиванія**, *а знакъ* (—)—*при силахъ* **притяженія**.

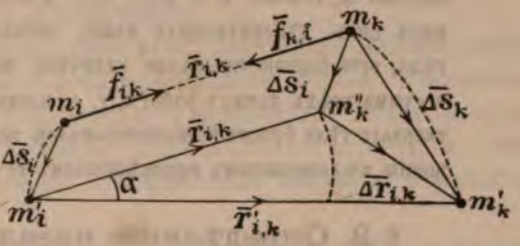
Дѣйствительно (черт. 73)

$$\overline{f}_{i,k}\,\overline{\Delta s}_i + \overline{f}_{k,i}\,\overline{\Delta s}_k = f_{i,k}\,\Delta s_i \cos(\Delta s_i, f_{i,k}) + f_{k,i}\,\Delta s_k \cos(\Delta s_k, f_{k,i})$$

$$= f_{i,k}\left[\pm \Delta s_i \cos(\Delta s_i, r_{i,k}) \mp \Delta s_k \cos(\Delta s_k, r_{i,k})\right] =$$

$$= \mp f(r_{i,k})\left\{\Delta s_k \cos(\Delta s_k, r_{i,k}) - \Delta s_i \cos(\Delta s_i, r_{i,k})\right\},$$

гдѣ верхній знакъ надо брать при силахъ **притяженія**, а нижній— при силахъ **отталкиванія**, ибо при силахъ притяженія направленія $\overline{f}_{i,k}$ и $\overline{r}_{i,k}$ совпадаютъ, а направленія $\overline{f}_{k,i}$ и $\overline{r}_{i,k}$ противоположны, при силахъ же отталкиванія наоборотъ; кромѣ того выраженіе, стоящее въ послѣднихъ скобкахъ, есть не что иное, какъ проекція геометрической разности:



Черт. 73.

$$\overline{\Delta s}_k - \overline{\Delta s}_i = \overline{m''_k\,m'_k} = \overline{r'}_{i,k} - \overline{r}_{i,k}$$

на направленіе $\overline{r}_{i,k}$ и потому

$$\{\Delta s_k \cos(\Delta s_k, r_{i,k}) - \Delta s_i \cos(\Delta s_i, r_{i,k})\} = \{r'_{i,k}\cos\alpha - r_{i,k}\}$$

$$= \{(r_{i,k} + \Delta r_{i,k})\cos\alpha - r_{i,k}\} =$$

$$= \{\Delta r_{i,k} - \Delta r_{i,k}(1-\cos\alpha) - r_{ik}(1-\cos\alpha)\} =$$

$$= \left\{\Delta r_{i,k} - 2(r_{i,k} + \Delta r_{i,k})\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\},$$

т. е. это выраженіе **эквивалентно** $\Delta r_{i,k}$; слѣдовательно:

$$\overline{f}_{i,k}\,\overline{\Delta s}_i + f_{k,i}\,\overline{\Delta s}_k \text{ экв. } \pm f(r_{i,k})\,\Delta r_{i,k},$$

причемъ знакъ (+) надо брать при силахъ отталкиванія, а знакъ (—) при силахъ притяженія, ч. т. д.

Примѣръ. При притяженіи по закону *Ньютона*: прямопропорціонально массамъ м. точекъ и обратно пропорціонально квадрату разстоянія между ними

$$f(r_{i,k}) = \frac{km_i m_k}{r_{i,k}^2},$$

слѣдовательно элементарная работа такихъ силъ взаимодѣйствія между двумя матеріальными точками эквивалентна

$$-k\frac{m_i m_k}{r_{i,k}^2}\Delta r_{i,k}.$$

Примѣчаніе. Изъ послѣдней теоремы мы снова убѣждаемся, что *элементарная работа внутреннихъ силъ твердаго тѣла есть безконечно-малая величина высшаго порядка*, ибо твердое тѣло есть неизмѣняемая система м. точекъ, т. е. $\Delta r_{i,k} = 0$ и потому элементарная работа внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ между любыми двумя точками m_i, m_k твердаго тѣла, есть безконечно-малая величина высшаго порядка, а слѣдовательно и сумма всѣхъ такихъ работъ, т. е. элементарная работа внутреннихъ силъ твердаго тѣла будетъ безконечно-малою величиною высшаго порядка по отношенію къ возможнымъ перемѣщеніямъ точекъ твердаго тѣла.

§ 2. Опредѣленіе идеальныхъ связей.

Матеріальная точка называется **свободною**, когда ея перемѣщенія не ограничены никакими условіями. Всякое ограниченіе свободы м. точки или системы м. точекъ мы будетъ называть **связью** (*liaison*).

Всякая связь сказывается нѣкоторыми **геометрическими** условіями, которымъ должны удовлетворять перемѣщенія м. точки или системы м. точекъ.

Напр. м. точка должна оставаться на нѣкоторой поверхности или линіи, разстоянія между двумя м. точками не должны измѣняться, и т. д.

Безконечно-малыя перемѣщенія м. точекъ, удовлетворяющія геометрическимъ условіямъ, налагаемымъ на нихъ данною связью или, какъ говорятъ еще, **совмѣстимыя** съ данною связью, для краткости мы будемъ называть **возможными перемѣщеніями** такихъ точекъ; другими словами, это суть безконечно малые векторы, соединяющіе два возможныя безконечно близкія положенія каждой изъ точекъ данной системы.

Напр. Если м. точка должна оставаться на нѣкоторой шаровой поверхности, то ея возможныя перемѣщенія будутъ совпадать со всевозможными безконечно-малыми хордами, выходящими изъ даннаго положенія м. точки.

Если двѣ м. точки связаны неизмѣняемымъ стержнемъ, то возможныя перемѣщенія такихъ матеріальныхъ точекъ будутъ совпадать съ векторами, соединяющими соотвѣтственные концы этого стержня при двухъ его безконечно-близкихъ положеніяхъ.

Связи бываютъ **удерживающія** и **неудерживающія**. При **удерживающей** связи м. точки не могутъ съ нея сходить, при **неудерживающей** же связи существуютъ такія возможныя перемѣщенія, при которыхъ точки сходятъ со связи и становятся **свободными**.

Такимъ образомъ при **неудерживающей** связи надо различать два рода возможныхъ перемѣщеній м. точекъ: **несвободныя возможныя** перемѣщенія, при которыхъ м. точки не сходятъ со связи и **свободныя возможныя** перемѣщенія, при которыхъ м. точки сходятъ со связи и становятся **свободными**.

Напр. 1) Если м. точка находится на неудерживающей шаровой поверхности, съ которой она можетъ сходить во внѣшнюю сторону, то возможныя перемѣщенія по шаровой поверхности суть **несвободныя** возможныя перемѣщенія этой м. точки, а возможныя перемѣщенія при которыхъ м. точка сходитъ съ шаровой поверхности суть **свободныя** возможныя перемѣщенія этой точки.

2) Если двѣ м. точки связаны гибкою нерастяжимою нитью, то это есть связь **неудерживающая**, причемъ возможныя перемѣщенія такихъ двухъ м. точекъ, когда нить остается натянутою, будутъ **несвободными** возможными перемѣщеніями этихъ точекъ, а возможныя перемѣщенія, при которыхъ разстоянія между этими двумя точками становятся менѣе длины нити, будутъ **свободными** возможными перемѣщеніями этихъ точекъ.

Мы замѣтили, что всякая связь сказывается нѣкоторыми геометрическими условіями, налагаемыми ею на м. точку или систему м. точекъ и потому, если силы приложенныя къ несвободнымъ м. точкамъ или другія причины (свойство инерціи) стремятся сообщить имъ движенія, не удовлетворяющія этимъ условіямъ, то со стороны связи появляются нѣкоторыя силы, называемыя **реакціями** связи, которыя, присоединяясь къ даннымъ силамъ, заставляютъ несвободныя м. точки при ихъ движеніяхъ удовлетворять геометрическимъ условіямъ связи.

Данныя силы или силы, непосредственно приложенныя къ несвободнымъ м. точкамъ, мы условились называть еще **активными** силами въ отличіе отъ реакцій связи, которыя принадлежатъ къ разряду силъ **пассивныхъ**, т. к. онѣ не непосредственно задаются, а опредѣляются въ зависимости отъ активныхъ силъ, кинематиче-

скаго состоянія системы и геометрическихъ условій связи, а при **физическихъ** выполненіи связи зависятъ еще отъ **рода** механизма и **физическихъ** свойствъ матеріала выбраннаго для воспроизведенія связи.

Мы будемъ называть удерживающую или неудерживающую связь **идеальною**, *когда элементарная работа ея реакцій на всѣхъ* **возможныхъ** *перемѣщеніяхъ точекъ системы, другими словами,* **возможная работа** *ея реакцій равна* **нулю** *или безконечно-малой величинѣ* **высшаго** *порядка по отношенію къ этимъ возможнымъ перемѣщеніямъ, т. е.:*

$$\Sigma\,\overline{R_i}\,\overline{\Delta s_i} = R_i\,\Delta s_i \cos(R_i, \Delta s_i) = \begin{cases} O \text{ или} \\ \Sigma\,\varepsilon_i\,\Delta s_i, \end{cases}$$

причемъ **неудерживающая** *идеальная связь не можетъ оказывать реакцій на* **свободныхъ** *возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы.*

Такія связи **физически** можно выполнить лишь болѣе или менѣе **приближенно** и потому мы называемъ ихъ **идеальными.**

Поясним теперь высказанное **общее** опредѣленіе **идеальныхъ** связей нѣсколькими примѣрами и покажемъ, что всѣ приведенныя нами ранѣе опредѣленія подобныхъ связей суть частные случаи этого **общаго** опредѣленія.

Примѣры. 1) *Идеально гладкія удерживающія или неудерживающія м. точку поверхности и линіи суть* **идеальныя** *связи*, ибо реакціи такихъ поверхностей и линій нормальны къ нимъ и потому возможныя перемѣщенія м. точки въ случаѣ **удерживающихъ** поверхностей и линій и несводобныя возможныя перемѣщенія м. точки въ случаѣ **неудерживающихъ** поверхностей и линій, какъ безконечно-малыя хорды, составляютъ съ реакціями идеально гладкихъ поверхностей и линій углы $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, безконечно-мало отличающіеся отъ прямого угла; слѣдовательно возможная работа силъ реакцій такихъ поверхностей и линій

$$\overline{R}\,\overline{\Delta s} = R\,\Delta s \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$$

равна или точно нулю (*для плоскостей и прямыхъ линій*), или безконечно-малой величинѣ **высшаго** порядка относительно возможныхъ перемѣщеній; наконецъ на **свободныхъ** возможныхъ перемѣщеніяхъ м. т. неудерживающія поверхности и линіи не могутъ оказывать реакцій; слѣдовательно идеально гладкія удерживающія и неудерживающія м. точку поверхности и линіи удовлетворяютъ общему опредѣленію идеальныхъ связей, ч. т. д.

2) **Идеально** *твердое тѣло или какъ мы говорили просто* **твердое** *тѣло, т. е. неизмѣняемая система м. точекъ, есть систета м. точекъ, связанныхъ* **идеальною, удерживающею** *связью*, ибо мы доказали, что для такой системы м. точекъ возможная работа ея силъ реакцій, въ данномъ случаѣ—**внутреннихъ** силъ, есть безконечно-малая величина **высшаго** порядка, по отношенію къ возможнымъ перемѣщеніямъ точекъ твердаго тѣла.

3) **Идеальная** *неподвижная точка тв. тѣла есть* **идеальная удерживающая** *связь*, ибо по опредѣленію реакціи такой точки приводятся къ силѣ, приложенной къ твердому тѣлу въ **этой же** точкѣ, причемъ она остается неподвижною каковы бы ни были силы, приложенныя къ твердому тѣлу; слѣдовательно возможная работа силъ реакцій идеальной неподвижной точки твердаго тѣла равна нулю, ч. т. д.

4) **Идеально** *гладкая неподвижная ось скольженія и вращенія тв. тѣла есть* **идеальная удерживающая** *связь* ибо реакціи такой оси, какъ мы ее опредѣлили, приводятся къ силамъ приложенымъ къ твердому тѣлу въ точкахъ этой оси и къ ней **перпендикулярнымъ**; слѣдовательно возможная работа этихъ силъ равна нулю.

5) **Идеально** *гибкая, нерастяжимая нить, связывающая двѣ м. точки есть* **идеальная неудерживающая** *связь*, ибо возможная работа реакцій такой нити на **несвободныхъ** перемѣщеніяхъ м. точекъ, т. е. когда нить остается натянутою, будетъ безконечно-малою величиною высшаго порядка, т. к. длина нерастяжимой нити не измѣняется, на **свободныхъ** же возможныхъ перемѣщеніяхъ м. точекъ, т. е. когда нить не натянута, идеально гибкая нить не можетъ оказывать реакцій по опредѣленію такой нити.

6) *Шарнирное сопряженіе двухъ твердыхъ тѣлъ* **идеальными** *цилиндрическимъ или сферическимъ шарниромъ есть* **идеальная связь**, ибо силы реакцій **идеальнаго цилиндрическаго** шарнира, по опредѣленію приводятся къ силамъ, попарно равнымъ, прямопротивоположнымъ и приложеннымъ къ сопряженнымъ тѣламъ въ точкахъ **геометрической** оси идеальнаго цилиндрическаго шарнира, а реакціи **идеальнаго сферическаго** шарнира—къ двумъ равнымъ и прямопротивоположнымъ силамъ, приложеннымъ къ сопряженнымъ тѣламъ въ **центрѣ** идеальнаго сферическаго шарнира, и потому работа этихъ силъ на всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ сопряженныхъ тѣлъ будетъ равна нулю.

Примѣчаніе. Реакціи всякой **физической** связи можно разложить на реакціи соотвѣтствующей ей **идеальной** связи, удовлетворяющей тѣмъ же геометрическимъ условіямъ и нѣкоторыя **пассивныя** силы (напр. силы тренія), зависящія отъ рода механизма и физическихъ свойствъ тѣлъ выбранныхъ для воспроизведенія данной связи; присоединивъ затѣмъ послѣднія пассивныя силы къ силамъ, непосредственно

приложеннымъ къ системѣ, мы можемъ смотрѣть на данную физическую связь, какъ на идеальную, откуда ясно значеніе понятія объ идеальныхъ связяхъ и изученія условій равновѣсія системы м. точекъ связанныхъ идеальными связями.

§ 3. Начало возможныхъ перемѣщеній.

Начало возможныхъ перемѣщеній можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Для равновѣсія м. точки или системы м. точекъ, связанныхъ **удерживающими идеальными** *связями, необходимо и достаточно, чтобы* **возможная работа** *всѣхъ* **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ такимъ точкамъ, была равна* **нулю** *или безконечно малой величинѣ* **высшаго** *порядка относительно* **возможныхъ** *перемѣщеній этихъ точекъ, т. е.*

$$\Sigma \overline{F}_i \overline{\Delta s}_i = \Sigma F_i \Delta s_i \cos(F_i \Delta s_i) = \begin{cases} 0 \text{ или} \\ \Sigma \varepsilon_i \Delta s_i \end{cases}$$

Для **неудерживающей идеальной** *связи то же условіе является* **необходимымъ** *на всѣхъ* **несвободныхъ** *возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы и кромѣ того воображаемая работа активныхъ силъ на* **свободныхъ** *возможныхъ перемѣщеніяхъ тѣхъ же точекъ не должна быть положительна, т. е. для такихъ перемѣщеній* $\Sigma \overline{F}_i \overline{\Delta s}_i \leqslant 0$.

Для доказательства этого общаго начала установимъ предварительно слѣдующія три почти очевидныя положенія.

Положеніе А. *Если къ* **свободной, покоющейся** *м. точкѣ приложить силу* $\overline{F}$, *то м. точка придетъ въ движеніе, причемъ элементарная работа этой силы*

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F \Delta s \cos(F, \Delta s)$$

на безконечно маломъ перемѣщеніи $\overline{\Delta s}$ *ея точки приложенія т будетъ* **болѣе нуля** *и* **перваго порядка** *относительно этого перемѣщенія* $\overline{\Delta s}$.

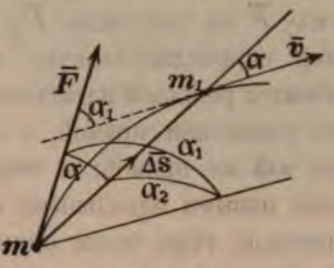
Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ элементарное перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$ м. точки пойдетъ по направленію силы $\overline{F}$ или будетъ составлять съ нею (черт. 73) безконечно малый уголъ α, ибо по истеченіи промежутка времени Δt скорость точки $\overline{v}$ будетъ **геометрически** эквивалентна

$$\overline{u}\,\Delta t = \frac{\overline{F}}{m}\,\Delta t,$$

т. е. будетъ составлять безконечно малый уголъ α_1 съ направленіемъ силы $\overline{F}$, но направленіе скорости, совпадая съ направленіемъ касательной къ траэкторіи, образуетъ безконечно-малый уголъ α_2 съ направленіемъ вектора перемѣщенія $\overline{\Delta s}$ м. точки; слѣдовательно уголъ $\alpha = \angle (F, \Delta s)$, удовлетворяя неравенству: $\alpha < \alpha_1 + \alpha_2$, будетъ тоже **безконечно малъ** т. е.

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F\,\Delta s \cos(F, \Delta s) =$$

$$= F\,\Delta s \cos\alpha > 0$$



Черт. 74.

и **перваго** порядка относительно Δs.

Положеніе Б. *На всякое* **несвободное** *состояніе м. точки можно смотрѣть, какъ на* **свободное,** *если къ дѣйствующимъ на м. точку* **активнымъ** *силамъ присоединить еще нѣкоторыя* **пассивныя силы: реакціи связи,** *замѣняющія собою присутствіе этой послѣдней.*

Дѣйствительно, если къ **свободной** м. точкѣ m приложить силу $\overline{F}$, то м. точка получитъ ускореніе $\overline{u}$, удовлетворяющее равенству:

$$m\overline{u} = \overline{F},$$

если же м. точка **несвободна,** то можетъ случиться, что такое ускореніе будетъ несовмѣстимо со связью и м. точка подъ дѣйствіемъ **той же** активной силы $\overline{F}$ получитъ нѣкоторое **другое** ускореніе $\overline{u}$, не удовлетворяющее написанному геометрическому равенству,но въ такомъ случаѣ всегда можно подобрать такую силу $\overline{R}$, что

$$m\overline{u} = \overline{F} + \overline{R}$$

и тогда на м. точку можно смотрѣть, какъ на **свободную** м. точку, находящуюся подъ дѣйствіемъ совокупности силъ $\overline{F}$ и $\overline{R}$; эта сила $\overline{R}$, замѣняющая собою присутствіе связи, называется реакціей этой послѣдней и положеніе наше доказано.

Положеніе В. *Если къ покоющейся несвободной м. точкѣ, связанной* **неудерживающею** *идеальною связью, приложить силу, составляющую* **острый** *уголъ съ однимъ изъ ея* **свободныхъ** *возможныхъ перемѣщеній, то м. точка придетъ въ движеніе.*

Дѣйствительно, ограничивъ свободу м. точки введеніемъ еще новыхъ идеальныхъ связей такъ, чтобы она могла перемѣщаться только по направленію прямой, совпадающей съ направленіемъ даннаго свободнаго возможнаго перемѣщенія и разложивъ приложенную къ м. точкѣ силу $\overline{F}$ на двѣ силы: $\overline{F}_1$, направленную по этой прямой и $\overline{F}_2$, къ ней перпендикулярную, мы знаемъ, что послѣдняя сила уравновѣсится реакціей идеальныхъ связей, не дозволяющихъ м. точкѣ сойти съ указанной прямой, а сила $\overline{F}_1$ приведетъ м. точку въ движеніе по той же прямой; т. обр. даже при ограниченіи свободы м. точки еще новыми идеальными связями она приходитъ въ движеніе; слѣдовательно тѣмъ болѣе она не можетъ оставаться въ равновѣсіи, будучи связана лишь данною неудерживающею идеальною связью.

Докажемъ теперь **необходимость** и **достаточность** высказаннаго нами **общаго** начала для равновѣсія системы м. точекъ, связанныхъ **идеальными** связями.

а) Положимъ, что данная система м. точекъ m_i, связанныхъ идеальными удерживающими или неудерживающими связями, остается въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ системы приложенныхъ къ нимъ активныхъ силъ $\overline{F}_i$; въ такомъ случаѣ, приложивъ къ каждой точкѣ m_i еще дѣйствующую на нее силу реакціи связей $\overline{R}_i$, замѣняющую присутствіе этихъ послѣднихъ, мы, на основаніи **положенія Б**, можемъ смотрѣть на точку m_i какъ на **свободную** м. точку, находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ двухъ силъ $\overline{F}_i$ и $\overline{R}_i$, а въ такомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, необходимо

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0;$$

помноживъ обѣ части этого равенства **геометрически** на одно изъ возможныхъ перемѣщеній $\overline{\Delta s_i}$ точки m_i и просуммировавъ полученныя геометрическія произведенія на всѣ точки m_i данной системы м. точекъ, мы получимъ:

$$\Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} + \Sigma\, \overline{R}_i \overline{\Delta s_i} = 0, \text{ т. е. } \Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} = -\,\Sigma\, \overline{R}_i \overline{\Delta s_i}$$

Если теперь мы имѣемъ идеальную связь **удерживающую**, то по опредѣленію возможная работа ея силъ реакціи $\Sigma\, \overline{R}_i \overline{\Delta s_i}$ есть нуль или безконечно малая величина высшаго порядка по отношенію къ возможнымъ перемѣщеніямъ точекъ системы и потому необходимо

$$\Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} = 0 \text{ или безк. мал. вел. \textbf{высшаго} пор. } \Sigma \varepsilon_i \Delta s_i.$$

Если же идеальная связь **неудерживающая**, то то же заключеніе остается справедливымъ для **несвободныхъ** возможныхъ перемѣщеній, на которыхъ реакціи неудерживающей связи удовлетворяютъ тому же условію, какъ и реакціи удерживающей связи; кромѣ того, на основаніи **положенія В**, при равновѣсіи системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающею** идеальною связью, равнодѣйствующая $\overline{F}_i$ активныхъ силъ, приложенныхъ къ каждой точкѣ m_i, не можетъ составлять **острыхъ** угловъ ни съ однимъ изъ **свободныхъ** возможныхъ перемѣщеній $\overline{\Delta s_i}$ этой точки; слѣдовательно для такихъ перемѣщеній

$$\Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} = \Sigma\, F_i \Delta s_i \cos\,(F_i, \Delta s_i) = 0 \text{ или } < 0$$

т. е. при равновѣсіи системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающею** идеальною связью, воображаемая работа активныхъ силъ на **свободныхъ** возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы необходимо должна быть или равна **нулю**, или **отрицательна**, т. е. не можетъ быть положительна.

b) Положимъ теперь, что къ данной **покоющейся** системѣ м. точекъ, связанныхъ удерживающими или неудерживающими, **идеальными** связями, приложена система активныхъ силъ $\overline{F}_i$, удовлетворяющая условію, что **возможная** работа этихъ силъ $\Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s}$, есть нуль, или безк. мал. в. **высшаго** порядка, или менѣе нуля, т. е.

$$\Sigma\, \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} \begin{cases} = 0, \\ = \Sigma\, \varepsilon_i\, \Delta s_i, \\ < 0, \end{cases}$$

докажемъ, что въ такомъ случаѣ система м. точекъ не можетъ придти въ движеніе.

Дѣйствительно, приложивъ къ каждой точкѣ m_i кромѣ дѣйствующей на нее активной силы $\overline{F}_i$ еще реакцію связи $\overline{R}_i$, мы, на основаніи **положенія Б**, можемъ смотрѣть на эти точки, какъ на **свободныя** и потому, если бы точка m_i пришла въ движеніе, то на основаніи **положенія А**, элементарная работа приложенныхъ къ ней силъ:

$$(\overline{F}_i + \overline{R}_i)\, \overline{\Delta s_i} = \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} + \overline{R}_i \overline{\Delta s_i}$$

была бы **положительна** и **перваго порядка** относительно элемен-

Дѣйствительно, ограничивъ свободу м. точки введеніемъ еще новыхъ идеальныхъ связей такъ, чтобы она могла перемѣщаться только по направленію прямой, совпадающей съ направленіемъ даннаго свободнаго возможнаго перемѣщенія и разложивъ приложенную къ м. точкѣ силу $\overline{F}$ на двѣ силы: $\overline{F}_1$, направленную по этой прямой и $\overline{F}_2$, къ ней перпендикулярную, мы знаемъ, что послѣдняя сила уравновѣсится реакціей идеальныхъ связей, не дозволяющихъ м. точкѣ сойти съ указанной прямой, а сила $\overline{F}_1$ приведетъ м. точку въ движеніе по той же прямой; т. обр. даже при ограниченіи свободы м. точки еще новыми идеальными связями она приходитъ въ движеніе; слѣдовательно тѣмъ болѣе она не можетъ оставаться въ равновѣсіи, будучи связана лишь данною неудерживающею идеальною связью.

Докажемъ теперь **необходимость** и **достаточность** высказаннаго нами **общаго** начала для равновѣсія системы м. точекъ, связанныхъ **идеальными** связями.

a) Положимъ, что данная система м. точекъ m_i, связанныхъ идеальными удерживающими или неудерживающими связями, остается въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ системы приложенныхъ къ нимъ активныхъ силъ $\overline{F}_i$; въ такомъ случаѣ, приложивъ къ каждой точкѣ m_i еще дѣйствующую на нее силу реакціи связей $\overline{R}_i$, замѣняющую присутствіе этихъ послѣднихъ, мы, на основаніи **положенія Б**, можемъ смотрѣть на точку m_i какъ на **свободную** м. точку, находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ двухъ силъ $\overline{F}_i$ и $\overline{R}_i$, а въ такомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, необходимо

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0;$$

помноживъ обѣ части этого равенства **геометрически** на одно изъ возможныхъ перемѣщеній $\overline{\Delta s_i}$ точки m_i и просуммировавъ полученныя геометрическія произведенія на всѣ точки m_i данной системы м. точекъ, мы получимъ:

$$\Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s_i} + \Sigma\, \overline{R}_i\, \overline{\Delta s_i} = 0, \text{ т. е. } \Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s_i} = -\Sigma\, \overline{R}_i\, \overline{\Delta s_i}$$

Если теперь мы имѣемъ идеальную связь **удерживающую**, то по опредѣленію возможная работа ея силъ реакціи $\Sigma\, \overline{R}_i\, \overline{\Delta s_i}$ есть нуль или безконечно малая величина высшаго порядка по отношенію къ возможнымъ перемѣщеніямъ точекъ системы и потому необходимо

$$\Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s_i} = 0 \text{ или безк. мал. вел. **высшаго** пор. } \Sigma \varepsilon_i\, \Delta s_i.$$

Если же идеальная связь **неудерживающая**, то то же заключенiе остается справедливымъ для **несвободныхъ** возможныхъ перемѣщенiй, на которыхъ реакцiи неудерживающей связи удовлетворяютъ тому же условiю, какъ и реакцiи удерживающей связи; кромѣ того, на основанiи **положенiя В**, при равновѣсiи системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающею** идеальною связью, равнодѣйствующая $\overline{F}_i$ активныхъ силъ, приложенныхъ къ каждой точкѣ m_i, не можетъ составлять **острыхъ** угловъ ни съ однимъ изъ **свободныхъ** возможныхъ перемѣщенiй $\overline{\Delta s_i}$ этой точки; слѣдовательно для такихъ перемѣщенiй

$$\Sigma \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} = \Sigma F_i \Delta s_i \cos(F_i, \Delta s_i) = 0 \text{ или } < 0$$

т. е. при равновѣсiи системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающею** идеальною связью, воображаемая работа активныхъ силъ на **свободныхъ** возможныхъ перемѣщенiяхъ точекъ системы необходимо должна быть или равна **нулю**, или **отрицательна**, т. е. не можетъ быть положительна.

b) Положимъ теперь, что къ данной **покоющейся** системѣ м. точекъ, связанныхъ удерживающими или неудерживающими, **идеальными** связями, приложена система активныхъ силъ $\overline{F}_i$, удовлетворяющая условiю, что **возможная** работа этихъ силъ $\Sigma \overline{F}_i \overline{\Delta s_i}$ есть нуль, или безк. мал. в. **высшаго** порядка, или менѣе нуля, т. е.

$$\Sigma \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} \begin{cases} = 0, \\ = \Sigma \varepsilon_i \Delta s_i, \\ < 0, \end{cases}$$

докажемъ, что въ такомъ случаѣ система м. точекъ не можетъ придти въ движенiе.

Дѣйствительно, приложивъ къ каждой точкѣ m_i кромѣ дѣйствующей на нее активной силы $\overline{F}_i$ еще реакцiю связи $\overline{R}_i$, мы, на основанiи **положенiя Б**, можемъ смотрѣть на эти точки, какъ на **свободныя** и потому, если бы точка m_i пришла въ движенiе, то на основанiи **положенiя А**, элементарная работа приложенныхъ къ ней силъ:

$$(\overline{F}_i + \overline{R}_i)\overline{\Delta s_i} = \overline{F}_i \overline{\Delta s_i} + \overline{R}_i \overline{\Delta s_i}$$

была бы **положительна** и **перваго порядка** относительно элемен-

тарнаго перемѣщенія $\overline{\Delta s_i}$; слѣдовательно и сумма всѣхъ такихъ работъ

$$\Sigma \overline{F_i}\, \overline{\Delta s_i} + \Sigma \overline{R_i}\, \overline{\Delta s_i}$$

необходимо должна удовлетворять тѣмъ же условіямъ, но **элементарное** перемѣщеніе системы конечно должно совпадать съ однимъ изъ ея **возможныхъ** перемѣщеній, а для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній первое слагаемое $\Sigma \overline{F_i}\, \overline{\Delta s_i}$ **по положенію** равно нулю, или безк. мал. вел. **высшаго** порядка, или менѣе нуля, а второе слагаемое $\Sigma \overline{R_i}\, \overline{\Delta s_i}$, **по опредѣленію** идеальныхъ связей, есть нуль или тоже безк. м. вел. **высшаго** порядка; слѣдовательно система м. точекъ не можетъ придти въ движеніе, ч. т. д.

Итакъ, мы доказали, что высказанныя нами **общія** условія равновѣсія м. точки и системъ м. точекъ, связанныхъ **идеальными** удерживающими или неудерживающими связями, не только не **необходимы**, но и **достаточны**.

Для поясненія **начала возможныхъ перемѣщеній** выведемъ изъ него нѣкоторыя доказанныя нами ранѣе условія равновѣсія м. точекъ, твердыхъ тѣлъ и системъ м. точекъ, связанныхъ **идеальными** связями.

1) *Условія равновѣсія свободной м. точки.*

Для свободной м. точки направленія ея возможныхъ перемѣщеній не ограничены никакими условіями; слѣдовательно возможная работа силъ, приложенныхъ къ свободной м. точкѣ $\Sigma \overline{F_i}\, \overline{\Delta s} = \overline{F}\, \overline{\Delta s} = F \Delta s \cos (F, \Delta s)$, не можетъ быть равна нулю или безк. мал. величинѣ высш. порядка, если $\overline{F} = \Sigma \overline{F_i}$ не равно нулю, и потому *для равновѣсія свободной м. точки необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая приложенныхъ къ ней силъ $\overline{F} = \Sigma \overline{F_i} = 0$ была равна нулю.*

2) *Условіе равновѣсія м. точки, находящейся на идеально гладкой удерживающей или неудерживающей поверхности.*

Возможныя перемѣщенія м. точки, находящейся на удерживающей идеально гладкой поверхности совпадаютъ со всевозможными безк. мал. хордами, выходящими изъ даннаго положенія м. точки, причемъ, по началу возможныхъ перемѣщеній, для равновѣсія м. точки необходимо и достаточно, чтобы

$$\Sigma \overline{F_i}\ \Delta s = F \Delta s \cos (F, \Delta s) = 0 \text{ или } \varepsilon \Delta s;$$

раздѣливъ эти равенства на Δs и переходя къ предѣлу при $\Delta s = 0$, ясно, что направленіе силы $\overline{F}$ должно быть перпендикулярно ко всевозможнымъ касательнымъ, проведеннымъ къ поверхности въ данной точкѣ, т. е. *для*

равновѣсія м. точки на идеально гладкой удерживающей поверхности необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая **активныхъ** *силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ, была* **нормальна** *къ поверхности.*

Если поверхность **неудерживающая** и м. точка можетъ сходить съ нея во **внѣшнюю** ея сторону, то для всѣхъ **свободныхъ** возможныхъ перемѣщеній необходимо еще, чтобы

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F\Delta s \cos(F, \Delta s) = 0 \text{ или } < 0$$

т. е. та же равнодѣйствующая должна идти по внутренней нормали.

3) *Условія равновѣсія м. точки, находящейся на идеально гладкой, удерживающей кривой.*

Возможныя перемѣщенія такой точки направлены по безконечно малымъ хордамъ, выходящимъ изъ даннаго положенія м. точки, причемъ, по началу возможныхъ перемѣщеній, для равновѣсія м. точки необходимо и достаточно, чтобы

$$\Sigma\, \overline{F}_i\, \overline{\Delta s} = \overline{F}\,\overline{\Delta s} = F\Delta s \cos(F, \Delta s) = 0 \text{ или } \varepsilon\,\Delta s;$$

раздѣливъ послѣднее равенство на Δs и перехоля къ предѣлу при $\Delta s = 0$, мы придемъ къ заключенію, что направленіе равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$ должно быть перпендикулярно къ касательной, проведенной къ кривой въ разсматриваемой точкѣ, т. е. *для равновѣсія м. точки на* **идеально** *гладкой кривой необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая активныхъ силъ, приложенныхъ къ м. точкѣ лежала въ плоскости,* **нормальной** *къ кривой въ разсматриваемой точкѣ.*

4) *Условія равновѣсія* **свободнаго** *твердаго тѣла.*

На свободное твердое тѣло можно смотрѣть, какъ на систему м. точекъ, связанныхъ **идеальною** удерживающею связью, такъ какъ возможная работа внутреннихъ силъ твердаго тѣла есть безконечно мал. вел. высш. порядка, поэтому для равновѣсія свободнаго твердаго тѣла, по началу возможныхъ перемѣщеній, необходимо и достаточно, чтобы возможная работа приложенныхъ къ нему силъ, эквивалентная, какъ мы доказали, выраженію:

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s_P} + L_{PA}\Delta\theta$$

была равна нулю или безк. мал. вел. высш. порядка; но для свободнаго твердаго тѣла перемѣщенія его полюса P и его вращательныя перемѣщенія вокругъ выбраннаго полюса P вполнѣ произвольны, т. е. $\overline{\Delta s_P}$ и ось PA могутъ принимать всевозможныя направленія, поэтому *для равновѣсія* **свободнаго** *твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\ \overline{F} = \Sigma\overline{F}_i = 0 \text{ и } 2)\ \overline{L}_P = \Sigma\,\overline{M}_P(\overline{F}_i) = 0,$$

т. е. чтобы **инваріанты** *системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, были равны нулю.*

5) *Условія равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго* **идеальную** *неподвижную точку.*

Идеальная неподвижная точка твердаго тѣла есть, какъ мы доказали, идеальная связь; слѣдовательно, по началу возможныхъ перемѣщеній, для равновѣсія такого твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы возможная работа приложенныхъ къ нему активныхъ силъ, эквивалентная произведенію:

$$L_{OA}\,\Delta\theta,$$

гдѣ OA есть произвольная ось, проходящая черезъ неподвижную точку O, а $\Delta\theta$ угловое перемѣщеніе твердаго тѣла вокругъ этой оси, была равна нулю или безк. мал. вел. высшаго порядка, и потому необходимо $L_{OA} = \Sigma M_{OA}(\overline{F}_i) = 0$, но направленіе оси OA можетъ быть вполнѣ произвольно, слѣдовательно $\overline{L}_0 = \Sigma \overline{M}_0(\overline{F}_i) = 0$, т. е. *для равновѣсія твердаго тѣла, имѣющаго* **идеальную** *неподвижную точку необходимо и достаточно, чтобы линейный моментъ системы активныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, относительно этой точки былъ равенъ нулю.*

6) *Принципъ отвердѣнія.*

Для всякой **свободной** системы м. точекъ, т. е. системы м. точекъ, связанныхъ только **между собою**, а не съ **внѣшними** точками, возможны перемѣщенія, какъ для свободнаго твердаго тѣла, если предположить данную систему неизмѣняемою, причемъ возможная работа активныхъ силъ на такихъ перемѣщеніяхъ будетъ эквивалентна выраженію:

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s_P} + \overline{L}_{PA}\,\Delta\theta,$$

гдѣ направленія $\overline{\Delta s_P}$ и оси PA могутъ быть вполнѣ произвольны; поэтому для равновѣсія всякой **свободной** системы м. точекъ, по началу возможныхъ перемѣщеній, необходимо:

$$1)\ \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \overline{L}_P = \Sigma \overline{M}_P(\overline{F}_i) = 0,$$

но вообще эти условія недостаточны, такъ какъ кромѣ указанныхъ возможныхъ перемѣщеній у **свободной** системы м. точекъ могутъ быть еще и другія возможныя перемѣщенія.

Итакъ, *для равновѣсія всякой* **свободной** *системы м. точекъ необходимо, чтобы приложенныя къ нимъ активныя силы удовлетворяли* **двумъ** *условіямъ:*

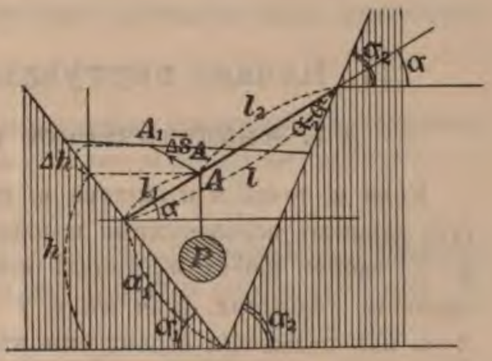
$$1)\ \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \overline{L}_0 = \Sigma \overline{M}_0(\overline{F}_i) = 0$$

т. е. тѣмъ же, какъ и для равновѣсія **свободнаго** *твердаго тѣла, но вообще эти условія* **недостаточны**, что и составляетъ, такъ называемый, «**принципъ отвердѣнія**».

Вообще, для полученія изъ начала возможныхъ перемѣщеній условій равновѣсія системы м. точекъ, связанныхъ **идеальными** *связями, надо приравнять нулю* **возможную работу** *всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ данной системѣ или величину ей* **эквивалентную** *и раздѣливъ обѣ части полученнаго равенства на одно изъ возможныхъ перемѣщеній точекъ системы или вообще на безк. мал. величину имъ эквивалентную, перейти къ предѣлу, когда эта безк. мал. величина обращается въ нуль; тогда мы получимъ конечное уравненіе, выражающее одно изъ условій равновѣсія данной системы.*

Примѣчаніе. Такой пріемъ особенно удобенъ при такъ называемыхъ, **полныхъ** связяхъ, при которыхъ положеніе всей системы вполнѣ опредѣляется въ зависимости отъ величины какого-нибудь **одного** элемента или, какъ говорятъ, «въ зависимости отъ одного **параметра**».

Примѣръ. *Опредѣлить положеніе равновѣсія невѣсомаго стержня, опирающагося своими концами на двѣ идеально гладкія стороны вертикальнаго угла, образующія съ горизонтомъ соотвѣтственно углы* α_1, α_2, *если къ стержню въ нѣкоторой его точкѣ* A *подвѣшенъ грузъ* P.



Черт. 75.

Въ данномъ случаѣ положеніе стержня $l = l_1 + l_2$ вполнѣ опредѣляется въ зависимости отъ одного параметра: угла наклоненія α стержня къ горизонту, связи **идеальны**, и возможная работа активныхъ силъ, т. е. груза P будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$\overline{P}\,\overline{\Delta s_A} = P \Delta s_A \cos(P, \Delta s_A) = - P \Delta h,$$

гдѣ черезъ Δh мы обозначили вертикальное перемѣщеніе точки подвѣса A или измѣненіе ея высоты h надъ горизонтомъ, причемъ изъ чертежа (75) ясно, что

$$h = l_1 \sin\alpha + a_1 \sin\alpha_1$$

и

$$\frac{a_1}{l} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$$

слѣдовательно:

$$h = l_1 \sin\alpha + l \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin\alpha_1$$

и потому

$$\Delta h = \left(l_1 \cos\alpha - l \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right) \Delta\alpha + \varepsilon\Delta\alpha,$$

т. е.

$$\overline{P}\,\overline{\Delta s_A} = -P\Delta h = -P\left[l_1 \cos\alpha - l \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \Delta\alpha - P\varepsilon\Delta\alpha;$$

приравнявъ первый членъ послѣдняго выраженія, т. е. величину, эквивалентную возможной работѣ активныхъ силъ, нулю и раздѣливъ его на $\Delta\alpha$, получимъ конечное уравненіе:

$$l_1 \cos\alpha - l \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 0$$

изъ котораго найдемъ:

$$tg\alpha = \frac{l_1 \cot g\,\alpha_1 - l_2 \cot g\,\alpha_2}{l_1 + l_2}$$

II. Начало виртуальныхъ отклоненій.

§ 1. Аналитическое выраженіе связи.

Если м. точка или система м. точекъ m_i **свободны**, то онѣ могутъ занимать всевозможныя положенія и потому координаты (x_i, y_i, z_i) такихъ точекъ m_i вполнѣ произвольны, т. е. не ограничены никакими условіями, если же м. т. или система м. т. **несвободны**, т. е. ихъ положенія ограничены нѣкоторыми условіями, то координаты этихъ точекъ m_i (x_i, y_i z_i) тоже должны удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ, такъ что каждая связь **аналитически** можетъ быть выражена нѣкоторою зависимостью между координатами связанныхъ ею м. точекъ:

$$\varphi\,(x_1,\ y_1\ z_1;\ \ldots\ x_i,\ y_i,\ z_i;\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n) = 0,$$

причемъ оси (O; X, Y, Z) мы будемъ всегда предполагать **прямоугольными.**

Если связь **удерживающая,** то написанное равенство должно удовлетворяться при **всѣхъ** возможнмхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы, если же связь **неудерживающая,** то тому же равенству удо-

влетворяютъ координаты м. точекъ при **несвободныхъ** возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы, при **свободныхъ** же возможныхъ перемѣщеніяхъ такихъ точекъ написанное равенство нарушается, причемъ, помноживъ его на ± 1, его всегда можно написать такъ, что въ послѣднемъ случаѣ лѣвая часть этого равенства или **функція** связи будетъ **положительна,** т. е.

$$\varphi\,(x_1, y_1, z_1; \ldots x_i, y_i, z_i; \ldots x_n, y_n, z_n) > 0.$$

Примѣры. 1) Если м. точка находится на **удерживающей** шаровой поверхности радіуса r, то уравненіе этой связи можно написать подъ видомъ:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r = 0;$$

если шаровая поверхность **неудерживающая**, и м. точка можетъ сходить во **внѣшнюю** ея сторону, то уравненіе такой неудерживающей связи напишется подъ видомъ:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r = 0$$

причемъ этому равенству удовлетворяютъ **несвободныя** возможныя перемѣщенія точки, а **свободныя** возможныя перемѣщенія будутъ удовлетворять неравенству:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r > 0;$$

если м. точка можетъ сходить во **внутреннюю** сторону шаровой поверхности, то уравненіе такой неудерживающей связи напишется подъ видомъ:

$$r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

причемъ опять этому равенству удовлетворяютъ **несвободныя** возможныя перемѣщенія м. точки, а **свободныя** возможныя перемѣщенія будутъ удовлетворять неравенству:

$$r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0.$$

2) Если двѣ м. точки связаны **неизмѣняемымъ** стержнемъ длины l, то уравненіе этой **удерживающей** связи будетъ:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - l = 0,$$

если же тѣ же м. точки связаны гибкою, нерастяжимою **нитью**, то уравненіе связи напишется подъ видомъ:

$$l - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = 0,$$

причемъ этому равенству удовлетворяютъ **несвободныя** возможныя перемѣщенія м. точекъ, а **свободныя**—удовлетворяютъ **неравенству:**

$$l - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} > 0.$$

Итакъ *всякая* **удерживающая** *связь* **аналитически** *можетъ быть выражена нѣкоторымъ* **равенствомъ:**

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots\ x_i,\ y_i,\ z_i;\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n) = 0,$$

которому должны удовлетворять координаты связанныхъ ею м. точекъ при **всѣхъ** *возможныхъ перемѣщеніяхъ системы, а* **неудерживающая** *связь нѣкоторымъ* **равенствомъ** *и* **неравенствомъ:**

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots\ x_i,\ y_i,\ z_i;\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n) \gtreqless 0,$$

причемъ **равенству** *удовлетворяютъ координаты м. точекъ, связанныхъ* **неудерживающею** *связью, при* **несвободныхъ** *возможныхъ перемѣщеніяхъ такихъ точекъ, а* **неравенству** — *при* **свободныхъ** *возможныхъ перемѣщеніяхъ тѣхъ же точекъ.*

§ 2. Дифференціальные параметры связи.

Дифференціальнымъ параметромъ $\overline{N}_i$ *данной связи*

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots\ x_i,\ y_i,\ z_i;\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n) = 0$$

въ данной *ея точкѣ* m_i *мы будемъ называть векторъ, проекціи котораго на оси координатъ выражаются соотвѣтственными частными производными отъ функціи связи, взятыми по координатамъ* $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, *этой точки* m_i, *т. е.*

$$\overline{N}_i \left\{ \begin{aligned} N_{i,x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \\ N_{i,y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}, \\ N_{i,z} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}; \end{aligned} \right.$$

слѣдовательно

$$N_i = +\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\right)^2}\,.$$

Докажемъ теперь, что *ни* **величина**, *ни* **направленіе** *дифференціальнаго параметра связи въ данной ея точкѣ не зависятъ отъ* **выбора** *координатъ.*

Дѣйствительно, положимъ, что всѣ точки системы, кромѣ разсматриваемой точки m_i (x_i, y_i, z_i) **закрѣплены** въ данныхъ ихъ положеніяхъ, тогда уравненіе **связи** обратится въ уравненіе **поверхности:**

$$\varphi(a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2;\ \ldots\ x_i, y_i, z_i;\ \ldots\ a_n, b_n, c_n) = 0,$$

въ которомъ буквы a, b, c съ соотвѣтственными значками обозначаютъ соотвѣтственно координаты закрѣпленныхъ положеній точекъ m_1, m_2 ... m_n, и дифференціальный параметръ связи $\overline{N}_i$ въ точкѣ m_i совпадетъ съ дифференціальнымъ параметромъ этой поверхности въ той же точкѣ; слѣдовательно (см. гл. II § 4 стр. 75):

1) **направленіе** $\overline{N}_i$ *совпадаетъ съ направленіемъ* **нормали** *къ этой поверхности въ разсматриваемой точкѣ* m_i *и идетъ въ ту сторону, гдѣ функція поверхности становится* **болѣе нуля**, *и*

2) **величина** $\overline{N}_i$ *равна предѣлу отношенія безконечно малаго приращенія* $\Delta\varphi$ *функціи связи при безконечно маломъ перемѣщеніи* Δs_{N_i} *точки* m_i *по направленію ея* **дифференціальнаго параметра** $\overline{N}_i$, *къ самому этому перемѣщенію* Δs_{N_i} *т. е.*

$$N_i = \text{пред.}\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta s_{N_i}}.$$

Напр. 1) Если м. точка должна находиться на **удерживающей** шаровой поверхности радіуса r, то уравненіе связи можно написать подъ видомъ:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r = 0;$$

слѣдовательно въ данномъ случаѣ

$$\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r$$

и

$$\left\{\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}, \\ N_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r}; \\ N_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r}, \end{aligned}\right.$$

и потому

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} = 1,$$

т. е. дифференціальный параметръ такой связи направленъ по продолженію радіуса r м. точки и по величинѣ равенъ единицѣ, что и непосредственно очевидно, ибо въ данномъ случаѣ дифференціальный параметръ долженъ идти по нормали къ шаровой поверхности, въ сторону возрастанія функціи φ, т. е. по продолженію радіуса r м. точки и по величинѣ равенъ пред. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ при перемѣщеніи м. точки на величину Δs по направленію ея радіуса r, причемъ ясно, что при такихъ перемѣщеніяхъ:

$$\Delta\varphi = \Delta s, \text{ слѣдовательно } N = \text{пред. } \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = 1.$$

2) Если двѣ м. точки m_1, m_2 связаны неизмѣняемымъ стержнемъ длины l, то уравненіе такой связи можно написать подъ видомъ:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - l = 0;$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ:

$$\varphi = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - l$$

и

$$\begin{cases} N_{1,x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \dfrac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ N_{1,y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} = \dfrac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ N_{1,z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1} = \dfrac{-(z_2 - z_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \end{cases}$$

т. е.

$$N_1 = 1$$

и направленіе $\overline{N_1}$ идетъ отъ точки m_1 по продолженію стержня; подобнымъ же образомъ убѣдимся, что $N_2 = 1$ и направленіе $\overline{N_2}$ идетъ отъ точки m_2 по продолженію стержня, что и непосредственно очевидно, ибо направленія дифференціальныхъ параметровъ $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$ должны идти по нормалямъ въ точкахъ m_1, m_2 къ шаровымъ поверхностямъ, описываемымъ этими точками, если одну изъ нихъ предположить неподвижною, и величины ихъ должны удовлетворять равенствамъ:

$$N_1 = \text{пред. } \frac{\Delta\varphi}{\Delta s_1} \quad \text{и} \quad N_2 = \text{пред. } \frac{\Delta\varphi}{\Delta s_2}$$

при перемѣщеніяхъ каждой изъ точекъ по направленію l на величину $\Delta s = \Delta s_1 = \Delta s_2$ въ предположеніи, что другая точка остается неподвижною, причемъ ясно, что при такихъ перемѣщеніяхъ $\Delta\varphi = \Delta s$; слѣдовательно:

$$N_1 = N_2 = 1.$$

Если двѣ м. точки m_1, m_2 связаны идеально гибкою, нерастяжимою нитью длины l, то аналитически такая неудерживающая связь выразится условіемъ:

$$l - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \geqq 0,$$

причемъ ея дифференціальные параметры $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, будучи равны единицѣ, пойдутъ не по продолженіямъ нити, а по самой нити, ибо при такихъ свободныхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ m_1, m_2 функція связи становится болѣе нуля.

Введя понятіе о дифференціальныхъ параметрахъ связи во всѣхъ ея точкахъ, нетрудно выразить черезъ нихъ полное безконечно малое приращеніе $\Delta\varphi$ функціи связи

$$\varphi\,(z_1, y_1, z_1; \;\ldots\; x_i, y_i, z_i; \;\ldots\; x_n, y_n, z_n).$$

Дѣйствительно, если каждая точка m_i данной системы n м. точекъ перемѣстится на нѣкоторой векторъ:

$$\overline{\Delta s}_i = \overline{\Delta x}_i + \overline{\Delta y}_i + \overline{\Delta z}_i \text{ или } \Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2},$$

то координаты этой точки послѣ ея перемѣщенія будутъ соотвѣтственно:

$$x_i + \Delta x_i,\; y_i + \Delta y_i,\; z_i + \Delta z_i$$

и функція связи получитъ безконечно малое приращеніе:

$$\Delta\varphi =$$

$$= \Sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\Delta z_i + \varepsilon_i \Delta s_i\right) =$$

$$= \Sigma\,(N_{i,x}\Delta x_i + N_{i,y}\Delta y_i + N_{i,z}\Delta z_i) + \Sigma\,\varepsilon_i \Delta s_i =$$

$$= \Sigma\,\overline{N}_i\,\overline{\Delta s}_i + \Sigma\,\varepsilon_i \Delta s_i,$$

гдѣ черезъ $\varepsilon_i \Delta s_i$ мы обозначили нѣкоторую б. мал. вел. **высшаго** порядка относительно $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}$, а слѣдовательно и относительно каждой изъ безконечно малыхъ величинъ: Δx_i, Δy_i, Δz_i.

Итакъ

$$\Delta\varphi = \Sigma\,\overline{N}_i\overline{\Delta s}_i + \Sigma\,\varepsilon_i \Delta s_i,$$

т. е. полное безконечно малое приращеніе функціи связи при безконечно малыхъ перемѣщеніяхъ всѣхъ ея точекъ m_i **эквивалентно** *суммѣ $\Sigma\,\overline{N}_i\overline{\Delta s}_i$ всевозможныхъ* **геометрическихъ** *произведеній изъ*

дифференціальныхъ параметровъ $\overline{N}_i$ этой связи въ каждой изъ ея точекъ m_i на векторы элементарныхъ перемѣщеній $\overline{\Delta s}_i$ тѣхъ же точекъ.

§ 3. Возможныя или виртуальныя скорости и виртуальныя отклоненія точекъ системы.

Скорости **несвободной** м. точки или системы **несвободныхъ** м. точекъ не могутъ быть произвольными: онѣ должны удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ, налагаемымъ на нихъ связями; скорости, удовлетворяющія этимъ условіямъ или **совмѣстимыя** со связями, мы будемъ называть **возможными** или **виртуальными** скоростями (*vitesses virtuelles*).

Дѣйствительно, если связь **удерживающая**, то для всѣхъ **возможныхъ** перемѣщеній ея точекъ:

$$\Delta\varphi = 0; \text{ слѣд. } \Sigma\, \overline{N}_i \overline{\Delta s}_i + \Sigma\, \varepsilon_i \Delta s_i = 0,$$

если же связь **неудерживающая**, то при **несвободныхъ** возможныхъ перемѣщеніяхъ ея точекъ $\Delta\varphi = 0$, и предыдущее равенство остается справедливымъ, для **свободныхъ** же возможныхъ перемѣщеній $\Delta\varphi > 0$ и потому для такихъ перемѣщеній

$$\Sigma\, \overline{N}_i \overline{\Delta s}_i + \Sigma\, \varepsilon_i \Delta s_i > 0.$$

Положимъ теперь, что системѣ м. точекъ, связанныхъ удерживающею или неудерживающею связью, сообщено нѣкоторое движеніе, въ такомъ случаѣ векторы перемѣщеній всѣхъ точекъ этой системы по истеченіи безконечно малаго промежутка времени Δt будутъ совпадать съ нѣкоторыми изъ возможныхъ перемѣщеній этихъ точекъ, т. е. будутъ удовлетворять вышеприведеннымъ условіямъ; и потому, раздѣливъ предыдущія равенство и неравенство на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, ясно, что *для* **удерживающей** *связи* **возможныя** *или* **виртуальныя скорости** $\overline{v}_i = \text{пред. } \dfrac{\overline{\Delta s}_i}{\Delta t}$ *ея точекъ удовлетворяютъ* **равенству**:

$$\Sigma\, \overline{N}_i \overline{v}_i = \Sigma\, N_i v_i \cos(N_i,\ v_i) = 0,$$

тому же равенству удовлетворяютъ возможныя или виртуальныя скорости точекъ **неудерживающей** *связи при* **несвободныхъ** *воз-*

можныхъ перемѣщеніяхъ этихъ точекъ, при **свободныхъ** *же возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ* **неудерживающей** *связи возможныя или виртуальныя скорости этихъ точекъ должны удовлетворять* **неравенству:**

$$\Sigma\,\overline{N}_i\overline{v}_i = \Sigma\,N_i v_i \cos(N_i,\ v_i) > 0.$$

Отложивъ наконецъ (черт. 76) по возможнымъ или виртуальнымъ скоростямъ $\overline{v}_i$ каждой изъ точекъ m_i данной системы м. точекъ нѣкоторые безк. мал. векторы

$$\overline{\delta s}_i = \overline{v}_i\Delta t\,,$$

пропорціональные виртуальнымъ скоростямъ этихъ точекъ и **геометрически эквивалентные** возможнымъ перемѣщеніямъ:

$$\overline{\Delta s}_i = \overline{v}_i\Delta t + \overline{\varepsilon}_i\,\Delta t = \overline{\delta s}_i + \overline{\varepsilon}_i\Delta t$$

Черт. 76.

тѣхъ же точекъ за этотъ промежутокъ времени Δt, мы будемъ называть такіе векторы **виртуальными отклоненіями** точекъ данной системы, причемъ виртуальныя отклоненія системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающею** связью, геометрически эквивалентныя **несвободнымъ** возможнымъ перемѣщеніемъ такихъ точекъ, мы будемъ называть **несвободными** виртуальными отклоненіями этихъ точекъ, а—эквивалентныя **свободнымъ** возможнымъ перемѣщеніямъ — **свободными** виртуальными отклоненіями тѣхъ же точекъ.

Т. к. возможныя или виртуальныя скорости системы м. точекъ, связанныхъ **удерживающею** связью и виртуальныя скорости при **несвободныхъ** перемѣщеніяхъ точекъ, связанныхъ **неудерживающею** связью, удовлетворяютъ равенствамъ:

$$\Sigma\,\overline{N}_i\overline{v}_i = \Sigma\,N_i v_i \cos(N_i,\ v_i) = 0,$$

то, помноживъ эти равенства на Δt, мы приходимъ къ заключенію, что **виртуальныя** *отклоненія точекъ* **удерживающей** *связи и* **несвободныя виртуальныя** *отклоненія точекъ* **неудерживающей** *связи должны удовлетворять* **равенствамъ:**

$$\Sigma\,\overline{N}_i\overline{\delta s}_i = \Sigma\,N_i\,\delta s_i \cos(N_i,\ \delta s_i) = 0;$$

наконецъ, т. к. виртуальныя скорости точекъ **неудерживающей** связи на ихъ **свободныхъ** возможныхъ перемѣщеніяхъ удовлетворяютъ неравенству:

$$\Sigma \overline{N}_i \overline{v}_i = \Sigma N_i v_i \cos(N_i, v_i) > 0,$$

то поможнивъ обѣ части этого неравенства на Δt, мы убѣждаемся, что **свободныя виртуальныя отклоненія** *точекъ* **неудерживающей** *связи должны удовлетворять* **неравенству:**

$$\Sigma \overline{N}_i \overline{\delta s}_i = \Sigma N_i \delta s_i \cos(N_i, \delta s_i) > 0.$$

§ 4. Второе опредѣленіе идеальныхъ связей и опредѣленіе реакцій идеальныхъ связей.

Введя понятіе о **виртуальныхъ отклоненіяхъ** системы м. точекъ, связанныхъ удерживающими или неудерживающими связями, можно дать **второе** опредѣленіе **идеальныхъ** связей, равносильное высказанному нами ранѣе опредѣленію, а именно:

Удерживающая или неудерживающая связью называется **идеальною**, *когда* **виртуальная работа** *ея силъ реакцій равна нулю, т. е.*

$$\Sigma \overline{R}_i \overline{\delta s}_i = \Sigma R_i \delta s_i \cos(R_i, \delta s_i) = 0.$$

Дѣйствительно, замѣнивъ въ написанныхъ равенствахъ **виртуальныя отклоненія** $\overline{\delta s}_i$ точекъ системы геометрически эквивалентными имъ возможными перемѣщеніями $\overline{\Delta s}_i$ тѣхъ же точекъ:

$$\overline{\Delta s}_i = \overline{\delta s}_i + \overline{\varepsilon}_i \Delta t,$$

мы убѣдимся, что **возможная работа** силъ реакцій такой связи будетъ равна **нулю** или безк. мал. вел. **высшаго** порядка:

$$\Sigma \overline{R}_i \overline{\Delta s}_i = \Sigma R_i \Delta s_i \operatorname{Cos}(R_i, \Delta s_i) = \begin{cases} 0 \text{ или} \\ -\Sigma \overline{R}_i \overline{\varepsilon}_i \Delta t; \end{cases}$$

слѣдовательно такая связь будетъ **идеальная** связь.

Выяснимъ теперь величины и направленія реакцій **идеальной** связи во всѣхъ ея точкахъ m_i.

Мы доказали, что **виртульныя** отклоненія точекъ **удерживающей** связи и **несвободныя** виртуальныя отклоненія точекъ **неудерживающей** связи удовлетворяютъ равенству:

$$\Sigma \overline{N}_i \overline{\delta s}_i = \Sigma N_i \delta s_i \cos(N_i, \delta s_i) = 0$$

въ которыхъ черезъ $\overline{N}_i$ мы обозначили дифференціальный параметръ связи въ данной ея точкѣ m_i, а черезъ $\overline{\delta s}_i$ виртуальное отклоненіе той же точки; съ другой стороны, если связь **идеальна,** то, по опредѣленію идеальныхъ связей, ея реакціи удовлетворяютъ подобному же равенству:

$$\Sigma \overline{R}_i \overline{\delta s}_i = \Sigma R_i \delta s_i \cos (R_i, \delta s_i) = 0.$$

Положимъ теперь, что всѣ точки связи кромѣ выбранной m_i **закрѣплены**; въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли, уравненіе связи обращается въ уравненіе нѣкоторой поверхности и всѣ виртуальныя отклоненія $\overline{\delta s}_i$ точки m_i будутъ лежать въ плоскости, касательной къ этой поверхности въ точкѣ m_i, причемъ реакція $\overline{R}_i$ связи въ той же точкѣ, удовлетворяя равенствамъ $\overline{R}_i \overline{\delta s}_i = R_i \delta s_i \cos (R_i, \delta s_i) = 0$, будетъ перпендикулярна къ этой касательной плоскости, т. е. пойдетъ въ ту или другую сторону по **нормали** въ точкѣ m_i къ указанной поверхности или, что все равно, по **дифференціальному параметру** $\overline{N}_i$ данной связи въ разсматриваемой ея точкѣ m_i; слѣдовательно

$$\overline{R}_i = \lambda_i \overline{N}_i;$$

докажемъ наконецъ, что множители λ_i для всѣхъ точекъ одной и той же идеальной связи будутъ **равны**; съ этою цѣлью допустимъ, что всѣ точки связи кромѣ **двухъ** m_i и m_k закрѣплены; въ такомъ случаѣ виртуальныя отклоненія этихъ двухъ точекъ и реакціи идеальной связи въ этихъ двухъ точкахъ будутъ удовлетворять слѣдующимъ равенствамъ:

$$\overline{R}_i = \lambda_i \overline{N}_i, \quad \overline{R}_k = \lambda_k \overline{N}_k$$

$$\overline{N}_i \overline{\delta s}_i + \overline{N}_k \overline{\delta s}_k = 0 \text{ и } \overline{R}_i \overline{\delta s}_i + \overline{R}_k \overline{\delta s}_k = 0.$$

Поставивъ въ послѣднее равенство вмѣсто $\overline{R}_i$ и $\overline{R}_k$ ихъ выраженія черезъ $\overline{N}_i$ и $\overline{N}_k$ мы получимъ:

$$\lambda_i \overline{N}_i \overline{\delta s}_i + \lambda_k \overline{N}_k \overline{\delta s}_k = 0,$$

причемъ

$$\overline{N}_k \overline{\delta s}_k = - \overline{N}_i \overline{\delta s}_i;$$

слѣдовательно

$$\overline{N}_i \overline{\delta s}_i \, (\lambda_i - \lambda_k) = 0 \text{ или } N_i \delta s_i \cos (N_i, \delta s_i) \, (\lambda_i - \lambda_k) = 0$$

послѣднее равенство, оставаясь справедливымъ при всевозможныхъ направленіяхъ виртуальныхъ отклоненій, можетъ быть удовлетворено лишь при условіи $\lambda_i - \lambda_k = 0$, т. е.

$$\lambda_i = \lambda_k = \lambda, \text{ и } \overline{R}_i = \lambda \overline{N}_i, \text{ ч. т. д.}$$

Итакъ *реакціи* **идеальной** *связи во всѣхъ ея точкахъ направлены въ ту или другую сторону по дифференціальнымъ параметрамъ связи въ этихъ точкахъ и по величинѣ пропорціональны соотвѣтственнымъ дифференціальнымъ параметрамъ т. е.*

$$\overline{R}_i = \lambda \overline{N}_i,$$

причемъ множитель λ опредѣляется въ зависимости отъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ данной системѣ и отъ ея кинематическаго состоянія, такъ, если данная система м. точекъ, связанныхъ нѣсколькими удерживающими или неудерживающими **идеальными** связями, находится **въ равновѣсіи**, то множители λ, соотвѣтствующіе этимъ связямъ, опредѣлятся изъ *уравненій равновѣсія такой системы м. точекъ.*

§ 5. Уравненія равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ идеальными связями.

Мы доказали, что реакціи всякой удерживающей или неудерживающей **идеальной** связи:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1 \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) \gtreqless 0$$

въ каждой ея точкѣ m_i (x_i, y_i, z_i) удовлетворяютъ **геометрическому** равенству: $\overline{R}_i = \lambda \overline{N}_i$, т. е.

$$\left\{\begin{aligned} R_{i,x} &= \lambda N_{i,x} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \\ R_{i,y} &= \lambda N_{i,y} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}; \\ R_{i,z} &= \lambda N_{i,z} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}. \end{aligned}\right.$$

Нетрудно теперь написать уравненія равновѣсія системы n м.

точекъ, связанныхъ удерживающею или неудерживающею **идеальною** связью:

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1 \ldots x_i,\ y_i,\ z_i;\ \ldots\ldots x_n,\ y_n,\ z_n) \gtreqless 0.$$

Дѣйствительно, присоединивъ къ дѣйствующей на каждую м. точку m_i **активной** силѣ $\overline{F}_i$ еще **реакцію** связи $\overline{R}_i$, замѣняющую собою присутствіе связи, мы можемъ смотрѣть на **несвободную** м. точку m_i, какъ на **свободную**, находящуюся въ **равновѣсіи** подъ дѣйствіемъ этихъ **двухъ** силъ; для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0;$$

спроектировавъ обѣ части этого геометрическаго равенства на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O; X, Y, Z) и замѣтивъ, что для **идеальной** связи:

$$R_{i,x} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\ R_{i,y} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_i},\ R_{i,z} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_i},$$

мы получимъ $3n$ уравненій

$$\left\{\begin{aligned} X_i + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} &= 0,\\ Y_i + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} &= 0,\\ Z_i + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\right.$$

присоединивъ къ которымъ уравненіе связи:

$$\varphi\,(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots\ldots x_i,\ y_i,\ z_i \ldots\ldots x_n,\ y_n,\ z_n) = 0$$

будемъ имѣть $(3n + 1)$ уравненій для опредѣленія $(3n + 1)$ неизвѣстныхъ:

1) $3n$ координатъ неизвѣстныхъ положеній равновѣсія всѣхъ точекъ данной системы и
2) неизвѣстнаго множителя λ, опредѣляющаго реакцію данной идеальной связи.

Вообще написанныя $3n + 1$ уравненій, называемыя **уравненіями** равновѣсія системы n м. точекъ, связанныхъ **идеальною** связью,

даютъ возможность по $3n$ изъ $(6n + 1)$ величинъ:

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1; \ldots . X_i,\ Y_i,\ Z_i; \ldots . X_n,\ Y_n,\ Z_n,$$
$$x_1,\ y_1,\ z_1; \ldots . x_i,\ y_i,\ z_i; \ldots . x_n,\ y_n,\ z_n,$$
$$\lambda$$

опредѣлить остальныя $3n + 1$, причемъ если **идеальная** связь **удерживающая**, то соотвѣтствующій ей множитель λ можетъ быть $\gtrless 0$, если же **идеальная** связь **неудерживающая**, то соотвѣтствующій ей множитель λ необходимо долженъ быть **положительнымъ** или равенъ нулю; дѣйствительно, мы доказали, что при равновѣсіи системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающею** идеальною связью, **воображаемая** работа приложенныхъ къ нимъ **активныхъ** силъ на **свободныхъ** возможныхъ перемѣщеніяхъ **(положеніе В.)** должна быть **отрицательна** или равна **нулю**, т. е. для такихъ перемѣщеній:

$$\Sigma\,\overline{F}_i\,\overline{\Delta s_i} \leqslant 0;$$

раздѣливъ обѣ части этого выраженія на Δt и переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, мы получимъ

$$\Sigma\,\overline{F}_i\,\overline{v}_i \leqslant 0;$$

помноживъ затѣмъ обѣ части послѣдняго выраженія на Δt и замѣтивъ, что $\overline{v}_i\,\Delta t = \overline{\delta s_i}$, приходимъ къ заключенію, что

$$\Sigma\,\overline{F}_i\,\overline{\delta s_i} \leqslant 0 \text{ или } \Sigma\,\overline{R}_i\,\overline{\delta s_i} \geqslant 0, \text{ т. к. } \overline{F}_i + \overline{R}_i = 0,$$

но **свободныя** виртуальныя отклоненія удовлетворяютъ неравенству:

$$\Sigma\,\overline{N}_i\,\overline{\delta s_i} > 0;$$

кромѣ того $\overline{R}_i = \lambda\,\overline{N}_i$; слѣдовательно

$$\Sigma\,\overline{R}_i\,\overline{\delta s_i} = \Sigma\lambda\overline{N}_i\,\overline{\delta s_i} = \lambda\Sigma\,\overline{N}_i\,\overline{\delta s_i} \geqslant 0$$

и потому множитель λ необходимо долженъ быть **положительнымъ** или равенъ нулю.

Итакъ *при равновѣсіи системы м. точекъ, связанныхъ* **неудерживающею** *идеальною связью, въ уравненіяхъ равновѣсія множитель λ, не можетъ быть отрицателенъ.*

Примѣчаніе. Помноживъ уравненія равновѣсія системы м. точекъ связанныхъ идеальною **удерживающею** связью на (— 1), мы приходимъ къ заключенію, что при измѣненіи направленій всѣхъ приложенныхъ къ м. точкамъ **активныхъ** силъ на **противоположныя**, безъ измѣненія величинъ этихъ силъ, система останется въ равновѣсіи, причемъ множитель λ тоже измѣнитъ свой знакъ на **противоположный**, при **неудерживающей** же связи равновѣсіе нарушится, ибо въ такомъ случаѣ для равновѣсія системы множитель λ долженъ быть **положительнымъ** или равнымъ нулю.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ систему n м. точекъ, связанныхъ p **идеальными удерживающими** связями:

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, y_1, z_1; \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, y_1, z_1; \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(x_1, y_1, z_1; \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) = 0\end{array}\right.$$

и требуется найти положеніе равновѣсія этой системы м. точекъ, подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ **активныхъ** силъ:

$$\overline{F}_1, \overline{F}_2 \ldots . \overline{F}_i \ldots . \overline{F}_n,$$

проекціи которыхъ на осяхъ координатъ $(O;\ X,\ Y,\ Z)$ суть соотвѣтственно:

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1; \ldots .\ X_i,\ Y_i,\ Z_i; \ldots .\ X_n,\ Y_n,\ Z_n,$$

и — опредѣлить реакціи связей.

Зная, что реакціи каждой изъ данныхъ p идеальныхъ связей на одну изъ точекъ m_i этой системы удовлетворяютъ **геометрическимъ** равенствамъ:

$$\overline{R}_{1,i} = \lambda_1 \overline{N}_{1,i},\ \ \overline{R}_{2,i} = \lambda_2 \overline{N}_{2,i},\ \ldots .\ \overline{R}_{p,i} = \lambda_p \overline{N}_{p,i},$$

въ которыхъ первые значки соотвѣтствуютъ связямъ, а вторые — м. точкамъ, мы можемъ написать **равнодѣйствующую** $\overline{R}_i$ реакцій всѣхъ связей на данную м. точку m_i:

$$\overline{R}_i = \overline{R}_{1,i} + \overline{R}_{2,i} + \ldots + \overline{R}_{p,i} = \lambda_1 \overline{N}_{1,i} + \lambda_2 \overline{N}_{2,i} + \ldots + \lambda_p \overline{N}_{p,i},$$

причемъ проекціи этой равнодѣйствующей на три взаимно перпен-

дикулярныя оси координатъ $(O;\ X,\ Y,\ Z)$ опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\left\{\begin{aligned} R_{i,x} &= \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_i}, \\ R_{i,y} &= \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial\varphi_p}{\partial y_i}, \\ R_{i,z} &= \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial\varphi_p}{\partial z_i} \end{aligned}\right.$$

и потому уравненія равновѣсія каждой точки m_i:

$$X_i + R_{i,x} = 0,\ \ Y_i + R_{i,y} = 0,\ \ Z_i + R_{i,z} = 0$$

дадутъ $3n$ уравненій:

$$(^{**})\quad\left\{\begin{aligned} X_i + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_i} = 0, \\ Y_i + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial\varphi_p}{\partial y_i} = 0, \\ Z_i + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial\varphi_p}{\partial z_i} = 0, \end{aligned}\right.$$

присоединивъ къ которымъ p уравненій связей (*) мы будемъ имѣть $(3n + p)$ уравненій для опредѣленія $(3n + p)$ **неизвѣстныхъ:**

1) $3n$ координатъ искомыхъ положеній равновѣсія всѣхъ точекъ данной системы и

3) p неизвѣстныхъ множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, опредѣляющихъ реакціи каждой связи.

Вообще приведенныя здѣсь $(3n + p)$ равенствъ (*) и (**), называемыя уравненіями равновѣсія системъ n м. точекъ, связанныхъ p **идеальными** связями, даютъ возможность по даннымъ $3n$ изъ входящихъ въ нихъ $(6n + p)$ величинъ опредѣлить остальныя $(3n + p)$, причемъ, *если всѣ связи суть* **удерживающія** *идеальныя связи, то соотвѣтствующіе имъ множители* λ *могутъ быть* **положительны** *или* **отрицательны**, *если же нѣкоторыя изъ связей суть* **неудерживающія, идеальныя** *связи, то подобно предыдущему убѣдимся, что соотвѣтствующіе имъ множители не могутъ быть отрицательны.*

Дѣйствительно, при равновѣсіи системы м. точекъ, связанныхъ **неудерживающими** идеальными связями **воображаемая** работа приложенныхъ къ нимъ **активныхъ** силъ на **свободныхъ** виртуальныхъ отклоненіяхъ точекъ системы должна быть (на основаніи **положенія В**) **отрицательна** или равна нулю, т. е.

$$\Sigma \overline{F}_i \, \overline{\delta s}_i \leqslant 0 \text{ или } \Sigma \overline{R}_i \, \overline{\delta s}_i \geqslant 0,$$

но

$$\overline{R}_i = \overline{R}_{1,i} + \overline{R}_{2,i} + \ldots\ldots + \overline{R}_{p,i} =$$

$$= \lambda_1 \overline{N}_{1,i} + \lambda_2 \overline{N}_{2,i} + \ldots\ldots + \lambda_p \overline{N}_{p.i}$$

слѣдовательно:

$$\Sigma \overline{R}_i \, \overline{\delta s}_i =$$

$$= \lambda_1 \Sigma \overline{N}_{1,i} \overline{\delta s}_i + \ldots\ldots + \lambda_k \Sigma \overline{N}_{k,i} \overline{\delta s}_i + \ldots\ldots + \lambda_p \Sigma \overline{N}_{p,i} \overline{\delta s}_i \geqslant 0 .$$

Положимъ теперь, что связь $\varphi_k \geqslant 0$ **неудерживающая** и вообразимъ систему виртуальныхъ отклоненій, удовлетворяющихъ одному **неравенству**:

$$\Sigma \overline{N}_{k,i} \overline{\delta s}_i > 0$$

и $(p - 1)$ **равенствамъ**:

$$\Sigma \overline{N}_{1,i} \overline{\delta s}_i = 0, \ldots\ldots \Sigma \overline{N}_{p,i} \overline{\delta s}_i = 0;$$

тогда мы получимъ:

$$\Sigma \overline{R}_i \overline{\delta s}_i = \lambda_k \Sigma \overline{N}_{k,i} \overline{\delta s}_i \geqslant 0$$

слѣдовательно множитель λ_k, соотвѣтствующій каждой **неудерживающей** связи $\varphi_k \geqslant 0$, необходимо долженъ быть **положителенъ**, или равенъ **нулю**, т. е. не можетъ быть отрицателенъ, ч. т. д.

Примѣчаніе. Помноживъ выведенныя уравненія равновѣсія (**) системы n м. точекъ, связанныхъ p **идеальными**, **удерживающими** связями на (-1), мы приходимъ къ заключенію, что при измѣненіи **направленій** всѣхъ **активныхъ** силъ, приложенныхъ къ данной системѣ м. точекъ, находящихся въ равновѣсіи, на **противоположныя**, безъ измѣненія величинъ этихъ силъ, равновѣсіе системы не нарушится, причемъ всѣ множители λ измѣнятъ свои знаки на **противоположные**; при **неудерживающихъ** же связяхъ равновѣсіе нарушится, ибо въ такомъ случаѣ для равновѣсія системы множители λ должны быть **положительны** или равны нулю.

§ 6. Начало виртуальныхъ отклоненій.

(*Principe des vitesses virtuelles*).

Это начало, какъ мы раньше сказали, есть лишь другая формулировка начала возможныхъ перемѣщеній, удобная для его **аналитическаго** выраженія и вообще для полученія различныхъ видовъ уравненій равновѣсія системъ м. точекъ, связанныхъ **идеальными** связями; его можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Для равновѣсія системы м. точекъ, связанныхъ **идеальными удерживающими** *связями, необходимо и достаточно, чтобы* **виртуальная** *работа приложенныхъ къ нимъ* **активныхъ** *силъ была равна нулю, т. е.*

$$\Sigma \overline{F}_i\ \overline{\delta s}_i = \Sigma F_i\, \delta s_i \cos (F_i,\ \delta s_i) = 0.$$

При **неудерживающихъ** *идеальныхъ связяхъ то же условіе является* **необходимымъ** *для всѣхъ* **несвободныхъ** *виртуальныхъ отклоненій точекъ системы, кромѣ того для* **свободныхъ** *виртуальныхъ отклоненій* **воображаемая** *работа активныхъ силъ не должна быть положительна, т. е. для такихъ отклоненій:*

$$\Sigma \overline{F}_i\ \overline{\delta s}_i \leqslant 0.$$

Дѣйствительно, замѣнивъ въ написанныхъ выраженіяхъ **виртуальныя отклоненія** $\overline{\delta s}_i$ точекъ системы геометрически эквивалентными имъ **возможными перемѣщеніями** тѣхъ же точекъ:

$$\overline{\Delta s}_i = \overline{\delta s}_i + \overline{\varepsilon}_i\, \Delta t$$

мы убѣдимся, что при указанныхъ условіяхъ **возможная работа** всѣхъ приложенныхъ къ системѣ активныхъ силъ будетъ или равна **нулю,** или безк. мел. вел. **высшаго** порядка, или наконецъ **отрицательна:**

$$\Sigma \overline{F}_i\ \overline{\Delta s}_i = \Sigma F_i\, \Delta s_i \cos (F_i,\ \Delta s_i) \begin{cases} = 0 \text{ или} \\ = -\Sigma \overline{F}_i\, \overline{\varepsilon}_i\, \Delta t, \\ \text{или} < 0 \end{cases}$$

и потому, *по началу возможныхъ перемѣщеній*, система останется въ равновѣсіи.

Укажемъ теперь **аналитическое** выраженіе начала виртуальныхъ отклоненій и выводъ изъ него уравненій равновѣсія системы м. точекъ, связанныхъ **идеальными** связями.

Т. к.

$$\overline{F}_i = \overline{X}_i + \overline{Y}_i + \overline{Z}_i \text{ и } \overline{\delta s}_i = \overline{\delta x}_i + \overline{\delta y}_i + \overline{\delta z}_i$$

то

$$\overline{F}_i\,\overline{\delta s}_i = X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i$$

и

$$\overline{N}_i\,\overline{\delta s}_i = N_{i,x}\,\delta x_i + N_{i,y}\,\delta y_i + N_{i,z}\,\delta z_i =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\delta z_i\,,$$

причемъ начало виртульальныхъ отклоненій **аналитически** можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Для равновѣсія системы n м. точекъ:

$$m_1\,(x_1, y_1, z_1) \ldots . m_i\,(x_i, y_i, z_i) \ldots . m_n\,(x_n, y_n, z_n),$$

связанныхъ p **идеальными, удерживающими** *связями:*

$$(*)\left\{\begin{array}{l} \varphi_1\,(x_1, y_1, z_1; \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \varphi_2\,(x_1, y_1, z_1; \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p\,(x_1, y_1, z_1; \ldots . x_i, y_i, z_i; \ldots . x_n, y_n, z_n) = 0 \end{array}\right.$$

необходимо и достаточно, чтобы **виртуальная** *работа приложенныхъ къ нимъ* **активныхъ** *силъ была равна нулю, т. е.* $\Sigma\,\overline{F}_i\,\overline{\delta s}_i = 0$ *или*

$$(**)\ \Sigma\,(X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i) = 0,$$

причемъ, т. к. виртуальныя отклоненія системы м. точекъ, связанныхъ p **удерживающими** *связями* (*), *удовлетворяютъ p равенствамъ:*

$$\Sigma\,\overline{N}_{1,i}\,\overline{\delta s}_i = 0,\ \Sigma\,\overline{N}_{2,i}\,\overline{\delta s}_i = 0 \ldots \Sigma\,\overline{N}_{p,i}\,\overline{\delta s}_i = 0,$$

въ которыхъ первые значки соотвѣтствуютъ связямъ, а вторые точкамъ системы, то проекціи ($\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$) *виртуальныхъ отклоненій на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ* (*O*; X,

Y, Z) должны удовлетворять p равенствамъ:

$$(***) \begin{cases} \delta\varphi_1 = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0; \\ \delta\varphi_2 = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \delta\varphi_p = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\varphi_p}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_p}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0. \end{cases}$$

Равенство (**) и выражаетъ собою **аналитически** начало виртуальныхъ отклоненій системы n м. точекъ, связанныхъ p **удерживающими** идеальными связями (*), причемъ проекціи виртуальныхъ отклоненій связаны p равенствами (***).

Если нѣкоторыя изъ идеальныхъ связей будутъ **неудерживающими** *напр.*

$$\varphi_k(x_1, y_1, z_1 \;.\;.\;.\; x_i, y_i, z_i; \;.\;.\;.\; x_n, y_n, z_n) \geqslant 0,$$

то вышеприведенныя условія равновѣсія системы м. точекъ, выражаемыя равенствами (*), (**) и (***), *остаются* **необходимыми** *для всѣхъ* **несвободныхъ** *виртуальныхъ отклоненій, т. е. удовлетворяющихъ* **равенству** $\delta\varphi_k = 0$; *кромѣ того для* **свободныхъ** *виртуальныхъ отлоненій, т. е. удовлетворяющихъ* **неравенству:**

$$\delta\varphi_k = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\delta z_i\right) > 0$$

необходимо еще, чтобы виртуальная работа активныхъ силъ $\Sigma\,\overline{F}_i\,\overline{\delta s}_i$ *на такихъ отклоненіяхъ была отрицательна или равна нулю, т. е.*

$$\Sigma\,(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) \leqslant 0.$$

Покажемъ теперь три пріема или способа полученія изъ **аналитическаго** выраженія начала виртуальныхъ отклоненій, т. е. изъ равенствъ (*), (**) и (***) уравненій равновѣсія системы n м. точекъ, связанныхъ p **идеальными** связями.

Первый пріемъ. (*Сбособъ исключенія зависимыхъ проекцій виртуальныхъ отклоненій*). *Выразивъ изъ p уравненій* (***) *p проекцій виртуальныхъ отклоненій черезъ остальныя* (3 n—p) *проекцій и подставивъ эти выраженія въ равенство* (**) *отберемъ въ немъ всѣ*

члены, заключающіе каждую изъ этихъ $(3n - p)$ проекцій, и вынеся каждую изъ нихъ за скобки приравняемъ полученные коэффиціенты нулю, тогда мы получимъ $(3n - p)$ уравненій, присоединивъ къ которымъ p уравненій связей (*) будемъ имѣть $3n$ уравненій съ $3n$ неизвѣстными координатами положеній равновѣсія всѣхъ точекъ данной системы:

$$x_1, y_1, z_1; \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n.$$

Дѣйствительно, $3n$ проекцій (δx_i, δy_i, δz_i) виртуальныхъ отклоненій точекъ системы связаны лишь p равенствами (***), слѣдовательно изъ этихъ равенствъ p проекцій можно выразить черезъ $(3n - p)$ остальныхъ, которыя могутъ быть вполнѣ произвольны безъ нарушенія p равенствъ (***), поэтому первые p проекціи мы будемъ называть **зависимыми**, а вторыя **независимыми** или **произвольными**.

Выразивъ изъ уравненій (***) p зависимыхъ проекцій черезъ $(3n - p)$ независимыхъ проекцій и подставивъ эти выраженія въ равенство (**), отберемъ въ немъ всѣ члены, заключающіе каждую изъ независимыхъ проекцій, и въ каждой группѣ такихъ членовъ вынесемъ общую независимую проекцію за скобку; въ такомъ случаѣ равенство (**) напишется подъ видомъ:

$$\Sigma\left(Q_a\,\delta x_a + Q_b\,\delta y_b + Q_c\,\delta z_c\right) = 0,$$

въ которомъ черезъ δx_a, δy_b, δz_c мы обозначили нѣкоторыя изъ $3n - p$ независимыхъ проекцій виртуальныхъ отклоненій, а черезъ $Q_a\delta x_a$, $Q_b\delta y_b$, $Q_c\delta z_c$, — всѣ члены, заключающіе соотвѣтственно эти независимыя проекціи, но т. к. въ послѣднемъ равенствѣ δx_a, δy_b, δz_c **вполнѣ произвольны**, то оно можетъ быть удовлетворено только при условіи, что коэффиціенты Q_a, Q_b, Q_c при всѣхъ независимыхъ проекціяхъ будутъ равны нулю, что дастъ намъ $(3n - p)$ уравненій, присоединивъ къ которымъ p уравненій связей (*), мы получимъ $3n$ уравненій для опредѣленія $3n$ координатъ неизвѣстныхъ намъ положеній равновѣсія системы n м. точекъ:

$$x_1, y_1, z_1; \ldots x_i, y_i, z_i; \ldots, x_n, y_n, z_n,$$

Второй пріемъ. (*Способъ произвольныхъ множителей Lagrange'а*). *Помноживъ каждое изъ p равенствъ (***) соотвѣтственно на* **произвольные** *множители:*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p,$$

сложимъ полученныя равенства почленно съ равенствомъ (**); *отобравъ затѣмъ въ полученномъ выраженіи всѣ члены, заключающіе каждую изъ проекцій* δx_i, δy_i, δz_i, *перепишемъ его подъ видомъ:*

$$\Sigma\,(A_i\,\delta x_i + B_i\,\delta y_i + C_i\,\delta z_i) = 0,$$

и приравняемъ нулю коэффиціенты A_i, B_i, C_i *при каждой изъ проекцій* δx_i δy_i δz_i; *тогда мы получимъ* $3\,n$ *уравненій, присоединивъ къ которымъ* p *уравненій связей* (*), *будемъ имѣть* $(3\,n + p)$ *уравненій для опредѣленія* $(3\,n + p)$ *искомыхъ величинъ:*

1) $3\,n$ *координатъ неизвѣстныхъ положеній равновѣсія всѣхъ точекъ системы:*

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots\ x_i,\ y_i,\ z_i;\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n$$

и

2) p *неизвѣстныхъ множителей:*

$$\lambda_1,\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_p,$$

опредѣляющихъ реакціи связей,

т. е. получимъ уравненія равновѣсія (**) *системы п. м. точекъ связанныхъ* p. **идеальными** *связями, выведеныя нами въ предыдущемъ параграфѣ* (§ 5).

Дѣйствительно, помноживъ равенства (***) соотвѣтственно на p **произвольныхъ** множителей λ_1, $\lambda_2\ldots\lambda_p$ и сложивъ полученныя равенства почленно съ равенствомъ (**) мы придемъ къ равенству:

$$\Sigma\,(A_i\,\delta x_i + B_i\,\delta y_i + C_i\,\delta z_i) = 0,$$

въ которомъ $(3n - p)$ проекцій виртуальныхъ отклоненій вполнѣ **произвольны**, слѣдовательно это равенство можетъ существовать только при условіи, что коэффиціенты при этихъ произвольныхъ проекціяхъ равны нулю, коэффиціенты же при остальныхъ p **зависимыхъ** проекціяхъ можно приравнять нулю, пользуясь полною **прозвольностью** введенныхъ p множителей, которые всегда можно такъ подобрать, что указанные коэффиціенты тоже обратятся въ нуль и мы получимъ $3n$ уравненій равновѣсія (**) системы n м. точекъ, связанныхъ p идельными связями, выведенныя нами въ предыдущемъ параграфѣ, причемъ множители λ_1, $\lambda_2\ldots\lambda_p$ будутъ соотвѣтственно множителями идеальныхъ связей, опредѣляющими ихъ реакціи.

Третій пріемъ. (*Способъ введенія произвольныхъ параметровъ*). *Выразивъ* $3\,n$ *координатъ* n *м. точекъ, связанныхъ* p *связями* (*)

черезъ $(3n - p) = k$ *произвольныхъ параметровъ*:

$$q_1, q_2, \ldots q_k,$$

опредѣляющихъ положеніе данной системы, т. е. положивъ:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(q_1, q_2, \ldots q_k)\\
y_1 &= f_2(q_1, q_2, \ldots q_k)\\
z_1 &= f_3(q_1, q_2 \ldots q_k)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i &= f_{3i-2}(q_1, q_2 \ldots q_k)\\
y_i &= f_{3i-1}(q_1, q_2 \ldots q_k)\\
z_i &= f_{3i}(p_1, q_2 \ldots q_k)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= f_{3n-2}(q_1, q_2 \ldots q_k)\\
y_n &= f_{3n-1}(q_1, q_2 \ldots q_k)\\
z_n &= f_{3n}(q_1, q_2 \ldots q_k)
\end{aligned}$$

и сообщивъ системѣ нѣкоторое движеніе, мы знаемъ, что

$$\left\{\begin{aligned}
v_{i,x} &= x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q'_k;\\
v_{i,y} &= y'_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} q'_k;\\
v_{i,z} &= z'_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} q'_k;
\end{aligned}\right.$$

слѣдовательно:

$$\left\{\begin{aligned}
\delta x_i &= v_{i,x}\Delta t = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k\\
\delta y_i &= v_{i,y}\Delta t = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k\\
\delta z_i &= v_{i,z}\Delta t = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k
\end{aligned}\right.$$

гдѣ для краткости мы ввели слѣдующія обозначенія:

$$q'_1 \Delta t = \delta q_1, \; q'_2 \Delta t = \delta q_2, \ldots q'_p \Delta t = \delta q_n$$

и будемъ называть эти безконечно малыя величины **варіаціями** *произвольныхъ параметровъ.*

Подставивъ эти выраженія въ равенство:

$$(^{**}) \; \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

и отобравъ въ немъ члены, заключающіе каждую изъ варіацій произвольныхъ параметровъ:

$$\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_k,$$

мы придемъ къ равенству вида:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k = 0,$$

въ которомъ

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= \Sigma\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right), \\ Q_2 &= \Sigma\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_k &= \Sigma\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right), \end{aligned}\right.$$

причемъ оно должно быть равно нулю при **произвольныхъ** *значеніяхъ варіацій* $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_k$, *что возможно только при условіи:*

$$Q_1 = 0, \; Q_2 = 0, \ldots Q_k = 0;$$

т. обр. мы получимъ k уравненій, изъ которыхъ опредѣлятся k параметровъ:

$$q_1, q_2 \ldots q_k;$$

подставивъ ихъ въ выраженія координатъ:

$$x_1, y_1, z_1; \ldots x_i, y_i, z_i; \ldots x_n, y_n, z_n,$$

опредѣлимъ положенія равновѣсія всѣхъ точекъ данной системы.

Оглавленіе.

Выпускъ IV.

Динамика.

Глава I.

Динамика матеріальной точки.

I. Предварительныя кинетическія понятія, относящіяся къ матеріальной точкѣ. . . . . стр. 2-29

§1. Кинетическіе элементы матеріальной точки. - §2. Импульсъ силы, мгновенныя силы и мгновенный импульсъ. - §3. Полная работа силы, приложенной къ м.т., и консервативныя силы.

II. Динамика свободной матеріальной точки . . . . стр. 29-93.

29 §1. Общіе законы движенія свободной матеріальной точки. - §2. Частные случаи общихъ законовъ движенія свободной матеріальной точки. - §3. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на св. мат. точку. - §4. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки и ихъ рѣшенія. - §5. Выводъ общихъ законовъ движенія св. м.т. изъ дифференціальныхъ уравненій ея движенія. - §6. Выводъ частныхъ случаевъ общихъ законовъ движенія св. м.т. изъ дифференціальныхъ уравненій ея движенія. - §7. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія св.м.т. - §8. Лагранжевы дифференціальныя уравненія движенія св.м.т. - §9. Дифференціальныя уравненія движенія св. м.т. въ криволинейныхъ координатахъ. - §10. Начало Даламбера для св. мат. точки. - §11. Начало виртуальной работы и равенство Лагранжа для св. м.т.

III. Динамика несвободной матеріальной точки. . . . стр. 93-173.

§1. Принципъ освобожденія отъ связей. Реакція связи. Давленіе
99 несв. мат.т. на связь. - §2. Общій законъ движенія несв. мат. точки. - §3. Частные случаи общихъ законовъ движенія несв.м.т. - §4. Дифференціальныя уравненія движенія несв. м.т. по идеально гладкой неподвижной поверхности. - §5. Дифференціальныя уравненія движенія несв. м.т. по идеально гладкой неподвижной линіи. - §6. Поверхности и линіи не гладкія. - §7. Общее аналитическое опредѣленіе связей несв. м.т. - §8. Возможныя въ данный моментъ скорости и ускоренія несв. м.т., связанной одною удерживающею или неудерживающею связью. - §9. Виртуальныя скорости и виртуальныя отклоненія въ данный моментъ несвободной матеріальной точки, связанной одною удерживающею или неудерживающею связью. - §10. Общее опредѣленіе идеальныхъ связей для несв. м.т. - §11. Дѣйствіе мгновенной силы на несв. м.т., связанную одною удерживающею или неудерживающею связью. - §12. Дифференціальныя уравненія движенія несв. м.т., связанной идеальными связями. - §13. Лагранжевы уравненія движенія

несв. м.т., связанной одною или двумя идеальными связями, выраженными въ независимыхъ параметрахъ. – §14. Начало Даламбера для несв. мат. точки. – §15. Начало виртуальной работы и равенство Лагранжа для несв. м. т., связанной идеальными связями.

IV. Динамика относительнаго движенія м.т. по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ. . . . . . стр. 173-188.

§1. Динамика относительнаго движенія свободной м.т. – §2. Динамика относительнаго движенія несв. м.т.

Глава II.

Динамика системы матеріальныхъ точекъ.

I. Повторительныя кинетическія понятія, связанныя съ системою м. точекъ. . . . . стр. 189-202.

§1. Центръ инерціи системы мат. точекъ. – §2. Кинетическіе элементы системы мат. точекъ. – §3. Импульсъ силъ, приложенныхъ къ системѣ м. т. – §4. Полная работа силъ, приложенныхъ къ системѣ м.т. и консервативныя системы силъ.

II. Динамика системы свободныхъ мат. точекъ. . стр. 203-216.

203 §1. Общій законъ движенія системы св. мат. точекъ. – §2. Частные случаи общихъ законовъ движенія системы св. м.т. – §3. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на систему св. м.т. – §4. Дифференціальныя уравненія системы св. м.т. и ихъ рѣшенія. – §5. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія системы св. м.т.

III. Динамика несвободной системы матеріальныхъ точекъ. стр. 216-241.

§1. Понятіе о несвободной системѣ м.т. Связи. Кинематическія условія, налагаемыя связями на систему. – §2. Дифференціальныя уравненія движенія несвободной системы м. точекъ, связанныхъ идеальными связями. – §3. Общій законъ движенія центра инерціи несвободной системы мат. точекъ. Частные случаи движенія центра инерціи. – §4. Дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ движенія и законъ сохраненія площадей несв. системы мат. точекъ. – §5. Законъ измѣненія живой силы несвободной системы. Законъ сохраненія энергіи и интегралъ живой силы. – §6. Начало Даламбера, начало виртуальныхъ работъ и равенство Лагранжа для несв. системы м.т.

АР. ДОМОГАРОВЪ.

КУРСЪ МЕХАНИКИ.

ДИНАМИКА.

Выпускъ IV.

Динамика.

Динамика есть часть кинетики, т. е. науки о дѣйствіи силъ на матеріальныя тѣла, изучающая движенія матеріальныхъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ

Глава I.

Динамика матеріальной точки.

I. Предварительныя кинетическія понятія, относящіяся къ матеріальной точкѣ.

§1. Кинетическіе элементы матеріальной точки.

Изъ „основныхъ началъ кинетики" (см. Статику Глава I отд. I §1) мы знаемъ, что дѣйствіе силы на матеріальн. точку зависитъ отъ массы мат. точки, поэтому для удобства изложенія законовъ динамики мы введемъ нѣкоторыя новыя понятія: кинетическіе элементы мат. точки, заключающія въ себѣ заразъ массу мат. точки и одинъ изъ ея кинематическихъ элементовъ: скорость или ускореніе.

1. Количествомъ движенія или количествомъ скорости м. т. въ данный моментъ мы будемъ называть произведеніе $m\bar{v}$ изъ скорости $\bar{v}$ мат. точки въ этотъ мо-

Лит. И. Трофимова Можайск. 3. Преподаватель: [illegible]

ментъ на ея массу. ∴ это есть векторъ (черт. 1), отложенный отъ м. т. по ея скорости $\bar{v}$ въ данный моментъ и въ m разъ большiй этой скорости.*)

Чертежъ 1.

Изъ высказаннаго опредѣленiя ясно, что символъ единицы количества движенiя м. т. будетъ:

$$[M]\cdot[LT^{-1}] = [MLT^{-1}],$$

причемъ аналитически величина и направленiе количества движенiя м. точки выразится тремя его проекцiями на три взаимно перпендикулярныя, неподвижныя оси координатъ (O, X, Y, Z) посредствомъ очевидныхъ равенствъ:

$$\begin{cases} (mv)_x = mv_x = mx' \\ (mv)_y = mv_y = my' \\ (mv)_z = mv_z = mz' \end{cases}$$

dm.V — количество движения = momentum
dm.V.r.cos A — моментъ количества движение относительно точки O = = moment of momentum = angular momentum.

2. Моменты количества движенiя $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_{0x}$ относительно центра и оси.

Такъ какъ количество движенiя м. т. $m\bar{v}$ есть нѣкоторый векторъ, отложенный отъ м. т., то мы можемъ представить себѣ (черт. 2) линейный моментъ

$$\bar{\mathcal{K}}_0 = \bar{M}_0 (m\bar{v})$$

этого вектора относительно нѣкотораго центра O

*) Обыкновенно этотъ векторъ называютъ количествомъ движенiя м. т., но для большой аналогiи въ названiяхъ кинетическихъ элементовъ м. т. для него можно еще ввести названiе количества скорости м. т., указывающее на его связь со скоростью м. т.

Динамика.

Динамика есть часть кинетики, т. е. науки о дѣйствіи силъ на матеріальныя тѣла, изучающая движенія матеріальныхъ тѣлъ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ

Глава I.

Динамика матеріальной точки.

I. Предварительныя кинетическія понятія, относящіяся къ матеріальной точкѣ.

§1. Кинетическіе элементы матеріальной точки.

Изъ „основныхъ началъ кинетики" (см. Статику Глава I отд. I §1) мы знаемъ, что дѣйствіе силы на матеріальн. точку зависитъ отъ массы мат. точки, поэтому для удобства изложенія законовъ динамики мы введемъ нѣкоторыя новыя понятія: кинетическіе элементы мат. точки, заключающія въ себѣ заразъ массу мат. точки и одинъ изъ ея кинематическихъ элементовъ: скорость или ускореніе.

1. Количествомъ движенія или количествомъ скорости м. т. въ данный моментъ мы будемъ называть произведеніе $m\bar{v}$ изъ скорости $\bar{v}$ мат. точки въ этотъ мо-

Лит. И. Трофимова Можайск. 3. Преподаватель: Долосовъ

ментъ на ея массу: это есть векторъ (черт. 1), отложенный отъ м. т. по ея скорости $\bar{v}$ въ данный моментъ и въ m разъ большій этой скорости.*)

Чертежъ 1.

Изъ высказаннаго опредѣленія ясно, что символъ единицы количества движенія м. т. будетъ:

$$[M]\cdot[LT^{-1}] = [MLT^{-1}],$$

причемъ аналитически величина и направленіе количества движенія м. точки выразится тремя его проекціями на три взаимно перпендикулярныя, неподвижныя оси координатъ $(O, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ посредствомъ очевидныхъ равенствъ:

$$\begin{cases} (mv)_x = mv_x = mx' \\ (mv)_y = mv_y = my' \\ (mv)_z = mv_z = mz' \end{cases}$$

dm.V — количество движенія = momentum
dm.V. r. cos A — моментъ количества движеніе относительно точки O = = moment of momentum = angular momentum.

2. Моменты количества движенія $\mathfrak{K}_o$ и $\mathfrak{K}_{ox}$ относительно центра и оси.

Такъ какъ количество движенія м. т. $m\bar{v}$ есть нѣкоторый векторъ, отложенный отъ м. т., то мы можемъ представить себѣ (черт. 2) линейный моментъ

$$\bar{\mathfrak{K}}_o = \bar{\mathfrak{M}}_o(m\bar{v})$$

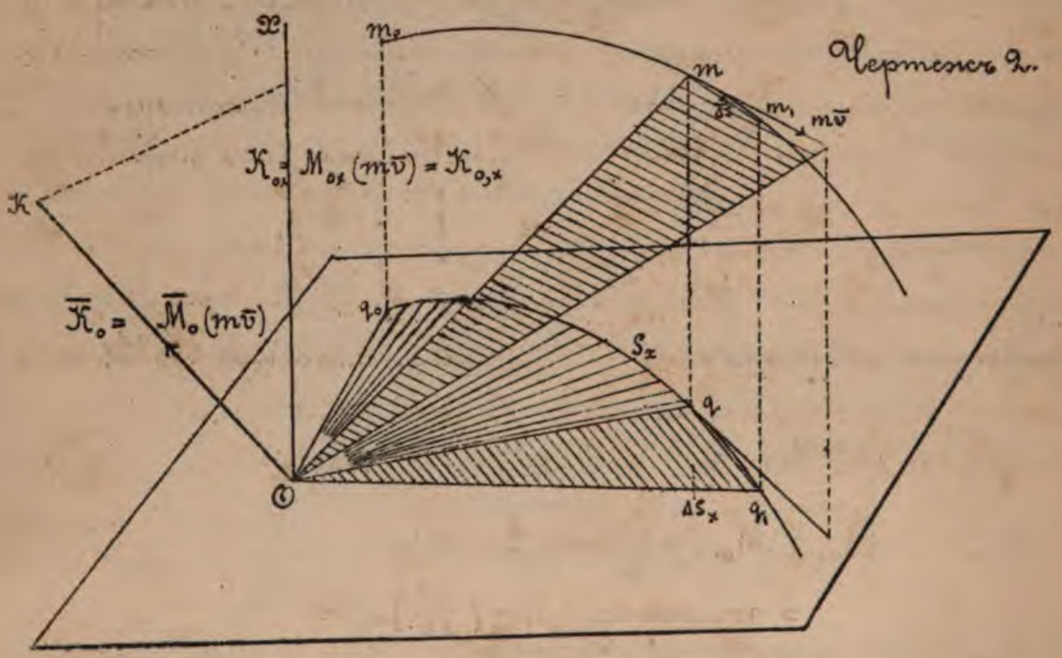
этого вектора относительно нѣкотораго центра O

*) Обыкновенно этотъ векторъ называютъ количествомъ движенія м. т., но для большой аналогіи въ названіяхъ кинетическихъ элементовъ м. т. для него можно еще ввести названіе, количества скорости м. т., указывающее на его связь со скоростью м. т.

и моментъ того же вектора

$$\mathfrak{K}_{ox} = \mathfrak{M}_{ox}(m\bar{v})$$

относительно нѣкоторой оси OX, причемъ, не повторяя здѣсь извѣстныхъ опредѣленій этихъ понятій, замѣтимъ, что всѣ теоремы, относящіяся къ моментамъ



Чертежъ 2.

векторовъ, будутъ справедливы и для моментовъ количества движенія м.-т.

Напр. $\quad \mathfrak{K}_{ox} = \mathfrak{K}_{o,x}$,

т. е. моментъ количества движенія м.-т. относительно нѣкоторой оси равенъ проекціи на ту же ось линейнаго момента того же вектора относительно одной изъ точекъ этой оси.

Ясно, что символъ единицы моментовъ количества движенія м. т. будетъ:

$$[MLT^{-1}]\cdot[L] = [ML^2T^{-1}]$$

Укажемъ теперь геометрическое значеніе момента

$$\mathfrak{K}_{ox} = \mathfrak{M}_{ox}(m\bar{v})$$

количества движенія м. т. относительно нѣкоторой неподвижной оси OX.

При движеніи м. т. въ пространствѣ (черт. 2) ея проекція q на плоскости Q, перпендикулярной къ оси OX, описываетъ нѣкоторый секторъ около точки пересѣченія O плоскости Q съ осью OX; обозначивъ черезъ S_x величину площади этого сектора $q_0 O q$, отсчитанную отъ нѣкотораго начальнаго момента t_0, мы видимъ, что при движеніи м. т. указанная площадь сектора S_x будетъ съ теченіемъ времени измѣняться, т. е. будетъ нѣкоторою функціею времени t, причемъ производную отъ этой функціи взятую по времени

$$S'_x = \text{пред.}\ \frac{\Delta S_x}{\Delta t}$$

называютъ <u>секторіальною скоростью</u> точки m въ плоскости, перпендикулярной къ оси OX.

Принявъ теперь во вниманіе, что

$$\mathcal{K}_{ox} = M_{ox}(m\bar{v}) = m M_{ox}(\bar{v}) =$$

$$= m \cdot \text{пред.}\ M_{ox}\left(\frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t}\right) =$$

$$= m \frac{\text{пред.}\ M_{ox}(\overline{\Delta s})}{\Delta t} = m \cdot \text{пред.}\ \frac{2\Delta(q O q_1)}{\Delta t} =$$

$$= 2m\ \text{Пред.}\ \frac{\Delta S_x}{\Delta t} = 2m S'_x,$$

мы приходимъ къ заключенію, что моментъ количества движенія м. т. относительно любой неподвижной оси OX равенъ произведенію изъ удвоенной массы м. т. на секторіальную скорость м. т. S'_x въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, т. е.

$$\mathcal{K}_{ox} = 2m S'_x$$

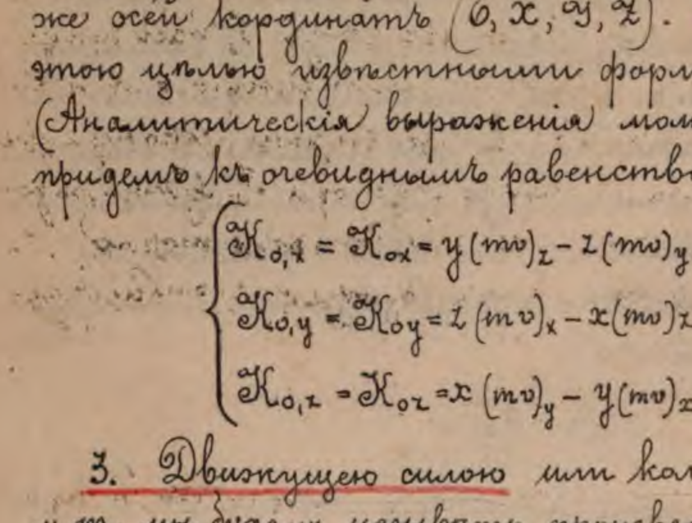
Примѣняя эту теорему къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ неподвижнымъ осямъ координатъ (O, x, y, z), мы получимъ:

$$\mathcal{K}_{ox} = 2m S'_x, \quad \mathcal{K}_{oy} = 2m S'_y, \quad \mathcal{K}_{oz} = 2m S'_z.$$

Укажемъ наконецъ аналитическія выраженія моментовъ количества движенія м. т. относительно этихъ же осей координатъ (O, x, y, z). Воспользовавшись съ этою цѣлью извѣстными формулами „Введенія" (Аналитическія выраженія моментовъ векторовъ), придемъ къ очевиднымъ равенствамъ:

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{O,x} = \mathcal{K}_{ox} = y(mv)_z - z(mv)_y = m(yz' - zy') \\ \mathcal{K}_{O,y} = \mathcal{K}_{oy} = z(mv)_x - x(mv)_z = m(zx' - xz') \\ \mathcal{K}_{O,z} = \mathcal{K}_{oz} = x(mv)_y - y(mv)_x = m(xy' - yx') \end{cases}$$

3. Движущею силою или количествомъ ускоренія м. т. мы будемъ называть произведеніе $m\bar{u}$ изъ ускоренія $\bar{u}$ м. т. въ данный моментъ на ея массу m, что есть векторъ (чертежъ 3), отложенный отъ м. т. по ея ускоренію $\bar{u}$ и въ m разъ большій этого ускоренія. Символъ единицы количества ускоренія м. т. будетъ очевидно



Чертежъ 3.

$$[M] \cdot [LT^{-2}] = [MLT^{-2}],$$

причемъ, построивъ отъ произвольной точки O годографъ $\widehat{hh_1}$ количества скорости м. т., мы видимъ, что

$$\bar{v}_h = \text{Пред.} \frac{\overline{hh_1}}{\Delta t} = \text{Пред.} \frac{m\bar{v}_1 - m\bar{v}}{\Delta t} =$$

$$= m \cdot \text{Пред.} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t} = m \cdot \text{Пред.} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = m\bar{u}.$$

Слѣдовательно

$$m\bar{u} = \bar{v}_h \quad \text{и потому} \quad (mu)_x = v_{h,x} = (mv)'_x$$

т. е. количество ускоренія м. т. геометрически равно скорости v_h точки h, чертящей годографъ количества скорости м. т., и проекція количества ускоренія м. т. $(mu)_x$ на любую неподвижную ось равна производной $(mv)_x$ отъ проекціи количества скорости м. т. на ту же ось.

Наконецъ аналитически величина и направленіе количества ускоренія м. т. выразятся тремя его проекціями на три взаимноперпендикулярныя неподвижныя оси координатъ (O, X, Y, Z) посредствомъ очевидныхъ равенствъ:

$$\begin{cases} (mu)_x = mu_x = mx'' \\ (mu)_y = mu_y = my'' \\ (mu)_z = mu_z = mz'' \end{cases}$$

изъ которыхъ снова ясно, что

$$\begin{cases} (mu)_x = mx'' = (mx')' = (mv_x)' \\ (mu)_y = my'' = (my')' = (mv_y)' \\ (mu)_z = mz'' = (mz')' = (mv_z)' \end{cases}$$

т. е.

$$m\bar{u} = \bar{v}_h .$$

4. Моменты количества ускоренія м. т. $\bar{l}_o = \bar{M}_o(m\bar{u})$ и $l_{ox} = M_{ox}(m\bar{u})$ относительно центра и оси.

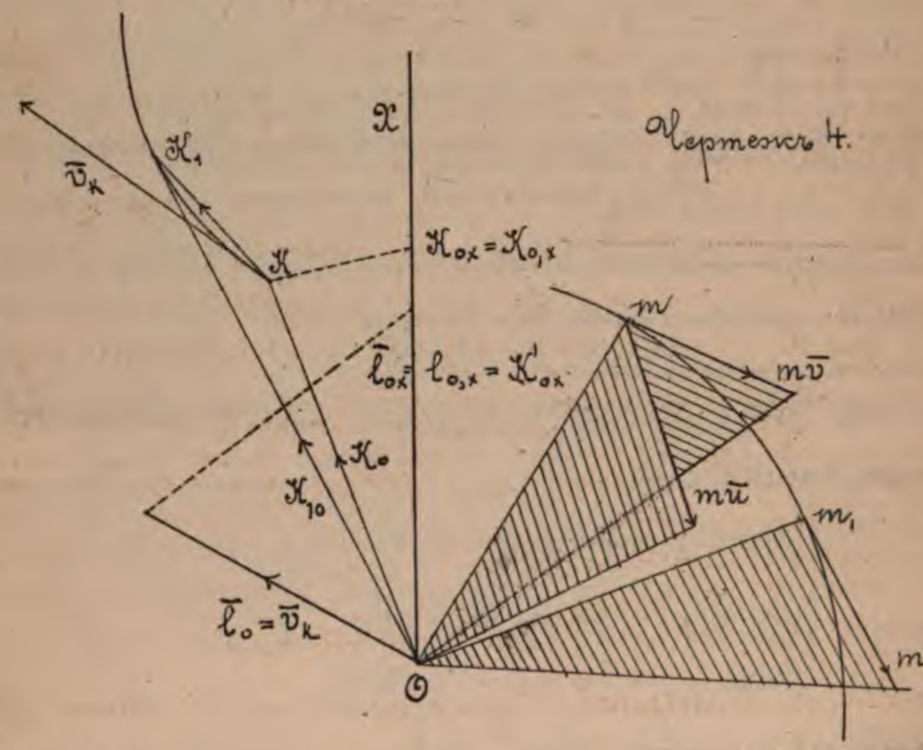
Такъ какъ количество ускоренія $m\bar{u}$ м. т. въ данный моментъ есть нѣкоторый векторъ, отложенный отъ матеріальной точки по ея ускоренію $\bar{u}$, то мы можемъ представить себѣ (черт. 4) линейный моментъ этого вектора относительно нѣкотораго

центра O и относительно нѣкоторой оси OX:

$$\bar{l}_o = \bar{M}_o(m\bar{u}) \quad \text{и} \quad l_{ox} = M_{ox}(m\bar{u})$$

причемъ

$$l_{ox} = l_{o,x}.$$



Чертежъ 4.

Символъ единицы моментовъ количества ускоренія м. т. будетъ очевидно

$$[M L T^{-2}] \cdot [L] = [M L^2 T^{-2}]$$

Кромѣ того, построивъ отъ произвольной точки O годографъ KK_1 моментовъ количества скорости м. т. относительно этого центра O, мы видимъ, что

$$\bar{v}_K = \text{Пред.}\,\frac{\overline{KK_1}}{\Delta t} = \text{Пред.}\,\frac{\overline{OK} - \overline{OK_1}}{\Delta t} = \text{Пред.}\,\frac{\bar{M}_o(m\bar{v}_1)^*_{m_1} - \bar{M}(m\bar{v})_m}{\Delta t} =$$

$$= \text{Пр.}\,\frac{\bar{M}_o(mv_1)_m - \bar{M}_o(mv)_m}{\Delta t} = \text{Пр.}\,\frac{M_o(m\bar{v}_1 - m\bar{v})_m}{\Delta t},$$

* Линейный моментъ $\bar{M}_o(mv_1)_{m_1}$ геометрически эквивалентенъ $\bar{M}_o(m\bar{v}_1)_m$. Дѣйствительно, по теоремѣ о перемѣнѣ центра линейнаго момента мы имѣемъ

$$\bar{M}_o(m\bar{v}_1)_{m_1} = -M_{m_1}(m\bar{v}_1)_o = -[\bar{M}_m(m\bar{v}_1)_o + \bar{M}_{m_1}(m\bar{v}_1)_m] =$$

$$= \text{Пред.}\ \mathcal{M}_o\left(m\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\right)_m = \bar{\mathcal{M}}_o(m\bar{u})_m = l_o,$$

т.е.

$$\bar{l}_o = \bar{v}_k \quad \text{и} \quad l_{ox} = l_{o,x} = v_{k,x} = K'_{ox} = K'_{ox}$$

Итакъ

$$\bar{l}_o = \bar{v}_k \quad \text{и} \quad l_{ox} = K'_{ox},$$

т.е. линейный моментъ количества ускоренія м. т. относительно нѣкотораго центра O геометрически равенъ скорости точки, чертящей годографъ линейнаго момента количества скорости или количества движенія м. т. относительно того же центра O и моментъ количества ускоренія м. т. относительно нѣкоторой неподвижной оси равенъ производной отъ момента количества скорости м. т. относительно той же оси.

Слѣдовательно

$$l_{ox} = K'_{ox} = (2mS'_x)' = 2mS''_x,$$

т.е. моментъ количества ускоренія м. т. относительно любой неподвижной оси равенъ произведенію изъ удвоенной массы м. т. на производную секторіальной скорости $(S'_x)' = S''_x$ или секторіальное ускореніе точки въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси.

Примѣнивъ послѣднее равенство къ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ, неподвижнымъ осямъ координатъ, получимъ

$$l_{ox} = 2mS''_x,\ l_{oy} = 2mS''_y;\ l_{oz} = 2mS''_z.$$

$$= \bar{\mathcal{M}}_o(m\bar{v}_1)_o + \bar{\mathcal{M}}_m(m\bar{v}_1)_{m_1}$$

причемъ $\bar{\mathcal{M}}_m(m\bar{v}_1)_{m_1}$ есть безконечно малый векторъ высшаго порядка, ибо разстояніе точки m до вектора $(m\bar{v}_1)_{m_1}$, т.е. до касательной, проведенной къ траекторіи въ безконечно близкой точкѣ m_1, есть безконечно малая величина высшаго порядка.

Воспользовавшись наконецъ извѣстными формулами (Аналитическія выраженія моментовъ векторовъ), получимъ аналитическія выраженія моментовъ количества ускоренія м. т. относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей координатъ (O, x, y, z)

$$\begin{cases} l_{o,x} = l_{ox} = y(mu)_z - z(mu)_y = m(yz'' - zy'') \\ l_{o,y} = l_{oy} = z(mu)_x - x(mu)_z = m(zx'' - xz'') \\ l_{o,z} = l_{oz} = x(mu)_y - y(mu)_x = m(xy'' - yx'') \end{cases}$$

изъ которыхъ снова убѣждаемся, что

$$\begin{cases} l_{o,x} = m(yz'' - zy'') = m(yz' - zy')' = \mathcal{K}'_{ox} = \mathcal{K}'_{o,x} = v_{K_o x} \\ l_{o,y} = \qquad\qquad\qquad = v_{K,y} \\ l_{o,z} = \qquad\qquad\qquad = v_{K,z}, \end{cases}$$

т. е., что

$$\bar{l}_o = \bar{v}_K \quad \text{и} \quad l_{ox} = \mathcal{K}'_{ox}.$$

5. Кинетическою энергіею

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2}$$

или живою силою мат. точки называется половина $\frac{mv^2}{2}$ произведенія изъ массы м. т. на квадратъ ея скорости, это есть количество, а не векторъ, причемъ символъ единицы кинетической энергіи м. т. очевидно будетъ:

$$[M\,L^2 T^{-2}]$$

Итакъ, мы установили пять кинетическихъ элементовъ м. т.

1. Количество движенія или количество скорости м. т. $m\bar{v}$.
2. Моменты количества движенія или количе-

ства скорости м. т. $\bar{K}_o = \bar{M}_o(m\bar{v})$ и $K_{ox} = M_{ox}(m\bar{v})$

3. Движущая сила или количество ускоренія м. т. $m\bar{u}$.

4. Моменты движущей силы или количества ускоренія м. т.

$$\bar{l}_o = \bar{M}_o(m\bar{u}) \quad и \quad l_{ox} = M_{ox}(m\bar{u})$$

5. Кинетическая энергія или живая сила м. т.

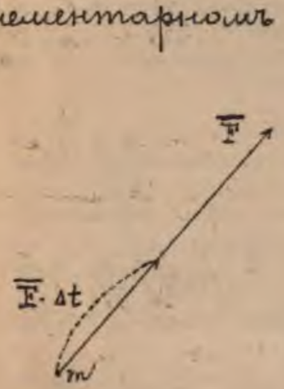
$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2},$$

изъ которыхъ первые четыре суть нѣкоторые векторы, а послѣдній — нѣкоторое количество.

Этимъ пяти кинетическимъ элементамъ м. т. соотвѣтствуютъ пять общихъ законовъ движенія свободной м. т., но прежде, чѣмъ перейти къ изложенію этихъ законовъ, необходимо установить еще нѣкоторыя понятія, связанныя съ понятіемъ о силѣ.

§2. Импульсъ силы, мгновенныя силы и мгновенный импульсъ.

Иногда приходится принимать во вниманіе не только величину и направленіе силы $\bar{F}$, но и время ея дѣйствія, поэтому въ динамикѣ вводится понятіе объ элементарномъ импульсѣ силы $\bar{F}\cdot\Delta t$, равномъ произведенію изъ силы на элементъ времени Δt; это есть безконечно малый векторъ, отложенный по направленію силы отъ ея точки приложенія; символъ единицы элементарнаго импульса силы очевидно будетъ:



$$[MLT^{-2}]\cdot[T] = [MLT^{-1}],$$

причемъ проекціи элементарнаго импульса силы на

три взаимно перпендикулярныя оси кординатъ (O, X, Y, Z) будутъ конечно пропорціональны проекціямъ X, Y и Z на тѣ же оси силы $\bar F$ и опредѣлятся изъ равенствъ:

$$\begin{cases} (F\,\Delta t)_x = F_x \cdot \Delta t = X \cdot \Delta t \\ (F \cdot \Delta t)_y = F_y \cdot \Delta t = Y \cdot \Delta t \\ (F \cdot \Delta t)_z = F_z \cdot \Delta t = Z \cdot \Delta t \end{cases}$$

<u>Полнымъ импульсомъ</u> $J_{t_0}^t(\bar F)$ силы $\bar F$ за данный промежутокъ времени $(t-t_0)$ называется предѣлъ суммы всѣхъ ея элементарныхъ импульсовъ за этотъ промежутокъ времени, т. е.

$$\bar J_{t_0}^t(\bar F) = \text{пр.}\, S_{t_0}^t \bar F \Delta t = \int_{t_0}^t \bar F \cdot dt$$

Если сила $\bar F$ сохраняетъ постоянную величину, то полный импульсъ такой силы за промежутокъ времени $(t-t_0)$ будетъ удовлетворять равенствамъ:

$$\bar J_{t_0}^t(\bar F) = \text{Пред.}\, S_{t_0}^t \bar F \Delta t = \bar F S_{t_0}^t \Delta t = \bar F (t-t_0),$$

т. е. совпадаетъ съ направленіемъ силы и будетъ равенъ произведенію изъ величины силы на промежутокъ времени $(t-t_0)$.

Напр. Полный импульсъ силы тяжести $\bar p = m\bar g$ м. т. за данный промежутокъ времени $(t-t_0)$ направленъ по вертикали внизъ и равенъ $mg(t-t_0)$.

Если величина и направленіе силы $\bar F$ съ теченіемъ времени измѣняются, то ея проекціи X, Y, Z на три взаимно-перпендикулярныя оси координатъ (O, X, Y, Z) будутъ нѣкоторыми функціями времени t, причемъ величина и направленіе полнаго импульса $J_{t_0}^t(\bar F)$ такой силы за данный промежутокъ времени $(t-t_0)$ могутъ быть опредѣлены по тремъ его проекціямъ J_x, J_y, J_z на эти оси координатъ

изъ слѣдующихъ очевидныхъ равенствъ:

$$\begin{cases} J_x = \text{Пр. } S_{t_0}^{t} \mathfrak{X} \Delta t = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}\, dt \\ J_y = \text{Пр. } S_{t_0}^{t} \mathfrak{Y} \Delta t = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{Y}\, dt \\ J_z = \text{Пр. } S_{t_0}^{t} \mathfrak{Z} \Delta t = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{Z}\, dt \end{cases}$$

Напр. Если

$$\mathfrak{X} = a, \ \mathfrak{Y} = bt, \ \mathfrak{Z} = ct^2,$$

то

$$\begin{cases} J_x = \int_{t_0}^{t} a\, dt = a(t - t_0) \\ J_y = \int_{t_0}^{t} bt\, dt = \frac{b}{2}(t^2 - t_0^2) \\ J_z = \int_{t_0}^{t} ct^2\, dt = \frac{c}{3}(t^3 - t_0^3). \end{cases}$$

Сила, дѣйствующая въ теченіе неизмѣримо малаго промежутка времени δt, но столь большая, что за этотъ неизмѣримо малый промежутокъ она тѣмъ не менѣе даетъ конечный импульсъ:

$$\int_{t}^{t+\delta t} \overline{F}\, dt = \overline{J}$$

называется <u>мгновенною силою</u>, а импульсъ мгновенной силы $\overline{J} = \int_{t}^{t+\delta t} \overline{F}\, dt$ называютъ <u>мгновеннымъ импульсомъ</u> или <u>толчкомъ</u>.

§3. Полная работа силы, приложенной къ м. т., и консервативныя силы.

Въ статикѣ (Гл. III §1) мы установили понятіе объ элементарной работѣ силы:

$$\overline{F}\,\overline{\Delta S} = F \Delta S \cos(F, \Delta S) = \mathfrak{X}\,\Delta x + \mathfrak{Y}\,\Delta y + \mathfrak{Z}\,\Delta z$$

и указали основныя свойства этого понятія.

<u>Полною работою</u> $T_{t_0}^{t}(\overline{F})$ <u>силы</u> $\overline{F}$ <u>за данный промежутокъ времени</u> $(t - t_0)$ <u>мы будемъ называть предѣлъ суммы</u>

<u>мы всѣхъ ея элементарныхъ работъ за этотъ промежутокъ времени</u>, т. е.

$$T_{t_0}^{t}(\overline{F}) = \text{Пр.} \, S_{t_0}^{t} \overline{F} \, \overline{\Delta S} = \text{Пред.} \, S_{t_0}^{t} F \Delta S \cos(F, \Delta S) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} F ds \cos(F, \Delta s) = \int_{t_0}^{t} (\mathfrak{X} dx + \mathfrak{Y} dy + \mathfrak{Z} dz).$$

Символъ единицы полной работы силы будетъ очевидно тотъ же, что и элементарной, т. е.

$$[MLT^{-2}] \cdot [L] = [ML^2T^{-2}],$$

причемъ за единицу работы при физическихъ измѣреніяхъ принимаютъ эргъ: работу силы, равной динѣ, при перемѣщеніи ея точки приложенія на одинъ сантиметръ по направленію силы, при техническихъ же измѣреніяхъ за единицу работы принимаютъ <u>килограмо-метръ</u>, т. е. работу <u>килограмма-силы</u> при перемѣщеніи ея точки приложенія на одинъ метръ по направленію силы.

Изъ самаго опредѣленія полной работы силы ясно, что величина полной работы силы вообще должна зависѣть отъ вида траекторіи, описываемой ея точкою приложенія, но существуютъ такія силы, работа которыхъ не зависитъ отъ вида траекторіи, описываемыхъ ихъ точкою приложенія, а вполнѣ опредѣляется начальнымъ и конечнымъ приложеніями m_0, m этой точки. Такія силы мы будемъ называть <u>консервативными</u> и полную работу консервативной силы $\overline{F}$ при переходѣ ея точки приложенія изъ положенія m_0 въ положеніе m будемъ обозначать (черт. 5) символомъ

Черт. 5.

$$T_{m_0}^{m}(\overline{F}) = \text{Пр.} \, S_{m_0}^{m} \overline{F} \, \overline{\Delta S} = Const.,$$

такъ какъ она по опредѣленію нисколько не зависитъ отъ вида траекторіи,

по которой точка приложенія переходитъ изъ положенія m_0 въ положеніе m и вполнѣ опредѣляется этими двумя положеніями точки m, а потому, если точка m подъ дѣйствіемъ консервативной силы, описавъ замкнутую кривую, снова вернется въ начальное положеніе m_0, то полная работа приложенной къ ней консервативной силы будетъ равна нулю.

Поясним сказанное нѣсколькими примѣрами консервативныхъ силъ.

1. Сила тяжести $\bar{p} = m\bar{g}$ есть консервативная сила.

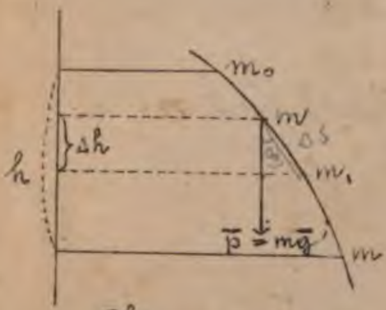
Дѣйствительно, полная работа силы тяжести при переходѣ ея точки приложенія m изъ начальнаго положенія m_0 въ данное положеніе m (черт. 6) удовлетворяетъ равенствамъ:

$$T_{m_0}^{m}(\bar{p}) = \text{Пр.}\,\mathcal{S}_{m_0}^{m}\,\bar{p}\,\overline{\Delta s} = \text{Пр.}\,\mathcal{S}_{m_0}^{m}\,p\,\Delta s\,\cos(\Delta s, p) =$$

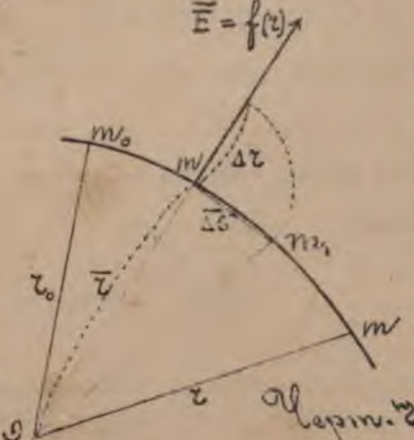
$$= p\cdot\text{Пр.}\,\mathcal{S}_{m_0}^{m}\,\Delta s\,\cos(\Delta s, p) = p\,\text{Пр.}\,\mathcal{S}_{m_0}^{m}(\pm\Delta h) = \pm ph,$$

гдѣ знакъ (+) надо брать при опусканіи м. т. и знакъ (−) при поднятіи.

Такимъ образомъ полная работа силы тяжести равна произведенію изъ вѣса p м. т. на ея вертикальное перемѣщеніе h, взятому со знакомъ (+) при опусканіи м. т. и со знакомъ (−) — при поднятіи, т. е. нисколько не зависитъ отъ вида траекторіи м. т.; слѣдовательно, сила тяжести есть консервативная сила.



Чертежъ 6.



Черт. 7.

2. Центральныя силы, т. е. силы притяженія или отталкиванія, исходящія изъ постояннаго центра и зависящія

мыи отъ разстоянія r м. т. отъ дѣйствующаго на нее центра, суть силы консервативныя.

Дѣйствительно, положимъ (черт. 7)

$$F = f(r),$$

гдѣ r есть разстояніе м. т. отъ дѣйствующаго на нее центра O; въ такомъ случаѣ

$$T_{m_0}^{m}(\bar{F}) = \text{Пред.}\ S_{m_0}^{m}\bar{F}\,\overline{\Delta S} = \text{Пред.}\ S\,F\,\Delta S\,\text{Cos}(F, \Delta S) =$$

$$= \pm\,\text{Пр.}\ S_{m_0}^{m} f(r)\,\Delta S\,\text{Cos}(r, \Delta S) = \pm\,\text{Пр.}\ S_{m_0}^{m} f(r)\,\Delta r =$$

$$= \pm\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr,$$

гдѣ верхній знакъ надо брать при силахъ отталкиванія, ибо тогда направленія $\bar{F}$ и $\bar{r}$ совпадаютъ, а нижній знакъ – при силахъ притяженія, ибо тогда указанныя направленія противоположны, или наконецъ, условившись силы притяженія считать отрицательными, а силы отталкиванія – положительными, мы придемъ къ равенству

$$T_{m_0}^{m}(\bar{F}) = \int_{r_0}^{r} f(r)\,dr,$$

справедливому для центральныхъ силъ по величинѣ и по знаку, причемъ ясно, что полная работа центральной силы не зависитъ отъ вида траекторіи ея точки приложенія, а только отъ начальнаго и конечнаго ея разстояній r_0, r отъ дѣйствующаго на нее центра; слѣдовательно, центральныя силы суть консервативныя силы.

Напр. Для силъ притяженія, дѣйствующихъ по закону Ньютона

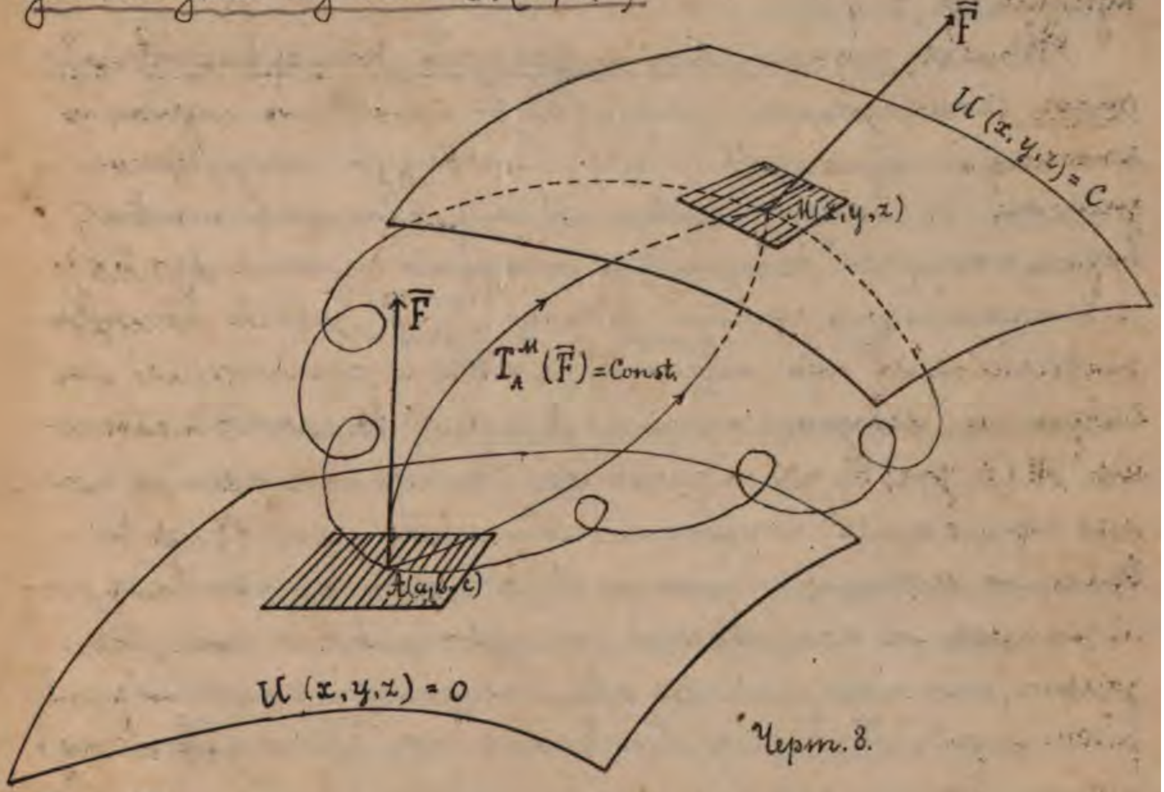
$$F(r) = -k\,\frac{m}{r^2}$$

гдѣ k есть нѣкоторый положительный коэффиці-

ентъ; слѣдовательно, полная работа такой силы опредѣлится изъ равенствъ:

$$T_{m_0}^{m}(\overline{F}) = -\int_{r_0}^{r} k\frac{m}{r^2}\,dr = -km\int_{r_0}^{r} r^{-2}\,dr =$$
$$= -km\left|-\frac{1}{r}\right|_{r_0}^{r} = km\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right).$$

Выбравъ для данной консервативной силы $\overline{F}$ нѣкоторый исходный пунктъ $A(a,b,c)$ (черт. 8), условимся отсчитывать отъ него полную работу $T_A^M(\overline{F})$ этой консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a,b,c)$ въ данное положеніе $M(x,y,z)$. Въ такомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, эта полная работа не будетъ зависѣть отъ вида траекторіи точки приложенія силы $\overline{F}$, а только отъ положенія точки $M(x,y,z)$ въ пространствѣ, т.е. будетъ нѣкоторою функціею координатъ (x,y,z) точки M, обращающеюся въ нуль для исходнаго пункта $A(a,b,c)$.



Черт. 8.

Такимъ образомъ

$$T_A^M(\bar{F}) = U(x, y, z)$$

причемъ

$$U(a, b, c) = 0;$$

такую функцію положенія или координатъ (x, y, z) мы будемъ называть <u>потенціаломъ</u> данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A; при вычисленіи потенціала исходный пунктъ $A(a, b, c)$ можетъ быть выбранъ вполнѣ произвольно, но разъ онъ указанъ, то потенціалъ данной консервативной силы будетъ имѣть для каждой точки $M(x, y, z)$ пространства опредѣленную величину, выражающую полную работу данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данный пунктъ $M(x, y, z)$.

Итакъ, <u>потенціаломъ данной консервативной силы</u> съ исходнымъ пунктомъ A мы будемъ называть нѣкоторую функцію $U(x, y, z)$, имѣющую опредѣленное значеніе въ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, обращающуюся въ нуль для исходнаго пункта $A(a, b, c)$ и <u>выражающую полную работу</u> $T_A^M(\bar{F})$ <u>данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта</u> $A(a, b, c)$ въ данное положеніе $M(x, y, z)$ въ пространствѣ. Но перемѣщаясь съ точкою приложенія консервативной силы (черт. 8) изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ плоскостяхъ, нормальныхъ къ направленію консервативной силы, мы знаемъ, что при такихъ перемѣщеніяхъ элементарная работа данной консервативной силы будетъ равна нулю и потому потенціалъ консервативной силы при всѣхъ такихъ положеніяхъ будетъ также равенъ нулю, т.е. будетъ существовать цѣлая поверхность, проходящая черезъ выбранный исходный пунктъ A, на кото-

рой потенціалъ данной консервативной силы равенъ нулю; такая поверхность называется поверхностью уровня нулевого значенія потенціала данной консервативной силы. Перемѣщаясь подобнымъ же образомъ съ точкою приложенія данной консервативной силы изъ произвольнаго пункта $M(x, y, z)$, въ которомъ потенціалъ ея былъ равенъ нѣкоторой величинѣ c, мы опять убѣдимся, что существуетъ такая поверхность, проходящая черезъ данную точку $M(x, y, z)$, что потенціалъ данной консервативной силы имѣетъ во всѣхъ точкахъ этой пов.-сти ту же величину c, что и въ данной точкѣ $M(x, y, z)$; такая поверхность называется поверхностью уровня даннаго значенія c потенціала данной консервативной силы.

Въ справедливости послѣднихъ заключеній можно еще проще убѣдиться аналитически, ибо для каждаго значенія c будетъ существовать поверхность:

$$U(x, y, z) = c,$$

во всѣхъ точкахъ которой потенціалъ будетъ имѣть одну и ту же величину c и поверхность

$$U(x, y, z) = 0$$

будетъ поверхностью нулевого значенія потенціала данной консервативной силы.

Примѣры.

1). При вычисленіи потенціала силы тяжести за исходный пунктъ берутъ обыкновенно точку, лежащую въ данномъ мѣстѣ на уровнѣ океана; обозначивъ въ такомъ случаѣ черезъ z высоту данной точки m надъ уровнемъ океана, мы получимъ для нея потенціалъ силы тяжести (черт. 9)

$$U(x, y, z) = -pz,$$

Такимъ образомъ

$$T_A^M(\overline{F}) = U(x, y, z)$$

причемъ

$$U(a, b, c) = 0;$$

такую функцію положенія или координатъ (x, y, z) мы будемъ называть <u>потенціаломъ</u> данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A; при вычисленіи потенціала исходный пунктъ $A(a, b, c)$ можетъ быть выбранъ вполнѣ произвольно, но разъ онъ указанъ, то потенціалъ данной консервативной силы будетъ имѣть для каждой точки $M(x, y, z)$ пространства опредѣленную величину, выражающую полную работу данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данный пунктъ $M(x, y, z)$.

Итакъ, <u>потенціаломъ данной консервативной силы</u> съ исходнымъ пунктомъ A мы будемъ называть нѣкоторую функцію $U(x, y, z)$, имѣющую опредѣленное значеніе въ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, обращающуюся въ нуль для исходнаго пункта $A(a, b, c)$ и <u>выражающую полную работу $T_A^M(\overline{F})$ данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія</u> изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данное положеніе $M(x, y, z)$ въ пространствѣ. Но перемѣщаясь съ точкою приложенія консервативной силы (черт. 8) изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ плоскостяхъ, нормальныхъ къ направленію консервативной силы, мы знаемъ, что при такихъ перемѣщеніяхъ элементарная работа данной консервативной силы будетъ равна нулю и потому потенціалъ консервативной силы при всѣхъ такихъ положеніяхъ будетъ также равенъ нулю, т. е. будетъ существовать цѣлая поверхность, проходящая черезъ выбранный исходный пунктъ A, на кото-

рой потенціалъ данной консервативной силы равенъ нулю; такая поверхность называется поверхностью уровня нулевого значенія потенціала данной консервативной силы. Перемѣщаясь подобнымъ же образомъ съ точкою приложенія данной консервативной силы изъ произвольнаго пункта $M(x, y, z)$, въ которомъ потенціалъ ея былъ равенъ нѣкоторой величинѣ c, мы опять убѣдимся, что существуетъ такая поверхность, проходящая черезъ данную точку $M(x, y, z)$, что потенціалъ данной консервативной силы имѣетъ во всѣхъ точкахъ этой пов.-сти ту же величину c, что и въ данной точкѣ $M(x, y, z)$; такая поверхность называется поверхностью уровня даннаго значенія c потенціала данной консервативной силы.

Въ справедливости послѣднихъ заключеній можно еще проще убѣдиться аналитически, ибо для каждаго значенія c будетъ существовать поверхность:

$$U(x, y, z) = c,$$

во всѣхъ точкахъ которой потенціалъ будетъ имѣть одну и ту же величину c и поверхность

$$U(x, y, z) = 0$$

будетъ поверхностью нулевого значенія потенціала данной консервативной силы.

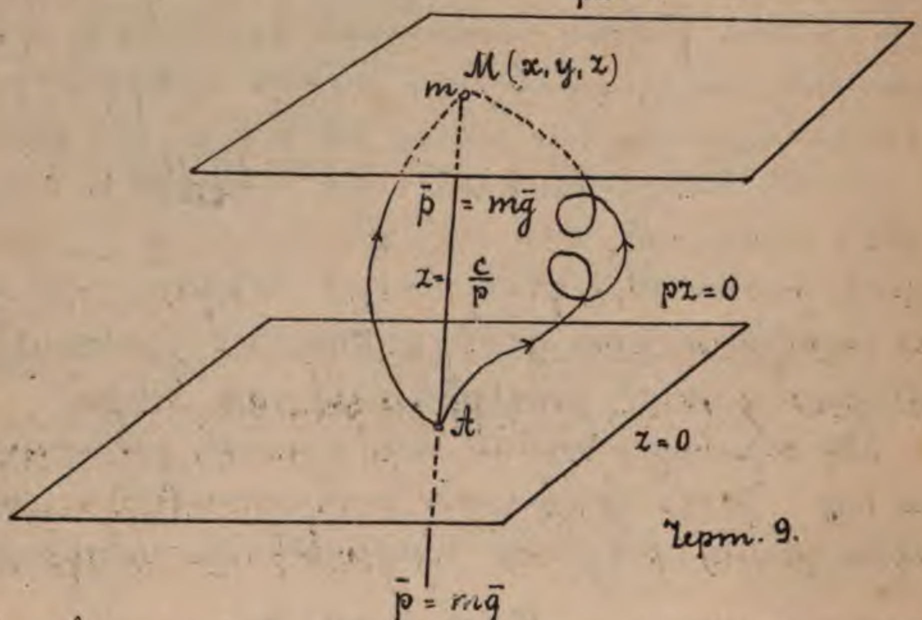
Примѣры.

1). При вычисленіи потенціала силы тяжести за исходный пунктъ берутъ обыкновенно точку, лежащую въ данномъ мѣстѣ на уровнѣ океана; обозначивъ въ такомъ случаѣ черезъ z высоту данной точки m надъ уровнемъ океана, мы получимъ для нея потенціалъ силы тяжести (черт. 9)

$$U(x, y, z) = -pz,$$

откуда ясно, что поверхности уровня потенціала силы тяжести будутъ горизонтальныя плоскости, удовлетворяющія уравненіямъ

$$pz = c \quad \text{или} \quad z = \frac{c}{p}.$$



Черт. 9.

2. При вычисленіи потенціала силъ притяженія и отталкиванія по закону Ньютона

$$f(r) = \mp k \frac{m}{r^2}$$

за исходный пунктъ берутъ точки, лежащія въ безконечности и потому потенціалъ такихъ силъ выразится изъ равенствъ

$$U(x, y, z) = \int_{\infty}^{r} f(r)\, dr = \mp km \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \mp km \left| -\frac{1}{r} \right|_{\infty}^{r} = \pm k \frac{m}{r}$$

Слѣдовательно, поверхности уровня потенціала такихъ силъ, удовлетворяя равенствамъ

$$k \cdot \frac{m}{r} = C \quad \text{или} \quad r = \frac{km}{C}$$

будутъ концентрическими шаровыми поверхностями

имѣющими общій центръ, совпадающій съ центромъ притяженія или отталкиванія.

Теорема. При переходѣ м. т., подверженной дѣйствію консервативной силы, изъ одного положенія въ другое $m_2(x_2, y_2, z_2)$, полная работа приложенной къ ней консервативной силы равна разности потенціаловъ этой консервативной силы для данныхъ двухъ положеній, т. е.

$$T_{m_1}^{m_2}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Дѣйствительно, такъ какъ полная работа данной консервативной силы не зависитъ отъ вида траекторіи ея точки приложенія, то перейдя съ этою точкою сначала изъ положенія $m_1(x_1, y_1, z_1)$ въ исходный пунктъ $A(a, b, c)$ (черт. 10), а затѣмъ изъ этого пункта во второе положеніе $m_2(x_2, y_2, z_2)$, мы не измѣнимъ полной работы данной консервативной силы и потому

Черт. 10.

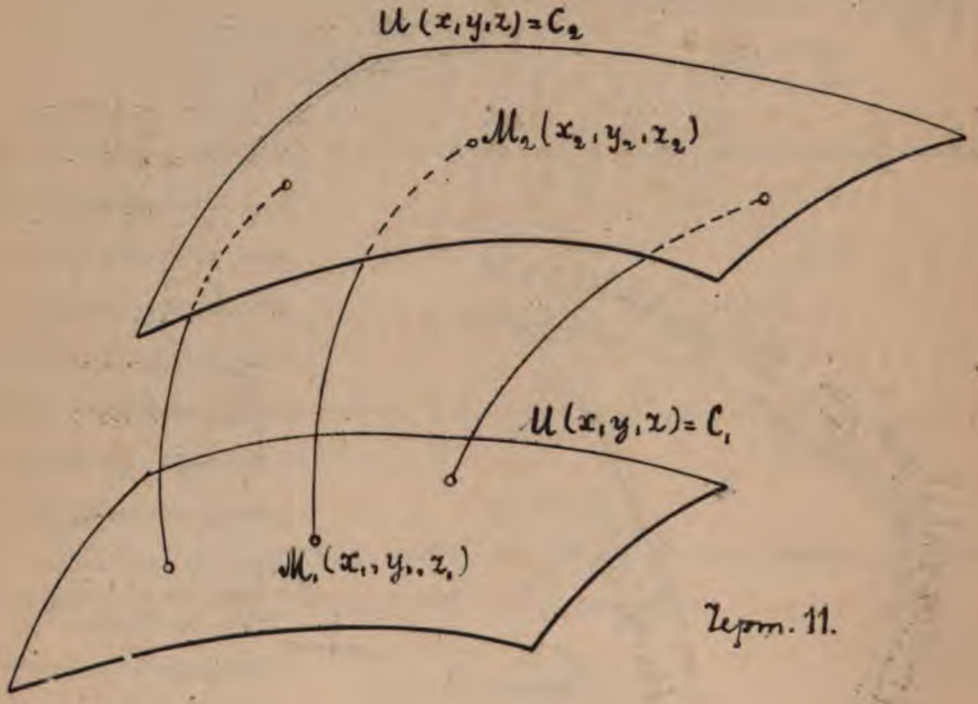
$$T_{m_1}^{m_2}(\bar{F}) = T_{m_1}^{A}(\bar{F}) + T_{A}^{m_2}(\bar{F}) =$$

$$= T_{A}^{m_2}(\bar{F}) - T_{A}^{m_1}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Полная работа консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ любой точки одной поверхности уровня ея потенціала въ любую точку другой поверхности уровня ея потенціала равна разности значеній потенціаловъ данной консервативной силы на этихъ поверхностяхъ.

Дѣйствительно, обозначивъ (черт. 11) черезъ (x_1, y_1, z_1) коор-



Черт. 11.

динаты любой точки M_1 поверхности уровня потенціала, равнаго C_1, т. е. положивъ

$$U(x_1, y_1, z_1) = C_1$$

а черезъ (x_2, y_2, z_2) - координаты любой точки M_2 поверхности уровня потенціала равнаго C_2, т. е. положивъ

$$U(x_2, y_2, z_2) = C_2$$

по предыдущей теоремѣ получимъ:

$$T_{M_1}^{M_2}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = C_2 - C_1$$

Выяснимъ теперь величину и направленіе консерва-

тивной силы въ пространствѣ.

Вообразивъ поверхность уровня потенціала

$$U(x, y, z) = C$$

данной консервативной силы, проходящую через данное положеніе $m(x, y, z)$ ея точки приложенія и сообщивъ точкѣ m безконечно малое перемѣщеніе $\overline{\Delta S}$, по предыдущей теоремѣ мы знаемъ, что

$$T_m^{m_1}(\overline{F}) = \Delta U$$

причемъ $T_m^{m_1}(\overline{F})$ эквивалентно элементарной работѣ

$$\overline{F}\,\overline{\Delta S} = F\Delta S \cos(F, \Delta S)$$

силы $\overline{F}$, т. е.

$$T_m^{m_1}(\overline{F}) = F\Delta S \cos(F, \Delta S) + \varepsilon \Delta S,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая безконечно малая величина, слѣдовательно

$$F\Delta S \cos(F, \Delta S) + \varepsilon \Delta S = \Delta U$$

1). Положимъ теперь, что элементарное перемѣщеніе $\overline{\Delta S}$ точки m совершается на поверхности уровня

$$U(x, y, z) = C$$

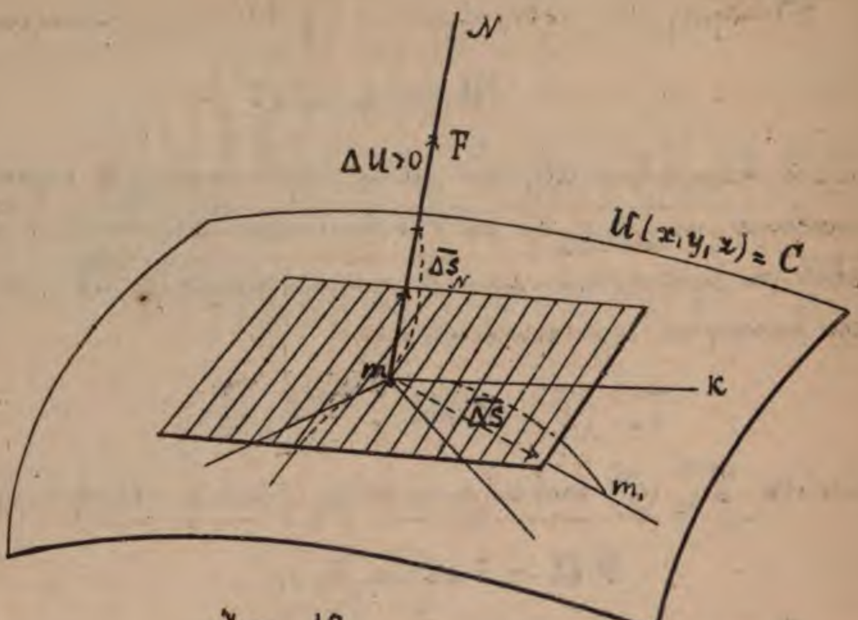
потенціала данной консервативной силы въ точкѣ $m(x, y, z)$; въ такомъ случаѣ

$$\Delta U = 0$$

и потому

$$F\Delta S \cos(F, \Delta S) + \varepsilon \Delta S = 0;$$

раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на ΔS и переходя къ предѣлу при $\Delta S = 0$, мы знаемъ, что направленіе сѣкущей $\overline{\Delta S}$ въ предѣлѣ совпадетъ съ направленіемъ касательной mk (черт. 12) къ поверхности уровня въ точкѣ m и потому



Черт. 12.

$$\cos(F, mk) = 0,$$

т. е. направленіе консервативной силы $\overline{F}$ перпендикулярно къ всевозможнымъ касательнымъ, проведеннымъ въ точкѣ m къ поверхности уровня, другими словами, перпендикулярно къ плоскости Q, касательной къ поверхности уровня въ разсматриваемой точкѣ, т. е. совпадаетъ съ направленіемъ нормали N къ этой поверхности въ разсматриваемой точкѣ, причемъ изъ равенствъ

$$\Delta U = \Delta S\left[F\cos(F, \Delta S) + \varepsilon\right]$$

видно, что при $\cos(F, \overline{\Delta S}) > 0$ приращеніе потенціала $\Delta U > 0$, т. е. $\overline{F}$ направлена по нормали N къ поверхности уровня потенціала къ точкѣ m, въ сторону возрастанія потенціала. Положимъ наконецъ, что точка m перемѣщается по нормали къ поверхности уровня потенціала въ данной точкѣ на векторъ $\overline{\Delta S_N}$ въ сторону возрастанія потенціала, тогда

$$\cos(F, \Delta S_N) = 1$$

и потому

$$F = \text{Пред.}\ \frac{\Delta u}{\Delta s_{\nu}}$$

Такимъ образомъ въ каждой точкѣ пространства консервативная сила направлена по нормали къ поверхности уровня ея потенціала въ этой точкѣ, притомъ въ сторону возрастанія потенціала и по величинѣ равна

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta u}{\Delta s_{\nu}},$$

т. е. предѣлу отношенія безконечно малаго приращенія потенціала консервативной силы при перемѣщеніи ея точки приложенія по нормали къ поверхности уровня, въ сторону возрастанія потенціала, къ самому этому перемѣщенію. Другими словами, консервативная сила въ каждой точкѣ пространства совпадаетъ по величинѣ и направленію съ диференціальнымъ параметромъ[x)] (см. Статика Гл. II, отд. I, §4) поверхности уровня ея потенціала въ этой т. и потому проекціи консервативной силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O, x, y, z) должны выразиться равенствами

$$\mathfrak{X} = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\delta u}{\delta y}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\delta u}{\delta z}$$

въ чемъ и непосредственно не трудно убѣдиться

Дѣйствительно, мы доказали, что

$$\Delta U = \overline{F}\,\overline{\Delta s} + \varepsilon\,\Delta s$$

причемъ

$$\Delta U = \frac{\delta u}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta u}{\delta z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta s$$

и

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = \mathfrak{X}\cdot\Delta x + \mathfrak{Y}\Delta y + \mathfrak{Z}\Delta z$$

гдѣ ε и ε_1 суть нѣкоторыя безконечно малыя

x) $N = +\sqrt{(\partial f)^2 + (\partial f)^2 + (\partial f)^2}$ называется дифференціальнымъ параметромъ

величины.

Слѣдовательно

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta s = \mathfrak{X}\Delta x + \mathfrak{Y}\Delta y + \mathfrak{Z}\Delta z + \varepsilon \Delta s$$

это равенство остается справедливымъ при всевозможныхъ значеніяхъ безконечно малыхъ величинъ Δx, Δy, Δz; положивъ въ немъ $\Delta y = \Delta z = 0$, раздѣлимъ его на Δx и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$, тогда мы придемъ къ равенствамъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mathfrak{X} \quad \text{или} \quad \mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости равенствъ:

$$\mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и потому величина и направленіе консервативной силы въ каждой точкѣ пространства совпадаетъ съ дифференціальнымъ параметромъ въ этой точкѣ поверхности уровня:

$$U(x, y, z) = C$$

потенціала данной консервативной силы.

Итакъ, мы доказали, что проекціи $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ консервативной силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ выражаются соотвѣтственными частными производными отъ ея потенціала, а все же дифференціальным параметром

$$U(x, y, z),$$

т. е.

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x};$$

такимъ образомъ указанныя проекціи консервативной силы должны удовлетворять тремъ равенствамъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Наоборотъ, если проекціи (X, Y, Z) силы $\overline{F}$, будучи функціями только координатъ м. т. (x, y, z), удовлетворяютъ написаннымъ равенствамъ, то, какъ доказывается въ интегральномъ исчисленіи, существуетъ такая функція $U(x, y, z)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

и сила $\overline{F}$ будетъ консервативна, ибо

$$T_A^M(\overline{F}) = \text{Пред.}\ S_A^M\, \overline{F}\,\overline{\Delta s} = \text{Пред.}\ S_A^M (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z) =$$
$$= \text{Пред.}\ S_A^M \left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\right) =$$
$$= \text{Пред.}\ S_A^M\, \Delta U = U(x, y, z) - U(a, b, c)$$

т. е. полная работа такой силы при переходѣ ея точки приложенія изъ произвольнаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ любой пунктъ $M(x, y, z)$ не будетъ зависѣть отъ вида траекторіи и потому такая сила $\overline{F}$ будетъ консервативна, причемъ разность

$$U(x, y, z) - U(a, b, c)$$

очевидно будетъ потенціаломъ данной консервативной силы при исходномъ пунктѣ $A(a, b, c)$

Итакъ, равенства

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

служатъ необходимымъ и достаточнымъ аналитическимъ условіемъ консервативной силы, заданной тремя ея проекціями X, Y, Z на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$.

Такимъ образомъ

$$T_A^M(\bar{F}) = U(x, y, z)$$

причемъ

$$U(a, b, c) = 0;$$

такую функцію положенія или координатъ (x, y, z) мы будемъ называть потенціаломъ данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A; при вычисленіи потенціала исходный пунктъ $A(a, b, c)$ можетъ быть выбранъ вполнѣ произвольно, но разъ онъ указанъ, то потенціалъ данной консервативной силы будетъ имѣть для каждой точки $M(x, y, z)$ пространства опредѣленную величину, выражающую полную работу данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данный пунктъ $M(x, y, z)$.

Итакъ, потенціаломъ данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A мы будемъ называть нѣкоторую функцію $U(x, y, z)$, имѣющую опредѣленное значеніе въ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, обращающуюся въ нуль для исходнаго пункта $A(a, b, c)$ и выражающую полную работу $T_A^M(\bar{F})$ данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данное положеніе $M(x, y, z)$ въ пространствѣ. Но перемѣщаясь съ точкою приложенія консервативной силы (черт. 8) изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ плоскостяхъ, нормальныхъ къ направленію консервативной силы, мы знаемъ, что при такихъ перемѣщеніяхъ элементарная работа данной консервативной силы будетъ равна нулю и потому потенціалъ консервативной силы при всѣхъ такихъ положеніяхъ будетъ также равенъ нулю, т.е. будетъ существовать цѣлая поверхность, проходящая черезъ выбранный исходный пунктъ A, на кото-

рой потенціалъ данной консервативной силы равенъ нулю; такая поверхность называется поверхностью уровня нулевого значенія потенціала данной консервативной силы. Перемѣщаясь подобнымъ же образомъ съ точкою приложенія данной консервативной силы изъ произвольнаго пункта $M(x, y, z)$, въ которомъ потенціалъ ея былъ равенъ нѣкоторой величинѣ c, мы опять убѣдимся, что существуетъ такая поверхность, проходящая черезъ данную точку $M(x, y, z)$, что потенціалъ данной консервативной силы имѣетъ во всѣхъ точкахъ этой пов.-сти ту же величину c, что и въ данной точкѣ $M(x, y, z)$; такая поверхность называется поверхностью уровня даннаго значенія c потенціала данной консервативной силы.

Въ справедливости послѣднихъ заключеній можно еще проще убѣдиться аналитически, ибо для каждаго значенія c будетъ существовать поверхность:

$$U(x, y, z) = c,$$

во всѣхъ точкахъ которой потенціалъ будетъ имѣть одну и ту же величину c и поверхность

$$U(x, y, z) = 0$$

будетъ поверхностью нулевого значенія потенціала данной консервативной силы.

Примѣры.

1). При вычисленіи потенціала силы тяжести за исходный пунктъ берутъ обыкновенно точку, лежащую въ данномъ мѣстѣ на уровнѣ океана; обозначивъ въ такомъ случаѣ черезъ z высоту данной точки m надъ уровнемъ океана, мы получимъ для нея потенціалъ силы тяжести (черт. 9)

$$U(x, y, z) = -pz,$$

Такимъ образомъ

$$T_A^M(\bar{F}) = U(x, y, z)$$

причемъ

$$U(a, b, c) = 0;$$

такую функцію положенія или координатъ (x, y, z) мы будемъ называть потенціаломъ данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A; при вычисленіи потенціала исходный пунктъ $A(a, b, c)$ можетъ быть выбранъ вполнѣ произвольно, но разъ онъ указанъ, то потенціалъ данной консервативной силы будетъ имѣть для каждой точки $M(x, y, z)$ пространства опредѣленную величину, выражающую полную работу данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данный пунктъ $M(x, y, z)$.

Итакъ, потенціаломъ данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A мы будемъ называть нѣкоторую функцію $U(x, y, z)$, имѣющую опредѣленное значеніе въ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, обращающуюся въ нуль для исходнаго пункта $A(a, b, c)$ и выражающую полную работу $T_A^M(\bar{F})$ данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данное положеніе $M(x, y, z)$ въ пространствѣ. Но перемѣщаясь съ точкою приложенія консервативной силы (черт. 8) изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ плоскостяхъ, нормальныхъ къ направленію консервативной силы, мы знаемъ, что при такихъ перемѣщеніяхъ элементарная работа данной консервативной силы будетъ равна нулю и потому потенціалъ консервативной силы при всѣхъ такихъ положеніяхъ будетъ тоже равенъ нулю, т. е. будетъ существовать цѣлая поверхность, проходящая черезъ выбранный исходный пунктъ A, на кото-

рой потенціалъ данной консервативной силы равенъ нулю; такая поверхность называется <u>поверхностью уровня нулевого значенія потенціала</u> данной консервативной силы. Перемѣщаясь подобнымъ же образомъ съ точкою приложенія данной консервативной силы изъ произвольнаго пункта $M(x, y, z)$, въ которомъ потенціалъ ея былъ равенъ нѣкоторой величинѣ c, мы опять убѣдимся, что существуетъ такая поверхность, проходящая черезъ данную точку $M(x, y, z)$, что потенціалъ данной консервативной силы имѣетъ во всѣхъ точкахъ этой пов.-сти ту же величину c, что и въ данной точкѣ $M(x, y, z)$; такая поверхность называется <u>поверхностью уровня даннаго значенія c потенціала данной консервативной силы</u>.

Въ справедливости послѣднихъ заключеній можно еще проще убѣдиться аналитически, ибо для каждаго значенія c будетъ существовать поверхность:

$$U(x, y, z) = c,$$

во всѣхъ точкахъ которой потенціалъ будетъ имѣть одну и ту же величину c и поверхность

$$U(x, y, z) = 0$$

будетъ поверхностью <u>нулевого значенія</u> потенціала данной консервативной силы.

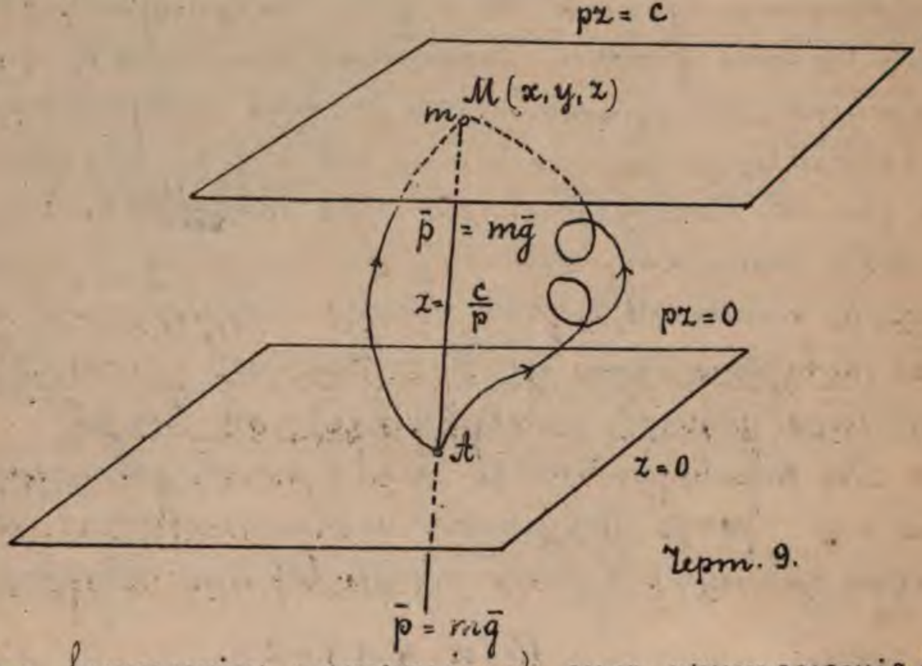
Примѣры.

1). При вычисленіи потенціала силы тяжести за исходный пунктъ берутъ обыкновенно точку, лежащую въ данномъ мѣстѣ на уровнѣ океана; обозначивъ въ такомъ случаѣ черезъ z высоту данной точки m надъ уровнемъ океана, мы получимъ для нея потенціалъ силы тяжести (черт. 9)

$$U(x, y, z) = -pz,$$

откуда ясно, что поверхности уровня потенціала силы тяжести будутъ горизонтальныя плоскости, удовлетворяющія уравненіямъ

$$pz = c \quad \text{или} \quad z = \frac{c}{p}.$$



Черт. 9.

2. При вычисленіи потенціала силъ притяженія и отталкиванія по закону Ньютона

$$f(r) = \mp k\,\frac{m}{r^2}$$

за исходный пунктъ берутъ точки, лежащія въ безконечности и потому потенціалъ такихъ силъ выразится изъ равенствъ

$$U(x, y, z) = \int_{\infty}^{r} f(r)\,dr = \mp km \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \mp km \left| -\frac{1}{r} \right|_{\infty}^{r} = \pm k\,\frac{m}{r}$$

Слѣдовательно, поверхности уровня потенціала такихъ силъ, удовлетворяя равенствамъ

$$k \cdot \frac{m}{r} = C \quad \text{или} \quad r = \frac{km}{C}$$

будутъ концентрическими шаровыми поверхностями

имѣющими общій центръ, совпадающій съ центромъ притяженія или отталкиванія).

Теорема. При переходѣ м. т., подверженной дѣйствію консервативной силы, изъ одного положенія въ другое $m_2(x_2, y_2, z_2)$, полная работа приложенной къ ней консервативной силы равна разности потенціаловъ этой консервативной силы для данныхъ двухъ положеній, т. е.

$$T_{m_1}^{m_2}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Дѣйствительно, такъ какъ полная работа данной консервативной силы не зависитъ отъ вида траекторіи ея точки приложенія, то перейдя съ этою точкою сначала изъ положенія $m_1(x_1, y_1, z_1)$ въ исходный пунктъ $A(a, b, c)$ (черт. 10), а затѣмъ изъ этого пункта во второе положеніе $m_2(x_2, y_2, z_2)$, мы не измѣнимъ полной работы данной консервативной силы и потому

Черт. 10.

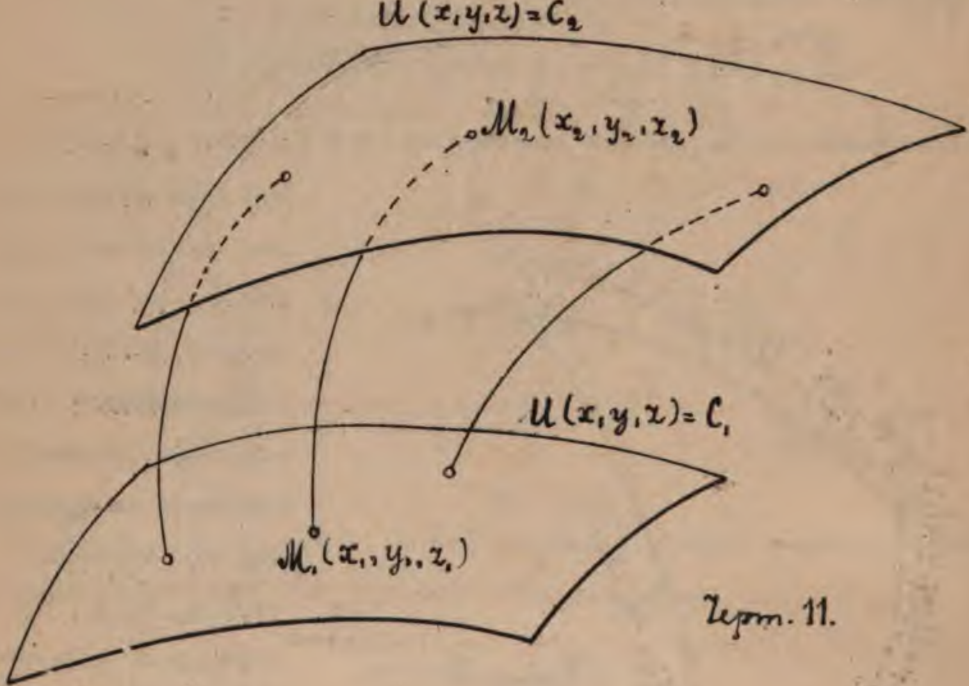
$$T_{m_1}^{m_2}(\bar{F}) = T_{m_1}^{A}(\bar{F}) + T_{A}^{m_2}(\bar{F}) =$$

$$= T_{A}^{m_2}(\bar{F}) - T_{A}^{m_1}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Полная работа консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ любой точки одной поверхности уровня ея потенціала въ любую точку другой поверхности уровня ея потенціала равна разности значеній потенціаловъ данной консервативной силы на этихъ поверхностяхъ.

Дѣйствительно, обозначивъ (черт. 11) черезъ (x_1, y_1, z_1) коор-



Черт. 11.

динаты любой точки M_1 поверхности уровня потенціала, равнаго C_1, т. е. положивъ

$$U(x_1, y_1, z_1) = C_1$$

а черезъ (x_2, y_2, z_2) - координаты любой точки M_2 поверхности уровня потенціала равнаго C_2, т. е. положивъ

$$U(x_2, y_2, z_2) = C_2$$

по предыдущей теоремѣ получимъ:

$$T_{M_1}^{M_2}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = C_2 - C_1$$

Выяснимъ теперь величину и направленіе консерва-

тивной силы въ пространствѣ.

Вообразивъ поверхность уровня потенціала

$$\mathcal{U}(x, y, z) = c$$

данной консервативной силы, проходящую черезъ данное положеніе $m(x, y, z)$ ея точки приложенія и сообщивъ точкѣ m безконечно малое перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$, по предыдущей теоремѣ мы знаемъ, что

$$T_{m}^{m_1}(\overline{F}) = \Delta \mathcal{U}$$

причемъ $T_{m}^{m_1}(\overline{F})$ эквивалентно элементарной работѣ

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s)$$

силы $\overline{F}$, т. е.

$$T_{m}^{m_1}(\overline{F}) = F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая безконечно малая величина, слѣдовательно

$$F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s = \Delta \mathcal{U}$$

1). Положимъ теперь, что элементарное перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$ точки m совершается на поверхности уровня

$$\mathcal{U}(x, y, z) = c$$

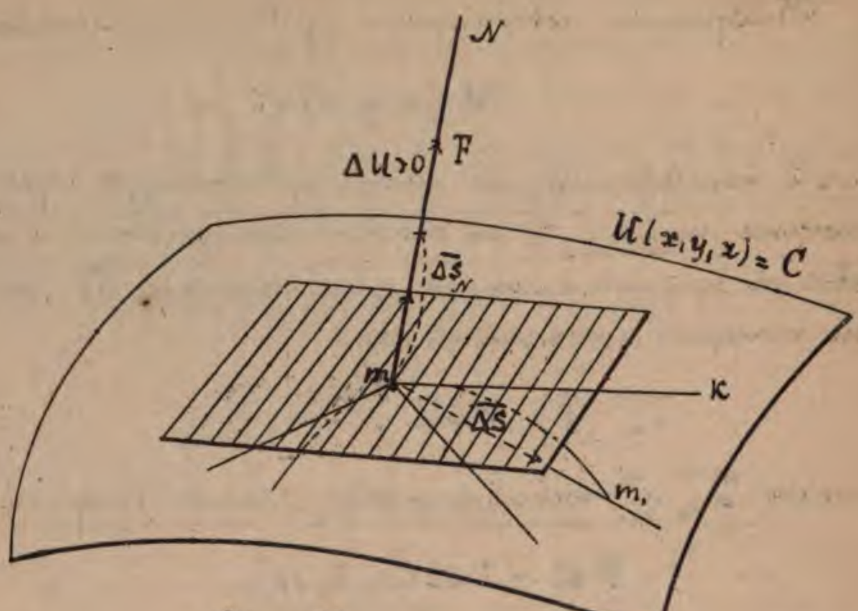
потенціала данной консервативной силы въ точкѣ $m(x, y, z)$; въ такомъ случаѣ

$$\Delta \mathcal{U} = 0$$

и потому

$$F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s = 0;$$

раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на Δs и переходя къ предѣлу при $\Delta s = 0$, мы знаемъ, что направленіе сѣкущей $\overline{\Delta s}$ въ предѣлѣ совпадетъ съ направленіемъ касательной mk (черт. 12) къ поверхности уровня въ точкѣ m и потому



Черт. 12.

$$\cos(F, mk) = 0,$$

т. е. направленіе консервативной силы $\overline{F}$ перпендикулярно къ всевозможнымъ касательнымъ, проведеннымъ въ точкѣ m къ поверхности уровня, другими словами, перпендикулярно къ плоскости Q, касательной къ поверхности уровня въ разсматриваемой точкѣ, т. е. совпадаетъ съ направленіемъ нормали N къ этой поверхности въ разсматриваемой точкѣ, причемъ изъ равенствъ

$$\Delta U = \Delta S\left[F\cos(F, \Delta S) + \varepsilon\right]$$

видно, что при $\cos(F, \overline{\Delta S}) > 0$ приращеніе потенціала $\Delta U > 0$, т. е. $\overline{F}$ направлена по нормали N къ поверхности уровня потенціала къ точкѣ m, въ сторону возрастанія потенціала. Положимъ наконецъ, что точка m перемѣщается по нормали къ поверхности уровня потенціала въ данной точкѣ на векторъ $\overline{\Delta S_N}$ въ сторону возрастанія потенціала, тогда

$$\cos(F, \Delta S_N) = 1$$

и потому

$$F = \text{Пред.}\ \frac{\Delta U}{\Delta S_N}$$

Такимъ образомъ въ каждой точкѣ пространства консервативная сила направлена по нормали къ поверхности уровня ея потенціала въ этой точкѣ, притомъ въ сторону возрастанія потенціала и по величинѣ равна

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta U}{\Delta S_N},$$

т. е. предѣлу отношенія безконечно малаго приращенія потенціала консервативной силы при перемѣщеніи ея точки приложенія по нормали къ поверхности уровня, въ сторону возрастанія потенціала, къ самому этому перемѣщенію. Другими словами, консервативная сила въ каждой точкѣ пространства совпадаетъ по величинѣ и направленію съ дифференціальнымъ параметромъ[x] (см. Статика Гл. II, отд. I, §4) поверхности уровня ея потенціала въ этой т. и потому проекціи консервативной силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O, x, y, z) должны выразиться равенствами

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

въ чемъ и непосредственно не трудно убѣдиться.

Дѣйствительно, мы доказали, что

$$\Delta U = \overline{F}\,\overline{\Delta S} + \varepsilon\,\Delta S$$

причемъ

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta S$$

и

$$\overline{F}\,\overline{\Delta S} = X\cdot\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z$$

гдѣ ε и ε_1 суть нѣкоторыя безконечно малыя

x) $N = +\sqrt{(\partial f)^2 + (\partial f)^2 + (\partial f)^2}$ называется дифференціальнымъ параметромъ

Такимъ образомъ

$$T_A^M(\bar{F}) = U(x, y, z)$$

причемъ

$$U(a, b, c) = 0;$$

такую функцію положенія или координатъ (x, y, z) мы будемъ называть <u>потенціаломъ</u> данной консервативной силы съ исходнымъ пунктомъ A; при вычисленіи потенціала исходный пунктъ $A(a, b, c)$ можетъ быть выбранъ вполнѣ произвольно, но разъ онъ указанъ, то потенціалъ данной консервативной силы будетъ имѣть для каждой точки $M(x, y, z)$ пространства опредѣленную величину, выражающую полную работу данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данный пунктъ $M(x, y, z)$.

Итакъ, <u>потенціаломъ данной консервативной силы</u> съ исходнымъ пунктомъ A мы будемъ называть нѣкоторую функцію $U(x, y, z)$, имѣющую опредѣленное значеніе въ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ пространства, обращающуюся въ нуль для исходнаго пункта $A(a, b, c)$ и <u>выражающую полную работу $T_A^M(\bar{F})$ данной консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ данное положеніе $M(x, y, z)$ въ пространствѣ</u>. Но перемѣщаясь съ точкою приложенія консервативной силы (черт. 8) изъ выбраннаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ плоскостяхъ, нормальныхъ къ направленію консервативной силы, мы знаемъ, что при такихъ перемѣщеніяхъ элементарная работа данной консервативной силы будетъ равна нулю и потому потенціалъ консервативной силы при всѣхъ такихъ положеніяхъ будетъ также равенъ нулю, т.е. будетъ существовать цѣлая поверхность, проходящая [illegible] чрезъ выбранный исходный пунктъ A, на кото-

рой потенціалъ данной консервативной силы равенъ нулю; такая поверхность называется поверхностью уровня нулевого значенія потенціала данной консервативной силы. Перемѣщаясь подобнымъ же образомъ съ точкою приложенія данной консервативной силы изъ произвольнаго пункта $M(x, y, z)$, въ которомъ потенціалъ ея былъ равенъ нѣкоторой величинѣ c, мы опять убѣдимся, что существуетъ такая поверхность, проходящая черезъ данную точку $M(x, y, z)$, что потенціалъ данной консервативной силы имѣетъ во всѣхъ точкахъ этой пов.-сти ту же величину c, что и въ данной точкѣ $M(x, y, z)$; такая поверхность называется поверхностью уровня даннаго значенія c потенціала данной консервативной силы.

Въ справедливости послѣднихъ заключеній можно еще проще убѣдиться аналитически, ибо для каждаго значенія c будетъ существовать поверхность:

$$U(x, y, z) = c,$$

во всѣхъ точкахъ которой потенціалъ будетъ имѣть одну и ту же величину c и поверхность

$$U(x, y, z) = 0$$

будетъ поверхностью нулевого значенія потенціала данной консервативной силы.

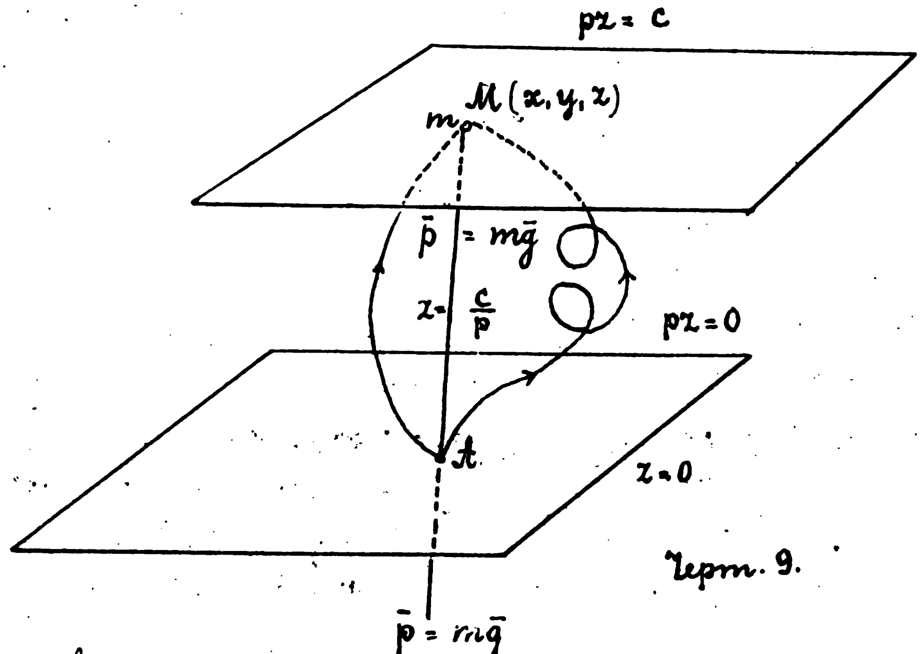
Примѣры.

1). При вычисленіи потенціала силы тяжести за исходный пунктъ берутъ обыкновенно точку, лежащую въ данномъ мѣстѣ на уровнѣ океана; обозначивъ въ такомъ случаѣ черезъ z высоту данной точки m надъ уровнемъ океана, мы получимъ для нея потенціалъ силы тяжести (черт. 9)

$$U(x, y, z) = -pz,$$

откуда ясно, что поверхности уровня потенціала силы тяжести будутъ горизонтальныя плоскости, удовлетворяющія уравненіямъ

$$pz = c \quad \text{или} \quad z = \frac{c}{p}.$$



Черт. 9.

2. При вычисленіи потенціала силъ притяженія и отталкиванія по закону Ньютона

$$f(r) = \mp k \frac{m}{r^2}$$

за исходный пунктъ берутъ точки, лежащія въ безконечности и потому потенціалъ такихъ силъ выразится изъ равенствъ

$$U(x, y, z) = \int_{\infty}^{r} f(r)\, dr = \mp km \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \mp km \left| -\frac{1}{r} \right|_{\infty}^{r} = \pm k \frac{m}{r}.$$

Слѣдовательно, поверхности уровня потенціала такихъ силъ, удовлетворяя равенствамъ

$$k \frac{m}{r} = C \quad \text{или} \quad r = \frac{km}{C}$$

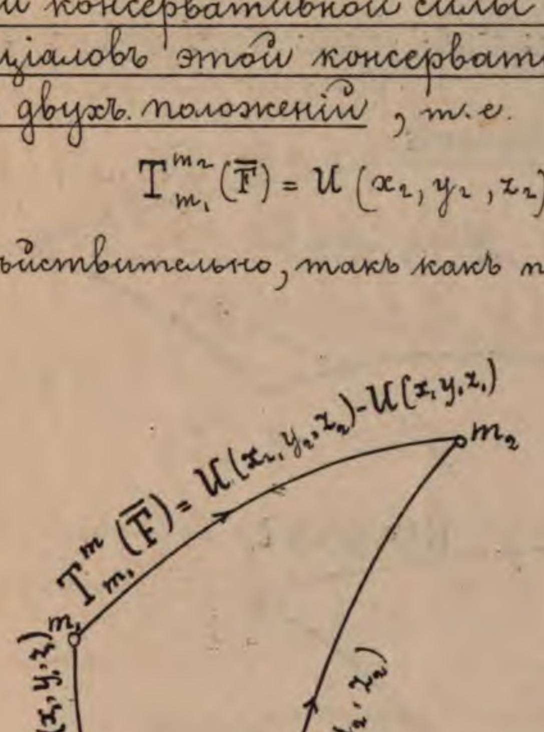
будутъ концентрическими шаровыми поверхностями

имѣющими общій центръ, совпадающій съ центромъ притяженія или отталкиванія.

Теорема. При переходѣ м. т., подверженной дѣйствію консервативной силы, изъ одного положенія въ другое $m_2(x_2, y_2, z_2)$, полная работа приложенной къ ней консервативной силы равна разности потенціаловъ этой консервативной силы для данныхъ двухъ положеній, т. е.

$$T_{m_1}^{m_2}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Дѣйствительно, такъ какъ полная работа данной консервативной силы не зависитъ отъ вида траекторіи ея точки приложенія, то перейдя съ этою точкою сначала изъ положенія $m_1(x_1, y_1, z_1)$ въ исходный пунктъ $A(a, b, c)$ (черт. 10), а затѣмъ изъ этого пункта во второе положеніе $m_2(x_2, y_2, z_2)$, мы не измѣнимъ полной работы данной консервативной силы и потому



Черт. 10.

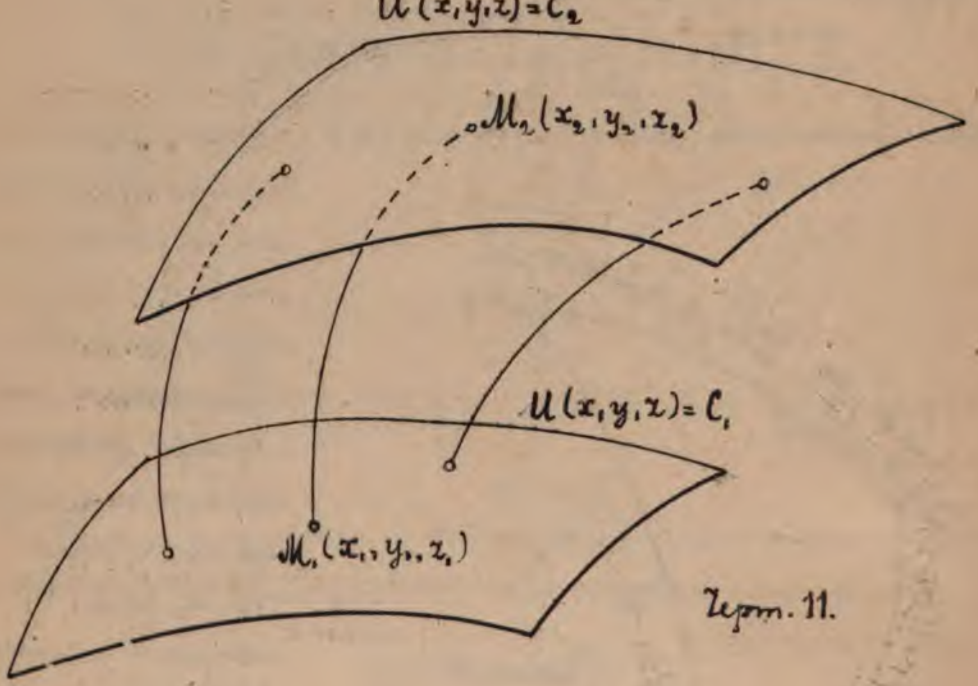
$$T_{m_1}^{m_2}(\overline{F}) = T_{m_1}^{A}(\overline{F}) + T_{A}^{m_2}(\overline{F}) =$$

$$= T_{A}^{m_2}(\overline{F}) - T_{A}^{m_1}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. <u>Полная работа консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ любой точки одной поверхности уровня ея потенціала въ любую точку другой поверхности уровня ея потенціала равна разности значеній потенціаловъ данной консервативной силы на этихъ поверхностяхъ.</u>

Дѣйствительно, обозначивъ (черт. 11) черезъ (x_1, y_1, z_1) коор-



Черт. 11.

динаты любой точки M_1 поверхности уровня потенціала, равнаго C_1, т. е. положивъ

$$U(x_1, y_1, z_1) = C_1$$

а черезъ (x_2, y_2, z_2) - координаты любой точки M_2 поверхности уровня потенціала равнаго C_2, т. е. положивъ

$$U(x_2, y_2, z_2) = C_2$$

по предыдущей теоремѣ получимъ:

$$\dot{T}_{M_1}^{M_2}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = C_2 - C_1$$

Выяснимъ теперь величину и направленіе консерва-

тивной силы въ пространствѣ.

Вообразивъ поверхность уровня потенціала

$$\mathcal{U}(x, y, z) = c$$

данной консервативной силы, проходящую черезъ данное положеніе $m(x, y, z)$ ея точки приложенія и сообщивъ точкѣ m безконечно малое перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$, по предыдущей теоремѣ мы знаемъ, что

$$T_{m}^{m_1}(\overline{F}) = \Delta \mathcal{U}$$

причемъ $T_{m}^{m_1}(\overline{F})$ эквивалентно элементарной работѣ

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s)$$

силы $\overline{F}$, т. е.

$$T_{m}^{m_1}(\overline{F}) = F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая безконечно малая величина, слѣдовательно

$$F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s = \Delta \mathcal{U}$$

1). Положимъ теперь, что элементарное перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$ точки m совершается на поверхности уровня

$$\mathcal{U}(x, y, z) = c$$

потенціала данной консервативной силы въ точкѣ $m(x, y, z)$; въ такомъ случаѣ

$$\Delta \mathcal{U} = 0$$

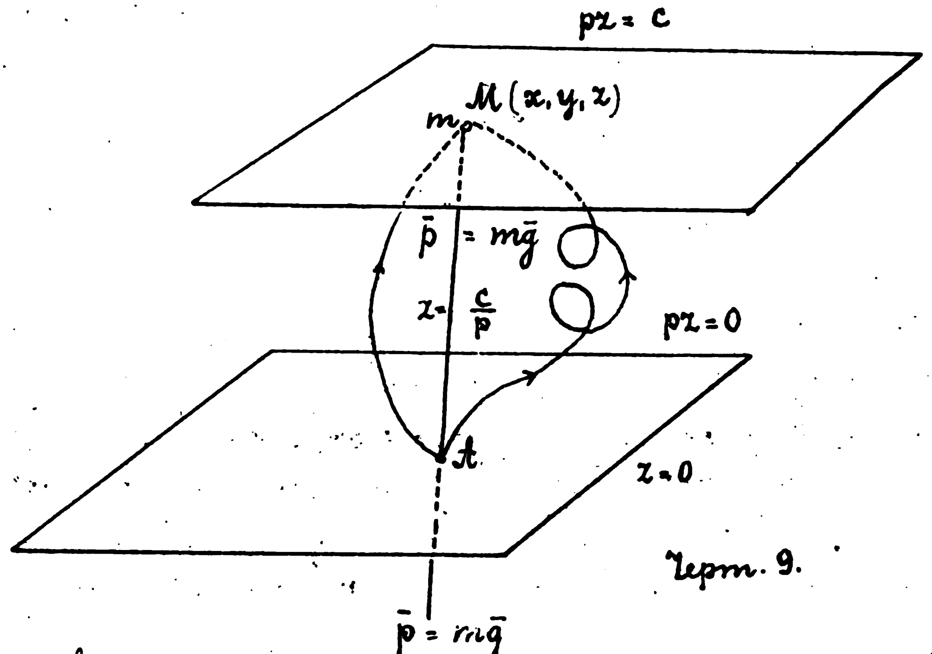
и потому

$$F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s = 0;$$

раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на Δs и переходя къ предѣлу при $\Delta s = 0$, мы знаемъ, что направленіе сѣкущей $\overline{\Delta s}$ въ предѣлѣ совпадетъ съ направленіемъ касательной mk (черт. 12) къ поверхности уровня въ точкѣ m и потому

откуда ясно, что поверхности уровня потенціала силы тяжести будутъ горизонтальныя плоскости, удовлетворяющія уравненіямъ

$$pz = c \quad \text{или} \quad z = \frac{c}{p}.$$



Черт. 9.

2. При вычисленіи потенціала силъ притяженія и отталкиванія по закону Ньютона

$$f(r) = \mp k \frac{m}{r^2}$$

за исходный пунктъ берутъ точки, лежащія въ безконечности и потому потенціалъ такихъ силъ выразится изъ равенствъ

$$U(x, y, z) = \int_{\infty}^{r} f(r)\, dr = \mp km \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} =$$
$$= \mp km \left| -\frac{1}{r} \right|_{\infty}^{r} = \pm k \frac{m}{r}$$

Слѣдовательно, поверхности уровня потенціала такихъ силъ, удовлетворяя равенствамъ

$$k \frac{m}{r} = c \quad \text{или} \quad r = \frac{km}{c}$$

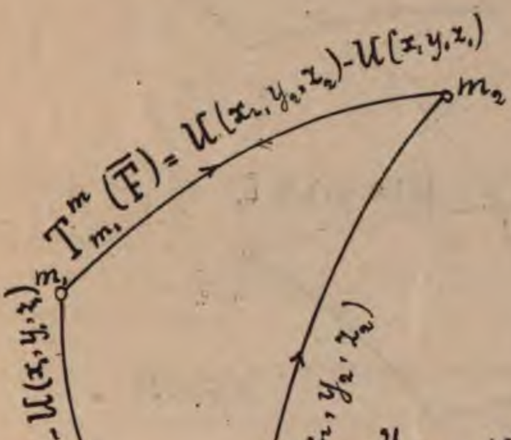
будутъ концентрическими шаровыми поверхностями

имѣющими общій центръ, совпадающій съ центромъ притяженія или отталкиванія.

Теорема. При переходѣ м. т., подверженной дѣйствію консервативной силы, изъ одного положенія въ другое $m_2(x_2, y_2, z_2)$, полная работа приложенной къ ней консервативной силы равна разности потенціаловъ этой консервативной силы для данныхъ двухъ положеній, т.е.

$$T_{m_1}^{m_2}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Дѣйствительно, такъ какъ полная работа данной консервативной силы не зависитъ отъ вида траекторіи ея точки приложенія, то перейдя съ этою точкою сначала изъ положенія $m_1(x_1, y_1, z_1)$ въ исходный пунктъ $A(a,b,c)$ (черт. 10), а затѣмъ изъ этого пункта во второе положеніе $m_2(x_2, y_2, z_2)$, мы не измѣнимъ полной работы данной консервативной силы и потому



Черт. 10.

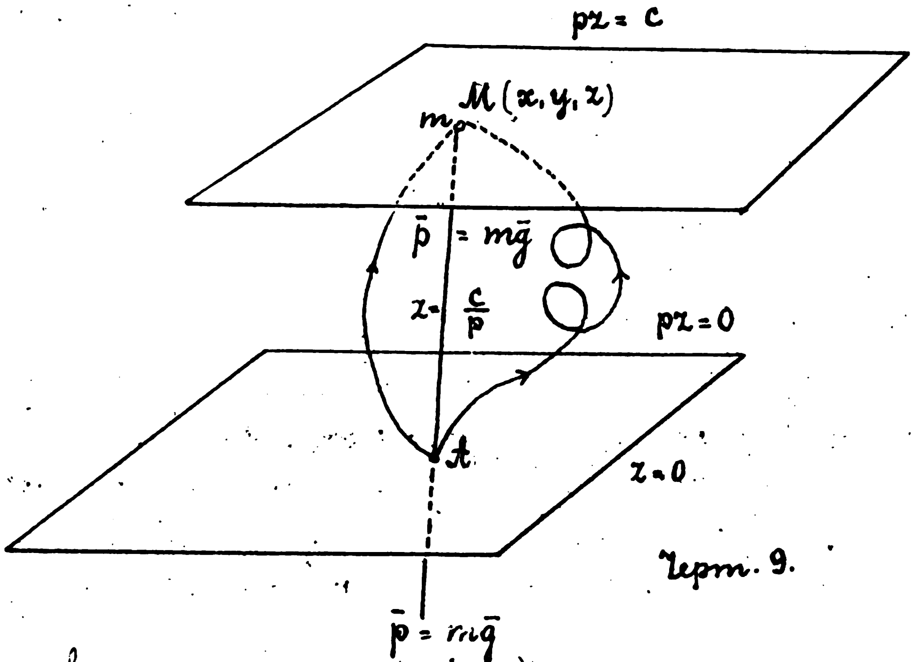
$$T_{m_1}^{m_2}(\bar{F}) = T_{m_1}^{A}(\bar{F}) + T_{A}^{m_2}(\bar{F}) =$$

$$= T_{A}^{m_2}(\bar{F}) - T_{A}^{m_1}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

что и требовалось доказать.

откуда ясно, что поверхности уровня потенціала силы тяжести будутъ горизонтальныя плоскости, удовлетворяющія уравненіямъ

$$pz = c \quad \text{или} \quad z = \frac{c}{p}.$$



Черт. 9.

2. При вычисленіи потенціала силъ притяженія и отталкиванія по закону Ньютона

$$f(r) = \mp k\frac{m}{r^2}$$

за исходный пунктъ берутъ точки, лежащія въ безконечности и потому потенціалъ такихъ силъ выразится изъ равенствъ

$$U(x,y,z) = \int_\infty^r f(r)\,dr = \mp km\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \mp km\left|-\frac{1}{r}\right|_\infty^r = \pm k\frac{m}{r}$$

Слѣдовательно, поверхности уровня потенціала такихъ силъ, удовлетворяя равенствамъ

$$k\frac{m}{r} = C \quad \text{или} \quad r = \frac{km}{C}$$

будутъ концентрическими шаровыми поверхностями

имѣющими общій центръ, совпадающій съ центромъ притяженія или отталкиванія.

Теорема. При переходѣ м. т., подверженной дѣйствію консервативной силы, изъ одного положенія въ другое $m_2(x_2, y_2, z_2)$, полная работа приложенной къ ней консервативной силы равна разности потенціаловъ этой консервативной силы для данныхъ двухъ положеній, т. е.

$$T_{m_1}^{m_2}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Дѣйствительно, такъ какъ полная работа данной консервативной силы не зависитъ отъ вида траекторіи ея точки приложенія, то перейдя съ этою точкою сначала изъ положенія $m_1(x_1, y_1, z_1)$ въ исходный пунктъ $A(a, b, c)$ (черт. 10), а затѣмъ изъ этого пункта во второе положеніе $m_2(x_2, y_2, z_2)$, мы не измѣнимъ полной работы данной консервативной силы и потому

Черт. 10.

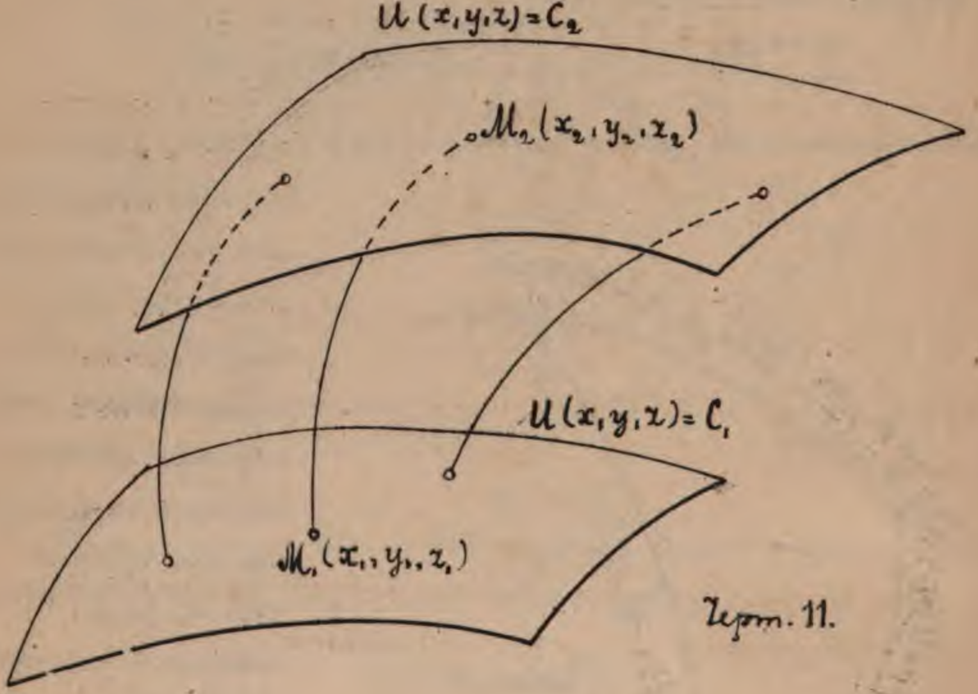
$$T_{m_1}^{m_2}(\overline{F}) = T_{m_1}^{A}(\overline{F}) + T_{A}^{m_2}(\overline{F}) =$$

$$= T_{A}^{m_2}(\overline{F}) - T_{A}^{m_1}(\overline{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Полная работа консервативной силы при переходѣ ея точки приложенія изъ любой точки одной поверхности уровня ея потенціала въ любую точку другой поверхности уровня ея потенціала равна разности значеній потенціаловъ данной консервативной силы на этихъ поверхностяхъ.

Дѣйствительно, обозначивъ (черт. 11) черезъ (x_1, y_1, z_1) коор-



Черт. 11.

динаты любой точки M_1 поверхности уровня потенціала, равнаго C_1, т. е. положивъ

$$U(x_1, y_1, z_1) = C_1$$

а черезъ (x_2, y_2, z_2) - координаты любой точки M_2 поверхности уровня потенціала равнаго C_2, т. е. положивъ

$$U(x_2, y_2, z_2) = C_2$$

по предыдущей теоремѣ получимъ:

$$T_{M_1}^{M_2}(\bar{F}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = C_2 - C_1$$

Выяснимъ теперь величину и направленіе консерва-

тивной силы въ пространствѣ.

Вообразивъ поверхность уровня потенціала

$$U(x, y, z) = c$$

данной консервативной силы, проходящую черезъ данное положеніе $m(x, y, z)$ ея точки приложенія и сообщивъ точкѣ m безконечно малое перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$, по предыдущей теоремѣ мы знаемъ, что

$$T_{m}^{m_1}(\overline{F}) = \Delta U$$

причемъ $T_{m}^{m_1}(\overline{F})$ эквивалентно элементарной работѣ

$$\overline{F}\,\overline{\Delta s} = F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s)$$

силы $\overline{F}$, т. е.

$$T_{m}^{m_1}(\overline{F}) = F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s,$$

гдѣ ε есть нѣкоторая безконечно малая величина, слѣдовательно

$$F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s = \Delta U$$

1). Положимъ теперь, что элементарное перемѣщеніе $\overline{\Delta s}$ точки m совершается на поверхности уровня

$$U(x, y, z) = c$$

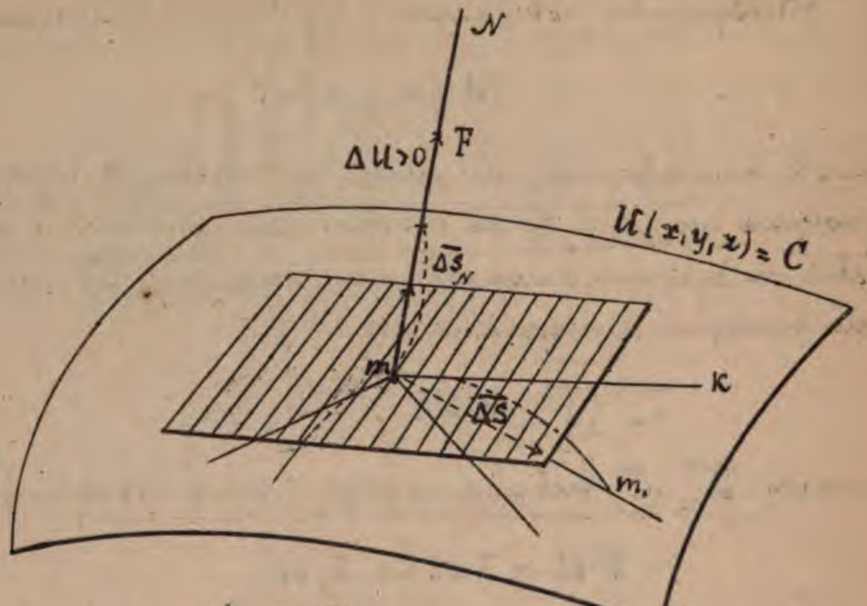
потенціала данной консервативной силы въ точкѣ $m(x, y, z)$; въ такомъ случаѣ

$$\Delta U = 0$$

и потому

$$F \Delta s \operatorname{Cos}(F, \Delta s) + \varepsilon \Delta s = 0;$$

раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на Δs и переходя къ предѣлу при $\Delta s = 0$, мы знаемъ, что направленіе сѣкущей $\overline{\Delta s}$ въ предѣлѣ совпадетъ съ направленіемъ касательной mk (черт. 12) къ поверхности уровня въ точкѣ m и потому



Черт. 12.

$$\cos(F, mk) = 0,$$

т. е. направленіе консервативной силы $\overline{F}$ перпендикулярно къ всевозможнымъ касательнымъ, проведеннымъ въ точкѣ m къ поверхности уровня, другими словами, перпендикулярно къ плоскости Q, касательной къ поверхности уровня въ разсматриваемой точкѣ, т. е. совпадаетъ съ направленіемъ нормали N къ этой поверхности въ разсматриваемой точкѣ, причемъ изъ равенствъ

$$\Delta U = \Delta S\left[F\cos(F, \Delta S) + \varepsilon\right]$$

видно, что при $\cos(F, \overline{\Delta S}) > 0$ приращеніе потенціала $\Delta U > 0$, т. е. $\overline{F}$ направлена по нормали N къ поверхности уровня потенціала къ точкѣ m, въ сторону возрастанія потенціала. Положимъ наконецъ, что точка m перемѣщается по нормали къ поверхности уровня потенціала въ данной точкѣ на векторъ $\overline{\Delta S_N}$ въ сторону возрастанія потенціала, тогда

$$\cos(F, \Delta S_N) = 1$$

и потому

$$F = \text{Пред.}\ \frac{\Delta U}{\Delta S_N}$$

Такимъ образомъ въ каждой точкѣ пространства консервативная сила направлена по нормали къ поверхности уровня ея потенціала въ этой точкѣ, притомъ въ сторону возрастанія потенціала и по величинѣ равна

$$\text{пред.}\ \frac{\Delta U}{\Delta S_N},$$

т. е. предѣлу отношенія безконечно малаго приращенія потенціала консервативной силы при перемѣщеніи ея точки приложенія по нормали къ поверхности уровня, въ сторону возрастанія потенціала, къ самому этому перемѣщенію. Другими словами, консервативная сила въ каждой точкѣ пространства совпадаетъ по величинѣ и направленію съ дифференціальнымъ параметромъ *) (см. Статика Гл. II, отд. I, § 4) поверхности уровня ея потенціала въ этой т. и потому проекціи консервативной силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O, x, y, z) должны выразиться равенствами

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

въ чемъ и непосредственно не трудно убѣдиться.

Дѣйствительно, мы доказали, что

$$\Delta U = \overline{F}\,\overline{\Delta S} + \varepsilon\,\Delta S$$

причемъ

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\Delta z + \varepsilon_1\,\Delta S$$

и

$$\overline{F}\,\overline{\Delta S} = X\cdot\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z$$

гдѣ ε и ε_1 суть нѣкоторыя безконечно малыя

*) $N = \pm\sqrt{(\partial f)^2 + (\partial f)^2 + (\partial f)^2}$ называется дифференціальнымъ параметромъ

величины.

Слѣдовательно

$$\frac{\delta U}{\delta x}\Delta x+\frac{\delta U}{\delta y}\Delta y+\frac{\delta U}{\delta z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta s=\mathfrak{X}\Delta x+\mathfrak{Y}\Delta y+\mathfrak{Z}\Delta z+\varepsilon\Delta s$$

это равенство остается справедливымъ при всевозможныхъ значеніяхъ безконечно малыхъ величинъ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$; положивъ въ немъ $\Delta y=\Delta z=0$, раздѣлимъ его на Δx и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta x=0$, тогда мы придемъ къ равенствамъ:

$$\frac{\delta U}{\delta x}=\mathfrak{X} \quad \text{или} \quad \mathfrak{X}=\frac{\delta U}{\delta x},$$

подобнымъ же образомъ удѣдимся въ справедливости равенствъ:

$$\mathfrak{Y}=\frac{\delta U}{\delta y} \quad \text{и} \quad \mathfrak{Z}=\frac{\delta U}{\delta z}$$

и потому величина и направленіе консервативной силы въ каждой точкѣ пространства совпадаетъ съ дифференціальнымъ параметромъ въ этой точкѣ поверхности уровня:

$$U(x,y,z)=c$$

потенціала данной консервативной силы.

Итакъ, мы доказали, что проекціи $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ консервативной силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O;\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$ выражаются соотвѣтственными частными производными отъ ея потенціала, а вся сила дифференціальнымъ параметромъ

$$U(x,y,z),$$

т. е.

$$\mathfrak{X}=\frac{\delta U}{\delta x}, \quad \mathfrak{Y}=\frac{\delta U}{\delta y}, \quad \mathfrak{Z}=\frac{\delta U}{\delta z},$$

слѣдовательно

$$\frac{\delta \mathfrak{X}}{\delta y}=\frac{\delta^2 U}{\delta x\,\delta y}=\frac{\delta^2 U}{\delta y\,\delta x}=\frac{\delta \mathfrak{Y}}{\delta x};$$

такимъ образомъ указанныя проекціи консервативной силы должны удовлетворять тремъ равенствамъ:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}.$$

Наоборотъ, если проекціи $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ силы $\overline{F}$, будучи функціями только координатъ м. т. (x, y, z), удовлетворяютъ написаннымъ равенствамъ, то, какъ доказывается въ интегральномъ исчисленіи, существуетъ такая функція $\mathfrak{U}(x, y, z)$, что

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} = \mathfrak{X}\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} = \mathfrak{Y}\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = \mathfrak{Z}$$

и сила $\overline{F}$ будетъ консервативна, ибо

$$T_A^M(\overline{F}) = \text{Пред.}\ \mathfrak{S}_A^M \overline{F}\,\overline{\Delta s} = \text{Пред.}\ \mathfrak{S}_A^M(\mathfrak{X}\Delta x + \mathfrak{Y}\Delta y + \mathfrak{Z}\Delta z) =$$

$$= \text{Пред.}\ \mathfrak{S}_A^M\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\Delta z\right) =$$

$$= \text{Пред.}\ \mathfrak{S}_A^M \Delta \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(x, y, z) - \mathfrak{U}(a, b, c)$$

т. е. полная работа такой силы при переходѣ ея точки приложенія изъ произвольнаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ любой пунктъ $M(x, y, z)$ не будетъ зависѣть отъ вида траекторіи и потому такая сила $\overline{F}$ будетъ консервативна, причемъ разность

$$\mathfrak{U}(x, y, z) - \mathfrak{U}(a, b, c)$$

очевидно будетъ потенціаломъ данной консервативной силы при исходномъ пунктѣ $A(a, b, c)$

Итакъ, равенства

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}$$

служатъ необходимымъ и достаточнымъ аналитическимъ условіемъ консервативной силы, заданной тремя ея проекціями $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

величины.

Слѣдовательно

$$\frac{\delta U}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta U}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta U}{\delta z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta s = \mathcal{X}\Delta x + \mathcal{Y}\Delta y + \mathcal{Z}\Delta z + \varepsilon \Delta s$$

это равенство остается справедливымъ при всевозможныхъ значеніяхъ безконечно малыхъ величинъ Δx, Δy, Δz; положивъ въ немъ $\Delta y = \Delta z = 0$, раздѣлимъ его на Δx и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$, тогда мы придемъ къ равенствамъ:

$$\frac{\delta U}{\delta x} = \mathcal{X} \quad \text{или} \quad \mathcal{X} = \frac{\delta U}{\delta x},$$

подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости равенствъ:

$$\mathcal{Y} = \frac{\delta U}{\delta y} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z} = \frac{\delta U}{\delta z}$$

и потому величина и направленіе консервативной силы въ каждой точкѣ пространства совпадаетъ съ диффоренціальнымъ параметромъ въ этой точкѣ поверхности уровня:

$$U(x, y, z) = c$$

потенціала данной консервативной силы.

Итакъ, мы доказали, что проекціи $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ консервативной силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ выражаются соотвѣтственными частными производными отъ ея потенціала, а все же дифференціальным параметром

$$U(x, y, z),$$

т.е.

$$\mathcal{X} = \frac{\delta U}{\delta x}, \quad \mathcal{Y} = \frac{\delta U}{\delta y}, \quad \mathcal{Z} = \frac{\delta U}{\delta z},$$

слѣдовательно

$$\frac{\delta \mathcal{X}}{\delta y} = \frac{\delta^2 U}{\delta x \, \delta y} = \frac{\delta^2 U}{\delta y \, \delta x} = \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta x};$$

такимъ образомъ указанныя проекціи консервативной силы должны удовлетворять тремъ равенствамъ:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}.$$

Наоборотъ, если проекціи $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ силы $\overline{F}$, будучи функціями только координатъ м. т. (x, y, z), удовлетворяютъ написаннымъ равенствамъ, то, какъ доказывается въ интегральномъ исчисленіи, существуетъ такая функція $\mathfrak{U}(x, y, z)$, что

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} = \mathfrak{X}, \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = \mathfrak{Z}$$

и сила $\overline{F}$ будетъ консервативна, ибо

$$T_A^M(\overline{F}) = \text{Пред.}\ S_A^M\, \overline{F}\, \overline{\Delta S} = \text{Пред.}\ S_A^M (\mathfrak{X}\Delta x + \mathfrak{Y}\Delta y + \mathfrak{Z}\Delta z) =$$

$$= \text{Пред.}\ S_A^M \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\Delta z \right) =$$

$$= \text{Пред.}\ S_A^M\, \Delta \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(x, y, z) - \mathfrak{U}(a, b, c)$$

т. е. полная работа такой силы при переходѣ ея точки приложенія изъ произвольнаго исходнаго пункта $A(a, b, c)$ въ любой пунктъ $M(x, y, z)$ не будетъ зависѣть отъ вида траекторіи и потому такая сила $\overline{F}$ будетъ консервативна, причемъ разность

$$\mathfrak{U}(x, y, z) - \mathfrak{U}(a, b, c)$$

очевидно будетъ потенціаломъ данной консервативной силы при исходномъ пунктѣ $A(a, b, c)$

Итакъ, равенства

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}$$

служатъ необходимымъ и достаточнымъ аналитическимъ условіемъ консервативной силы, заданной тремя ея проекціями $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

Напр. Постоянная по величинѣ и направленію сила

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}\ , \mathfrak{Y} = \mathfrak{B}\ , \mathfrak{Z} = \mathfrak{C}$$

есть консервативная сила, ибо

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} = 0\ , \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} = 0\ , \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} = 0$$

причемъ потенціалъ ея, если исходный пунктъ принять начало координатъ, будетъ:

$$\mathfrak{U}(x, y, z) = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z$$

Если матеріальная точка подвержена дѣйствію консервативной силы, то потенціалъ консервативной силы, взятый съ обратнымъ знакомъ, т. е.

$$\text{функція } \Pi(x, y, z) = -\mathfrak{U}(x, y, z)$$

называется <u>потенціальною энергіею</u> м. т.; изъ этого опредѣленія ясно, что потенціальная энергія м. т. выражается полною работою данной консервативной силы при переходѣ точки m изъ даннаго положенія въ исходный пунктъ $\mathfrak{A}$, выбранный для вычисленія потенціала данной консервативной силы или вообще — полною работою данной консервативной силы при переходѣ точки m съ поверхности уровня ея потенціала, соотвѣтствующей данному положенію м. т., на поверхность уровня нулевого значенія потенціала данной консервативной силы.

Примѣры.

1). Потенціальная энергія тяжелой м. т. выражается произведеніемъ pz, ибо потенціалъ силы тяжести, какъ мы доказали, равенъ $-pz$, причемъ pz есть полная работа силы тяжести, приложенной къ тяжелой м. т. при переходѣ м. т. изъ даннаго ея положенія на поверхность уровня океана, т. е. на поверхность нулевого значенія

потенціала силы тяжести.

2) Потенціальная энергія м. т., подверженной дѣйствію притяженія или отталкиванія нѣкотораго центра O по закону Ньютона, будетъ:

$$\mp k\frac{m}{r},$$

ибо потенціалъ такой силы, какъ мы доказали, есть

$$\pm k\frac{m}{r},$$

причемъ потенціальная энергія такой силы выражаетъ полную работу этой силы при переходѣ м. т. изъ даннаго положенія въ безконечность.

II. Динамика свободной матеріальной точки.

§1. Общіе законы движенія свободной матеріальной точки.

Свободною мат. точкою называется такая м. т., перемѣщенія которой не ограничены никаки условіями.

Общими законами движенія свободной м. т. называются такія зависимости между свойствами движенія свободной м. т. и приложенными къ ней силами, которыя остаются справедливыми при всевозможныхъ силахъ и при всевозможныхъ начальныхъ обстоятельствахъ движенія, т. е. при произвольномъ начальномъ положеніи м. т. и при произвольной ея начальной скорости $\overline{v}_0$.

Пяти кинетическимъ элементамъ м. т. соотвѣтствуютъ пять общихъ законовъ движенія свободной м. т., а именно:

I. Законъ количества ускоренія свободной мат. точки.

II Законъ моментовъ количества ускоренія св. м. точки.

III Законъ измѣненія количества движенія св. м. точки.

IV Законъ измѣненія моментовъ количества движенія св. м. т.

V Законъ измѣненія кинетической энергіи или живой силы св. м. т.

Формулируемъ и докажемъ каждый изъ этихъ законовъ въ отдѣльности.

I. Законъ количества ускоренія св. м. т.

Количество ускоренія $m\bar{u}$ св. м. т. геометрически равно равнодѣйствующей $\bar{F}$ или геометрической суммѣ $\Sigma \bar{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной м. т., т. е.

$$m\bar{u} = \bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

Этотъ законъ есть слѣдствіе понятія о равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ м. т., установленнаго нами въ основныхъ началахъ кинетики (см. Статика Гл. I, Отд. I, §1), а именно, что равнодѣйствующею силъ, приложенныхъ къ св. м. т., называется такая сила $\bar{F}$, которая, дѣйствуя одна, сообщаетъ м. т. тоже ускореніе $\bar{u}$, какое пріобрѣтаетъ эта послѣдняя отъ совмѣстнаго дѣйствія всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, причемъ тамъ же мы доказали, что равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ м. т., совпадаетъ съ ихъ геометрической суммою, и потому

$$m\bar{u} = \bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

II. Законъ моментовъ количества ускоренія свобод. матеріальной точки.

а) Линейный моментъ $\bar{l}_o = \bar{M}_o(m\bar{u})$ количества ускоренія св. м. т. относительно любого центра O геоме-

трически равенъ линейному моменту $\overline{L}_o = \overline{M}_o(\overline{F}) = \Sigma \overline{M}_o(\overline{F}_i)$ относительно того же центра O равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной м. т., или геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ относительно того же центра всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$\overline{l}_o = \overline{M}_o(m\overline{w}) = \overline{M}_o(\overline{F}) = \Sigma \overline{M}_o(\overline{F}_i) = \overline{L}_o \ ;$$

b) и моментъ $l_{ox} = M_{ox}(m\overline{w})$ количества ускоренія св. м. т. относительно любой оси OX равенъ моменту $L_{ox} = M_{ox}(\overline{F}) = \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i)$ относительно той же оси OX равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. или алгебраической суммѣ моментовъ относительно той же оси всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$l_{ox} = M_{ox}(\overline{F}) = \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i) = L_{ox} \ ,$$

короче

$$\overline{l}_o = \overline{L}_o \quad и \quad l_{ox} = L_{ox}$$

Справедливость этихъ равенствъ очевидна, ибо по закону количества ускоренія св. м. т.

$$m\overline{w} = \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

и всѣ эти векторы отложены отъ одной и той же точки.

III. Законъ измѣненія количества движенія св. мат. точки.

Геометрическое приращеніе $m\overline{v} - m\overline{v}_o$ количества движенія свободной м. т. за данный промежутокъ времени $(t - t_o)$ геометрически равно полному импульсу за тотъ же промежутокъ времени $\overline{J}_{t_o}^{t}(\overline{F}) = \Sigma \overline{J}_{t_o}^{t}(\overline{F}_i)$ равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. или геометрической суммѣ полныхъ импульсовъ за тотъ же промежутокъ времени всѣхъ этихъ силъ

II Законъ моментовъ количества ускоренія св. м. точки.

III Законъ измѣненія количества движенія св. м. точки.

IV Законъ измѣненія моментовъ количества движенія св. м. т.

V Законъ измѣненія кинетической энергіи или живой силы св. м. т.

Формулируемъ и докажемъ каждый изъ этихъ законовъ въ отдѣльности.

I. Законъ количества ускоренія св. м. т.

Количество ускоренія $m\overline{u}$ св. м. т. геометрически равно равнодѣйствующей $\overline{F}$ или геометрической суммѣ $\Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной м. т., т. е.

$$m\overline{u} = \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

Этотъ законъ есть слѣдствіе понятія о равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ м. т., установленнаго нами въ основныхъ началахъ кинетики (см. Статика Гл. I, Отд. I, §1), а именно, что равнодѣйствующею силъ, приложенныхъ къ св. м. т., называется такая сила $\overline{F}$, которая, дѣйствуя одна, сообщаетъ м. т. тоже ускореніе $\overline{u}$, какое пріобрѣтаетъ эта послѣдняя отъ совмѣстнаго дѣйствія всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, причемъ тамъ же мы доказали, что равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ м. т., совпадаетъ съ ихъ геометрическою суммою, и потому

$$m\overline{u} = \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

II. Законъ моментовъ количества ускоренія свбд. матеріальной точки.

а) Линейный моментъ $\overline{l}_o = \overline{M}_o(m\overline{u})$ количества ускоренія св. м. т. относительно любого центра О геоме-

трически равенъ линейному моменту $\overline{L}_o = \overline{M}_o(\overline{F}) = \Sigma \overline{M}_o(\overline{F}_i)$ относительно того же центра O равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной м. т., или геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ относительно того же центра всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$\overline{l}_o = \overline{M}_o(m\overline{u}) = \overline{M}_o(\overline{F}) = \Sigma \overline{M}_o(\overline{F}_i) = \overline{L}_o\ ;$$

b) и моментъ $l_{ox} = M_{ox}(m\overline{u})$ количества ускоренія св. м. т. относительно любой оси OX равенъ моменту $L_{ox} = M_{ox}(\overline{F}) = \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i)$ относительно той же оси OX равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. или алгебраической суммѣ моментовъ относительно той же оси всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$l_{ox} = M_{ox}(\overline{F}) = \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i) = L_{ox}\ ,$$

короче

$$\overline{l}_o = \overline{L}_o \quad \text{и} \quad l_{ox} = L_{ox}$$

Справедливость этихъ равенствъ очевидна, ибо по закону количества ускоренія св. м. т.

$$m\overline{u} = \overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

и всѣ эти векторы отложены отъ одной и той же точки.

III. Законъ измѣненія количества движенія св. мат. точки.

Геометрическое приращеніе $m\overline{v} - m\overline{v}_o$ количества движенія свободной м. т. за данный промежутокъ времени $(t - t_o)$ геометрически равно полному импульсу за тотъ же промежутокъ времени $\overline{J}_{t_o}^{t}(\overline{F}) = \Sigma \overline{J}_{t_o}^{t}(\overline{F}_i)$ равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. или геометрической суммѣ полныхъ импульсовъ за тотъ же промежутокъ времени всѣхъ этихъ силъ

св. м. точки, т. е.

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{F}) = \Sigma \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{F}_i)$$

Дѣйствительно,

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = m(\bar{v} - \bar{v}_0) = m\,\text{Пред.}\, S_{t_0}^{t}\,\Delta\bar{v} =$$

$$= m\,\text{Пр.}\, S_{t_0}^{t}\,\bar{u}\,\Delta t = \text{Пред.}\, S_{t_0}^{t}\, m\bar{u}\,\Delta t =$$

$$= \text{Пр.}\, S_{t_0}^{t}\,\bar{F}\,\Delta t = \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{F}) = \Sigma \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{F}_i),$$

что и требовалось доказать.

IV Законъ измѣненія моментовъ количества скорости или количества движенія св. мат. т.

а) Скорость $\bar{v}_k$ точки k., чертящей годографъ момента количества скорости или количества движенія $\bar{K} = \bar{M}_o(m\bar{v})$ св. м. т. относительно любого центра о геометрически равна линейному моменту $\bar{L} = \bar{M}_o(\bar{F}) = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i)$ равнодѣйствующей $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., или геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ относительно того же центра всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$\bar{v}_k = \bar{L}_o = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i)$$

Дѣйствительно, изъ свойствъ кинетическихъ элементовъ м. т. мы знаемъ, что

$$\bar{v}_k = \bar{l}_o\,;$$

кромѣ того, по второму общему закону движенія св. м. точки

$$\bar{l}_o = \bar{L}_o$$

слѣдовательно

$$\bar{v}_k = \bar{L}_o = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i)$$

в). Производная отъ момента количества скорости

или количества движенія

$$k_{ox} = \mathcal{M}_{ox}(m\bar{v})$$

свободной м. т. относительно любой неподвижной оси OX равна моменту относительно той же оси

$$L_{ox} = \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}) = \Sigma \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}_i)$$

равнодѣйствующей $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. или алгебраической суммѣ моментовъ относительно той же оси всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$k'_{ox} = l_{ox} = \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}) = \Sigma \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}_i)$$

Дѣйствительно, согласно принятымъ нами обозначеніямъ

$$k'_{ox} = k'_{o,x} = v_{k,x} = L_{o,x} = L_{ox}$$

V. Законъ измѣненія кинетической энергіи или живой силы св. м. т.

Приращеніе

$$\mathcal{K} - \mathcal{K}_o = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}.$$

кинетической энергіи или живой силы св. м. т. за данный промежутокъ времени $(t - t_o)$ равно полной работѣ за тотъ же промежутокъ времени

$$T_{t_o}^t(\bar{F}) = \Sigma T_{t_o}^t(\bar{F}_i)$$

равнодѣйствующей $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на свободную м. т. или алгебраической суммѣ полныхъ работъ за этотъ промежутокъ времени всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, т. е.

$$\mathcal{K} - \mathcal{K}_o = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} =$$

$$= T_{t_0}^{t}(\overline{F}) = \Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i).$$

Действительно,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2}\,\text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,\Delta(v^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\,\text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,[(v+\Delta v)^2 - v^2] = \frac{m}{2}\,\text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,2v\Delta v = \qquad v\Delta t = \Delta s$$

$$= \frac{m}{2}\,\text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,2vv'\Delta t = \text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,mw_\tau\Delta s =$$

$$= \text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,mw\,\mathrm{Cos}(w, v)\,\Delta s = \text{Пр}\; S_{t_0}^{t}\,F\Delta s\,\mathrm{Cos}(F, \Delta s) =$$

$$= T_{t_0}^{t}(\overline{F}) = \Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i), \text{ ч. т. д.}$$

(на полях: $\frac{\Delta v}{\Delta t}$; $mw = F$)

§2. Частные случаи общихъ законовъ движенія свободной материальной точки

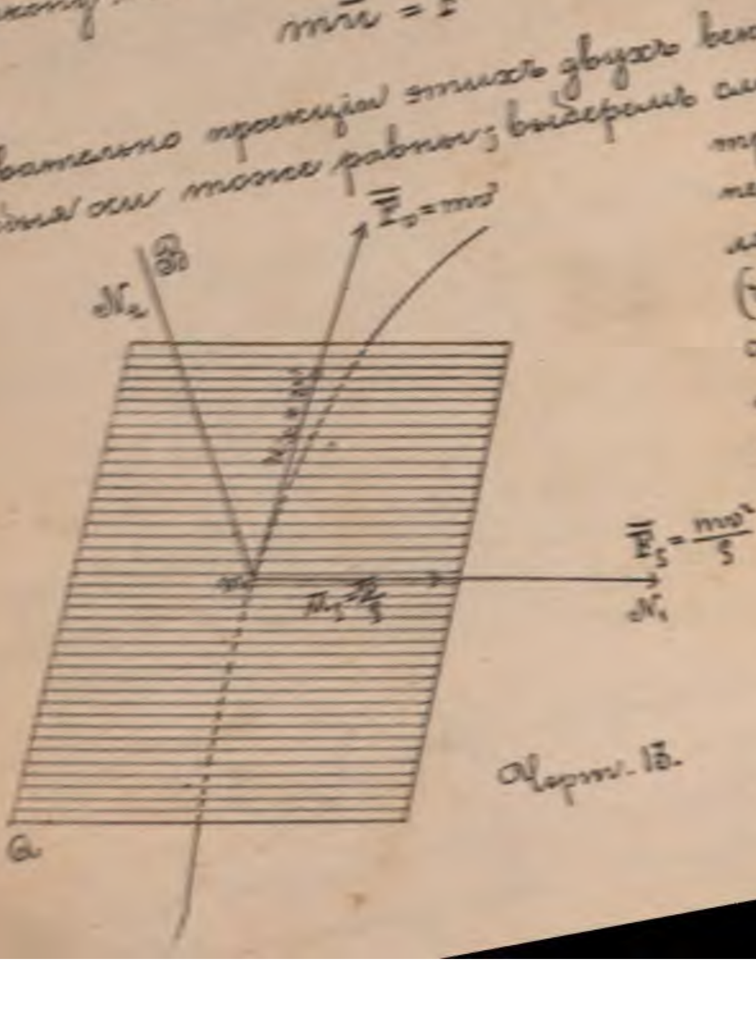
I. Законы прямолинейнаго и равномѣрнаго движенія св. м. т.

По закону количества ускоренія св. м. т.

$$m\overline{w} = \overline{F}$$

следовательно проекціи этихъ двухъ векторовъ на любыя оси тоже равны; выберемъ следующія

три взаимн-
перпендику-
лярныя оси
(черт. 13): 1) с-
овпадающу-
съ направл-
емъ скоро-
$\overline{v}$ м. т.,
касатель-
ную къ тра-
рію; 2) со-
дающую
правлен-



Черт. 13.

радіуса кривизны траекторіи въ разсматриваемой точкѣ и 3) ось, перпендикулярную къ первымъ двумъ осямъ, т.е. перпендикулярную къ плоскости кривизны Q траекторіи въ разсматриваемой точкѣ, или совпадающую со второй нормалью N_2 (бинормалью) къ траекторіи въ той же точкѣ; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ

$$F_v = mu_v = mv' \ , \ F_\rho = mu_\rho = m\frac{v^2}{\rho} \ , \ F_b = 0 \ ,$$

такъ какъ проекціи ускоренія на указанныя оси, какъ мы знаемъ изъ кинематики, соотвѣтственно равны: v', $\frac{v^2}{\rho}$ и нулю.

Изъ написанныхъ равенствъ мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) если движеніе св. м. т. совершается равномѣрно по нѣкоторой кривой, т.е. $v' = 0$, то

$$F_v = mv' = 0$$

и

$$\overline{F} = \overline{F}_v + \overline{F}_\rho = \overline{F}_\rho = \frac{\overline{mv^2}}{\rho} \ ,$$

т.е. приложенная къ матеріальной точкѣ сила должна во все время движенія быть перпендикулярна къ скорости $\overline{v}$ св. м. т., и потому радіусъ кривизны траекторіи будетъ совпадать съ направленіемъ приложенной къ мат. точкѣ силы и по величинѣ

$$\rho = \frac{mv^2}{F}$$

будетъ обратно пропорціоналенъ этой силѣ.

2. Если движеніе св. м. т. совершается по прямой линіи, то сила и начальная скорость должны быть направлены по той же прямой, ибо для прямой линіи $\rho = \infty$ и потому $F_\rho = 0$, слѣдовательно

$= T_{t_0}^{t}(\bar F) = \Sigma T_{t_0}^{t}(\bar F_i)$.

Дѣйствительно,

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2}$ Пр. $S_{t_0}^{t}\Delta(v^2) =$

$= \frac{m}{2}$ Пр. $S_{t_0}^{t}[(v+\Delta v)^2 - v^2] = \frac{m}{2}$ Пр. $S_{t_0}^{t} 2v\Delta v =$

$= \frac{m}{2}$ Пр. $S_{t_0}^{t} 2vv'\Delta t =$ Пр. $S_{t_0}^{t} m u_k \Delta S =$ $v.\Delta t = \Delta S$

пред. $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = Пр. $S_{t_0}^{t} mu \cos(u, v)\Delta S =$ Пр. $S_{t_0}^{t} F \Delta S \cos(F, \Delta S) =$

$u = F$ $= T_{t_0}^{t}(\bar F) = \Sigma T_{t_0}^{t}(\bar F_i)$, ч. т. д.

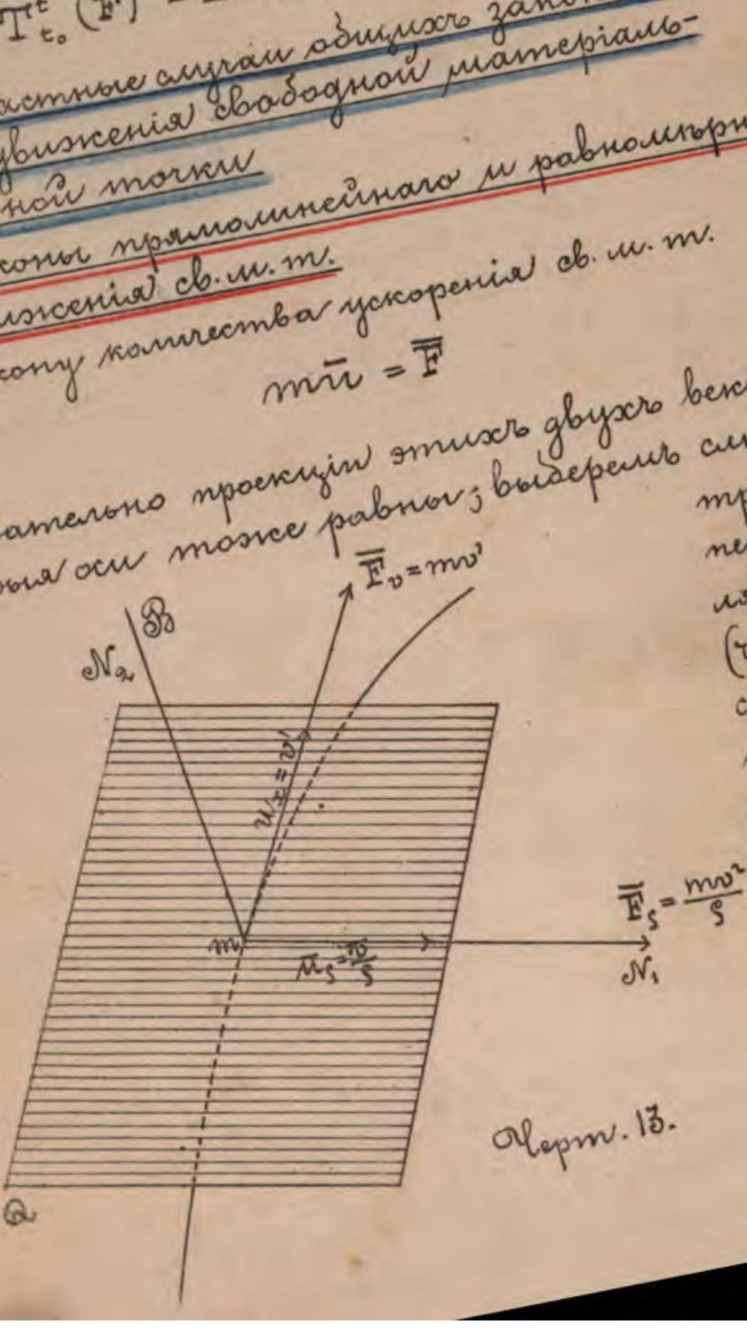
§2. Частные случаи общихъ законовъ движенія свободной матеріальной точки

I. Законы прямолинейнаго и равномѣрнаго движенія св. м. т.

По закону количества ускоренія св. м. т.

$$m\bar u = \bar F$$

слѣдовательно проекціи этихъ двухъ векторовъ на любыя оси тоже равны; выберемъ слѣдующія три взаимно перпендикулярныя оси (черт. 13): 1) ос[ь] совпадающ[ую] съ направл[ені]емъ скорос[ти] $\bar v$ м. т., [т. е.] касател[ьную] къ ея тра[екто]ріи; 2) ос[ь] ... дающу[ю] ... правлен[іемъ] ...



Черт. 13.

радіуса кривизны траекторіи въ разсматриваемой точкѣ и 3) ось, перпендикулярную къ первымъ двумъ осямъ, т. е. перпендикулярную къ плоскости кривизны Q траекторіи въ разсматриваемой точкѣ, или совпадающую со второй нормалью N_2 (бинормалью) къ траекторіи въ той же точкѣ; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ

$$F_v = mu_v = mv' \; , \; F_\rho = mu_\rho =$$

$$= m\frac{v^2}{\rho} \; , \; F_b = 0 \; ,$$

такъ какъ проекціи ускоренія на указанныя оси, какъ мы знаемъ изъ кинематики, соотвѣтственно равны: v', $\frac{v^2}{\rho}$ и нулю.

Изъ написанныхъ равенствъ мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) если движеніе св. м. т. совершается равномѣрно по нѣкоторой кривой, т. е. $v'=0$, то

$$F_v = mv' = 0$$

и

$$\overline{F} = \overline{F}_v + \overline{F}_\rho = \overline{F}_\rho = \frac{\overline{mv^2}}{\rho} \; ,$$

т. е. приложенная къ матеріальной точкѣ сила должна во все время движенія быть перпендикулярна къ скорости $\overline{v}$ св. м. т., и потому радіусъ кривизны траекторіи будетъ совпадать съ направленіемъ приложенной къ мат. точкѣ силы и по величинѣ

$$\rho = \frac{mv^2}{F}$$

будетъ обратно пропорціоналенъ этой силѣ.

2. Если движеніе св. м. т. совершается по прямой линіи, то сила и начальная скорость должны быть направлены по той же прямой, ибо для прямой линіи $\rho = \infty$ и потому $F_\rho = 0$, слѣдовательно

$$= T^{t}_{t_0}(\overline{F}) = \Sigma T^{t}_{t_0}(\overline{F}_i).$$

Дѣйствительно,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2}\,\text{Пр.}\, S^{t}_{t_0}\Delta(v^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\,\text{Пр.}\, S^{t}_{t_0}[(v+\Delta v)^2 - v^2] = \frac{m}{2}\,\text{Пр.}\, S^{t}_{t_0} 2v\Delta v =$$

$$= \frac{m}{2}\,\text{Пр.}\, S^{t}_{t_0} 2vv'\Delta t = \text{Пр.}\, S^{t}_{t_0} mu_{\kappa}\Delta S = \qquad v.\Delta t = \Delta s$$

пред. $\frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$= \text{Пр.}\, S^{t}_{t_0} mu \cos(u, v)\Delta S = \text{Пр.}\, S^{t}_{t_0} F\Delta S \cos(F, \Delta S) =$$

$u = F$

$$= T^{t}_{t_0}(\overline{F}) = \Sigma T^{t}_{t_0}(\overline{F}_i),$$ ч. т. д.

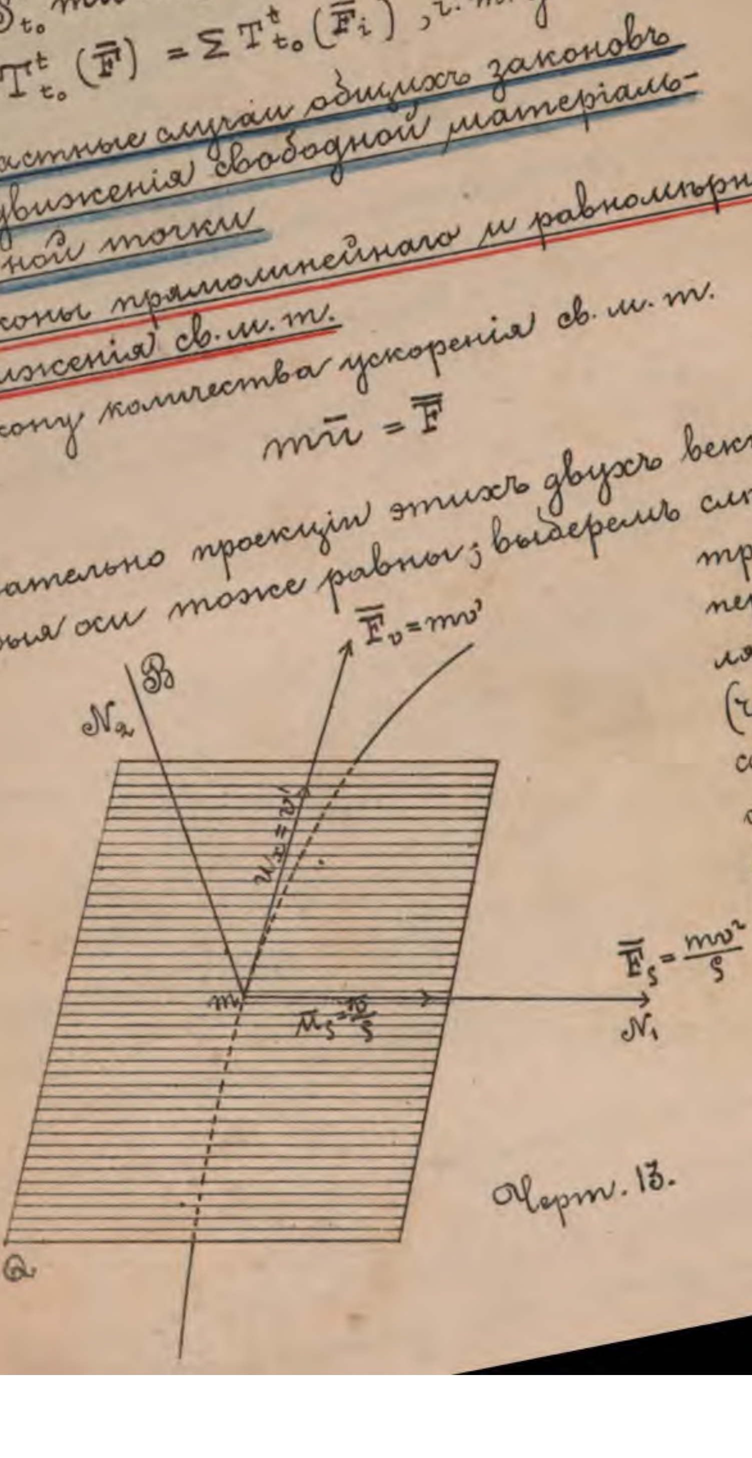
§2. Частные случаи общихъ законовъ движенія свободной матеріальной точки

I. Законы прямолинейнаго и равномѣрнаго движенія св. м. т.

По закону количества ускоренія св. м. т.

$$m\overline{u} = \overline{F}$$

слѣдовательно проекціи этихъ двухъ векторовъ на любыя оси тоже равны; выберемъ слѣдующія три взаимно перпендику- лярныя оси (черт. 13): 1) ос... совпадающ... съ направл... емъ скорос... $\overline{v}$ м. т., ... касател... къ ея тра... ріи; 2) ос... дающу... правлен...



Черт. 13.

радіуса кривизны траекторіи въ разсматриваемой точкѣ и 3) ось, перпендикулярную къ первымъ двумъ осямъ, т. е. перпендикулярную къ плоскости кривизны Q траекторіи въ разсматриваемой точкѣ, или совпадающую со второй нормалью N_2 (бинормалью) къ траекторіи въ той же точкѣ; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ

$$F_v = mu_v = mv', \quad F_\rho = mu_\rho = \\ = m\frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0,$$

такъ какъ проекціи ускоренія на указанныя оси, какъ мы знаемъ изъ кинематики, соотвѣтственно равны: v', $\frac{v^2}{\rho}$ и нулю.

Изъ написанныхъ равенствъ мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) Если движеніе св. м. т. совершается равномѣрно по нѣкоторой кривой, т. е. $v'=0$, то

$$F_v = mv' = 0$$

и

$$\overline{F} = \overline{F}_v + \overline{F}_\rho = \overline{F}_\rho = \frac{\overline{mv^2}}{\rho},$$

т. е. приложенная къ матеріальной точкѣ сила должна во все время движенія быть перпендикулярна къ скорости $\bar{v}$ св. м. т., и потому радіусъ кривизны траекторіи будетъ совпадать съ направленіемъ приложенной къ мат. точкѣ силы и по величинѣ

$$\rho = \frac{mv^2}{F}$$

будетъ обратно пропорціоналенъ этой силѣ.

2. Если движеніе св. м. т. совершается по прямой линіи, то сила и начальная скорость должны быть направлены по той же прямой, ибо для прямой линіи $\rho = \infty$ и потому $F_\rho = 0$, слѣдовательно

$$\overline{F} = \overline{F}_v + \overline{F}_\rho = \overline{F}_v .$$

3). Если движеніе св. м. т. совершается равномѣрно и прямолинейно, т. е. $v' = 0$ и $\rho = \infty$, то равнодѣйствующая

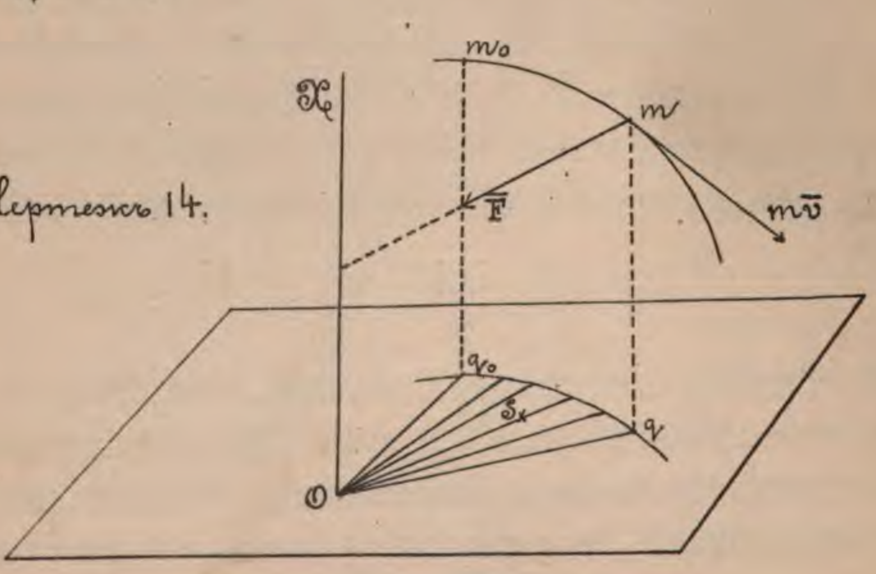
$$\overline{F} = \overline{F}_v + \overline{F}_\rho = 0$$

всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ должна быть равна нулю и наоборотъ.

II. Законы площадей для свободной мат. точки.

1.) Если направленіе равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной м. т. во все время движенія этой послѣдней лежитъ въ одной плоскости съ нѣкоторою неподвижною осью OX, т. е. пересѣкаетъ эту ось или остается ей параллельною, то секторіальная скорость S'_x м. т. въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси сохраняетъ постоянную величину, т. е. площадь сектора S_x, описываемая проекціей этой точки на указанной плоскости, возрастаетъ пропорціонально времени (черт. 14).

Чертежъ 14.



Дѣйствительно, по второму закону измѣненія моментовъ количества движенія св. м. т. мы имѣемъ

$$k'_{ox} = L_{ox} = \mathcal{M}_{ox}(\overline{F}) = 0,$$

ибо равнодѣйствующая $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной м. т., и ось OX по условію лежатъ въ одной плоскости; слѣдовательно

$$k_{ox} = Const = C, \text{ но } k_{ox} = 2m\mathcal{S}'_x,$$

откуда

$$\mathcal{S}'_x = \frac{C}{2m} \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_x = \frac{C}{2m}(t - t_0), \text{ ч. т. д.}$$

<u>2. Если направленіе равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., во все время движенія этой послѣдней постоянно проходитъ черезъ нѣкоторый неподвижный центръ O, то законъ площадей имѣетъ мѣсто въ любой плоскости, проходящей черезъ эту точку O, причемъ линейный моментъ</u>

$$\overline{k}_o = \overline{\mathcal{M}}_o(m\overline{v})$$

<u>количества движенія св. м. т. относительно того же центра O остается неподвижнымъ и неизмѣняемымъ во все время ея движенія; вслѣдствіе чего траекторія м. т. будетъ плоская кривая, плоскость которой проходитъ черезъ этотъ центръ O и перпендикулярна къ указанному неизмѣняемому линейному моменту $\overline{k}_o$, причемъ секторіальная скорость $\mathcal{S}'$ матеріальной точки въ этой плоскости, т. е. въ плоскости движенія м. т. имѣетъ наибольшую величину.</u>

Дѣйствительно, если направленіе силы постоянно проходитъ черезъ нѣкоторый неподвижный центръ O, то линейный моментъ $\overline{\mathcal{M}}_o(\overline{F})$ такой силы относительно этого центра постоянно будетъ равенъ нулю, а слѣдовательно и моментъ этой силы $M_{ox}(\overline{F})$ относительно любой оси, проходящей черезъ этотъ центръ, тоже будетъ равенъ нулю, ибо

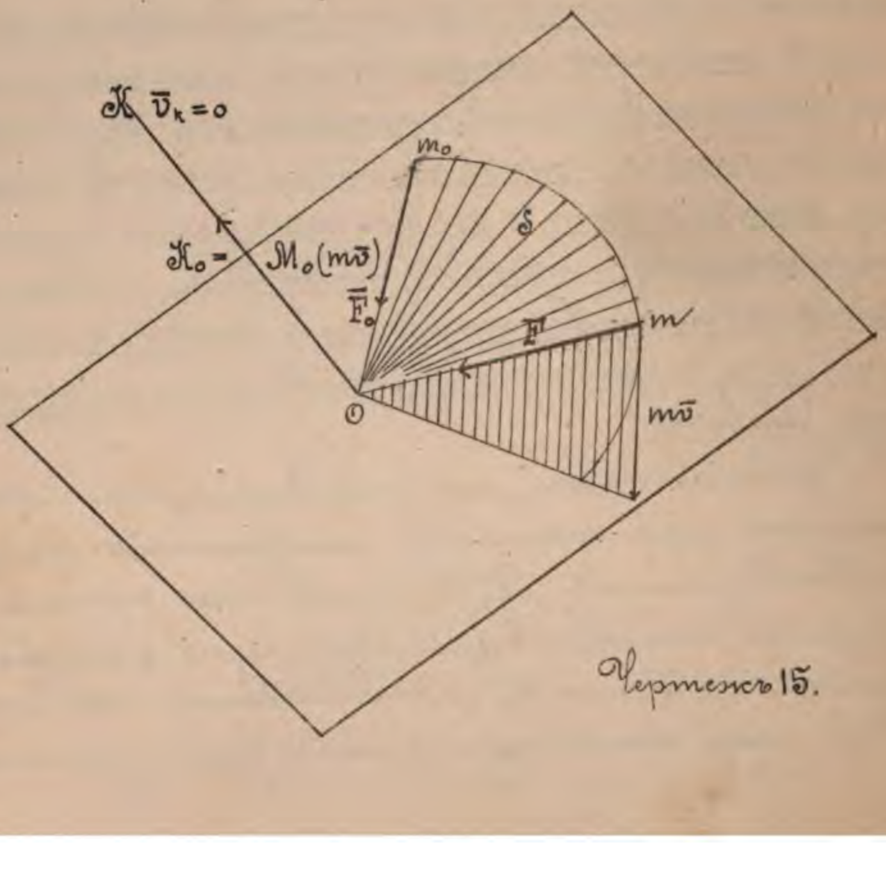
$$\mathcal{M}_{o\lambda}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,\lambda}(\overline{F})$$

и потому законъ площадей будетъ имѣть мѣсто въ любой плоскости, проходящей черезъ точку O.

Кромѣ того въ этомъ случаѣ

$$\overline{v}_k = \overline{L}_o = \overline{\mathcal{M}}_o(\overline{F}) = 0$$

слѣдовательно точка k, чертящая годографъ линейнаго момента количества движенія м. т. $\overline{k}_o = \overline{\mathcal{M}}_o(m\overline{v})$, остается неподвижной, т. е. этотъ линейной моментъ сохраняетъ постоянную величину и направленіе въ пространствѣ, причемъ количество движенія $m\overline{v}$ м. т., будучи перпендикулярно къ своему линейному моменту $\overline{k}_o = \overline{\mathcal{M}}_o(m\overline{v})$, очевидно будетъ во все время движенія лежать въ плоскости, проходящей черезъ O и перпендикулярной $\overline{k}_o$, слѣдовательно скорость $\overline{v}$ м. т. тоже будетъ постоянно находиться въ этой плоскости, а потому и траекторія точки будетъ лежать въ той же плоскости; принимая наконецъ во вниманіе, что величина $\overline{k}_o$ линейнаго момен-



Чертежъ 15.

та количества движенія $\overline{k}_0 = \overline{M}_0(m\overline{v})$ м. т. есть вмѣстѣ съ тѣмъ моментъ количества движенія м. т. относительно оси, совпадающей съ направленіемъ $\overline{k}_0$, мы можемъ написать, что

$$k = 2mS',$$

гдѣ черезъ S' мы обозначили секторіальную скорость м. т. въ плоскости, проходящей черезъ точку O и перпендикулярной къ $\overline{k}_0$, т. е. въ плоскости движенія м. т., и воспользовавшись очевидными равенствами

$$2mS'_x = k_{ox} = k_{o,x} = k_o \cos(k_o, x) = 2mS' \cos(k_o, x),$$

мы придемъ къ равенству

$$S'_x = S' \cos(k_o, x),$$

изъ котораго ясно, что секторіальная скорость S'_x м. т. въ плоскости, перпендикулярной къ любой оси Ox, т. е. въ любой плоскости, меньше секторіальной скорости м. т. S' въ плоскости ея траекторіи или ея движенія, что и треб. док.

III Законъ сохраненія полной энергіи свободной мат. точки.

Если равнодѣйствующая $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. есть консервативная сила, то полная энергія

$$E = K + \Pi$$

м. т. сохраняетъ во все время движенія постоянную величину, т. е.

$$E = Const = E_0 = h$$

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ $U(x, y, z)$ потенціалъ консервативной силы $\overline{F}$, а черезъ $\Pi(x, y, z)$ потенціальную энергію м. т., мы знаемъ, что

$$\Pi = - U;$$

кромѣ того, по закону измѣненія кинетической энергіи м. точки

$$k - k_0 = T_{t_0}^{t}(\bar{F}) = \mathcal{U}(x,y,z) - \mathcal{U}(x_0,y_0,z_0),$$

слѣдовательно

$$k - k_0 = \mathcal{T} - \mathcal{U}_0,$$

или

$$\mathcal{K} + \Pi = \mathcal{K}_0 + \Pi_0 = h,$$

т.е.

$$E = E_0 = h \text{, ч. т. д.}$$

§3. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на св. мат. точку.

Мгновенною силою, какъ мы уже опредѣлили, называется сила, дѣйствующая въ теченіе неизмѣримо малаго промежутка времени δt, при томъ столь большая, что за этотъ неизмѣримо малый промежутокъ времени она тѣмъ не менѣе даетъ конечный импульсъ:

$$\bar{J} = \int_t^{t+\delta t} \bar{F}\,dt,$$

называемый импульсомъ мгновенной силы или просто мгновеннымъ импульсомъ или наконецъ толчкомъ.

Если къ св. м. т. m, обладающей въ данный моментъ скоростью $\bar{v}$, приложить мгновенную силу, импульсъ которой есть $\bar{J}$, то скорость м. т. мгновенно измѣнится въ нѣкоторую новую скорость $\bar{v}_1$, причемъ по закону измѣненія количества движенія св. м. т. мы знаемъ, что

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v} = \bar{J},$$

т.е. при дѣйствіи мгновенной силы на св. м. т. мгновенное измѣненіе количества движенія м. т. геометрически равно импульсу $\bar{J}$ этой мгновенной силы и потому измѣненная скорость $\bar{v}_1$ м. т. опредѣлится изъ равенства

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}.$$

Найдемъ теперь, какъ измѣняется кинетическая энергія

$$k = \frac{mv^2}{2}$$

или живая сила св. м. т. при приложеніи къ ней мгновенной силы или мгновеннаго импульса $\overline{J}$.

$$K_1 - K = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v^2) =$$
$$= \frac{m}{2}(\overline{v}_1 - \overline{v})(\overline{v}_1 + \overline{v}) = \frac{1}{2}\overline{J}\left(\frac{\overline{J}}{m} + 2\overline{v}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{J^2}{m} + \overline{J}\overline{v} = \frac{1}{2}\frac{J^2}{m} + Jv\,Cos\,(J, v).$$

<u>Итакъ, мгновенное измѣненіе кинетической энергіи или живой силы св. м. т. при дѣйствіи на нее мгновеннаго импульса, равно половинѣ квадрата этого импульса, дѣленной на массу м. т., и сложенной съ геометрическимъ произведеніемъ изъ этого же импульса и первоначальной скорости м. т.</u>

Примѣры. Вычислить мгновенный импульсъ при ударѣ матеріальной точки о неупругую или упругую идеально гладкую поверхность.

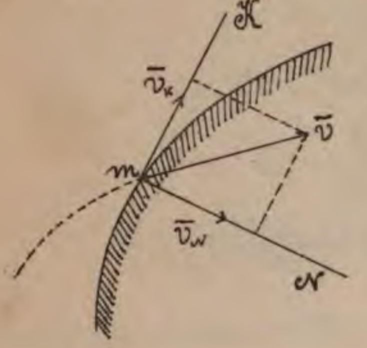
1) <u>Поверхность неподвижна и неупруга.</u>

Если св. м. т. при своемъ движеніи встрѣчаетъ неподвижную и неупругую поверхность, которую она не можетъ проникнуть, и въ моментъ соприкосновенія обладаетъ скоростью

$$\overline{v} = \overline{v}_k + \overline{v}_n,$$

гдѣ $\overline{v}_k$ и $\overline{v}_n$ суть соотвѣтственно составляющія этой скорости по касательной и нормали къ поверхности, то для того, чтобы мат. т. не проникла въ поверхность, нормальная скорость $\overline{v}_n$ м. т. должна мгновенно уничтожиться, т. е. со стороны поверхности должна развиться такая мгновенная сила реакціи, которая уничтожила бы нормальную составляющую $\overline{v}_n$ скорости

м. т., причемъ, такъ какъ идеально гладкая поверхность не можетъ оказывать касательныхъ реакцій, то касательная составляющая $\bar{v}_K$ скорости м. т. останется безъ перемѣны.



Итакъ до удара м. т. обладала скоростью

$$\bar{v} = \bar{v}_K + \bar{v}_N$$

а послѣ удара она обладаетъ скоростью

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_K ;$$

слѣдовательно, мгновенный импульсъ $\bar{J}$ реакціи поверхности опредѣлится изъ равенства

$$\bar{J} = m\bar{v}_1 - m\bar{v} = m\bar{v}_K - m(\bar{v}_K + \bar{v}_N) =$$
$$= -m\bar{v}_N ,$$

а измѣненіе кинетической энергіи м. т. – изъ равенства

$$K_1 - K = \frac{1}{2}\frac{J^2}{m} + \bar{J}\bar{v} = \frac{1}{2}mv_N^2 - m\bar{v}_N(\bar{v}_N + \bar{v}_K) =$$
$$= -\frac{1}{2}mv_N^2$$

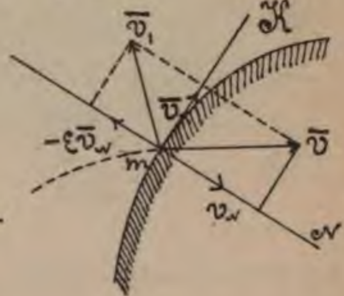
Такимъ образомъ при ударѣ м. т. о неподвижную и неупругую поверхность, мгновенный импульсъ выражается количествомъ движенія нормальной или потерянной скорости м. т., взятымъ съ отрицательнымъ знакомъ, и потеря кинетической энергіи материальной точки равна живой силѣ потерянной скорости.

2. Поверхность неподвижна, но упруга.

При ударѣ м. т. о неподвижную упругую поверхность полный актъ удара разбивается на два акта: актъ потери нормальной скорости и актъ ея возстановленія; въ теченіе перваго акта все происходитъ, какъ и при ударѣ о неупругую поверхность, т. е. уничтожается нормальная скорость $\bar{v}_N$ м. т., въ теченіе же

второго акта часть этой потерянной нормальной скорости возстановляется, но по направленію прямо противоположному ея первоначальному направленію, причемъ отношеніе величины возстановленной нормальной скорости къ потерянной называютъ коэффиціентомъ возстановленія; мы будемъ обозначать его черезъ ε; въ такомъ случаѣ скорость $\bar{v}_1$ матеріальной точки послѣ удара объ идеально гладкую упругую поверхность будетъ:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_K - \varepsilon \bar{v}_N ;$$



слѣдовательно:

$$\bar{J} = m\bar{v}_1 - m\bar{v} = m(\bar{v}_K - \varepsilon \bar{v}_N) -$$
$$- m(\bar{v}_K + v_N) = - m\bar{v}_N(1+\varepsilon)$$

и измѣненіе кинетической энергіи матеріальной точки опредѣлится изъ равенствъ:

$$K_1 - K = \frac{1}{2}\frac{J^2}{m} + \bar{J}\bar{v} = \frac{m\bar{v}_N^2(1+\varepsilon)^2}{2} -$$
$$- m\bar{v}_N(1+\varepsilon)(\bar{v}_K + \bar{v}_N) = - \frac{mv_N^2}{2}(1-\varepsilon^2)$$

изъ послѣдняго выраженія ясно, что при ударѣ матеріальной точки объ упругую неподвижную поверхность происходитъ потеря кинетической энергіи матеріальной точки, ибо ε вообще меньше единицы.

Если $\varepsilon = 1$, то поверхность называется идеально упругою; въ этомъ случаѣ потерянная нормальная скорость матеріальной точки возстановляется полностью по противоположному направленію и потому уголъ паденія матеріальной точки будетъ равенъ углу ея отраженія, и кинетическая энергія матеріальной точки не измѣняется.

§4. Дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки и ихъ рѣшенія.

Законъ количества ускоренія свободной мат. точки

$$m\bar{u} = \bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

аналитически можетъ быть выраженъ тремя равенствами проэкцій обѣихъ частей этого геометрическаго равенства на три взаимноперпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$, а именно:

$$(*) \begin{cases} mx'' = X = \Sigma X_i ; \\ my'' = Y = \Sigma Y_i ; \\ mz'' = Z = \Sigma Z_i ; \end{cases}$$

въ которыхъ черезъ x, y, z мы обозначимъ координаты матеріальной точки, а черезъ X, Y, Z и X_i, Y_i, Z_i — соотвѣтственно проекціи на тѣ же оси равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ свободной матеріальной точкѣ и проэкціи одной изъ этихъ силъ F_i.

Силы вообще могутъ измѣнятся съ теченіемъ времени, зависѣть отъ положенія матеріальной точки (наприм. центральныя силы притяженія и отталкиванія, зависящія отъ разстоянія матеріальной точки отъ дѣйствующаго на нее центра), и зависѣть наконецъ отъ величины и направленія скорости матеріальной точки (напр. сопротивленіе воздуха или вообще какой-либо среды), поэтому лѣвыя части написанныхъ равенствъ вообще суть нѣкоторыя функціи времени, координатъ и ихъ первыхъ производныхъ, т. е

$$X = X(t;\ x, y, z;\ x', y', z')$$
$$Y = Y(t;\ x, y, z;\ x', y', z')$$
$$Z = Z(t;\ x, y, z;\ x', y', z')$$

и потому уравненія (*) называются дифференціальными уравненіями движенія свободной м.т. въ прямоугольной прямолинейной и неподвижной системѣ коорди-

натъ $(O; x, y, z)$, такъ какъ они связываютъ между собою координаты матеріальной точки, ихъ первыя и вторыя производныя и время t.

Рѣшить дифференціальныя уравненія (*) — это значитъ найти для x, y, z такія функціи времени t, которыя, будучи подставлены въ уравненія (*), обращали бы ихъ въ тождества.

Для того, чтобы познакомиться съ общимъ выводомъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій (*) движенія св. м. т., вообразимъ неизвѣстныя намъ функціи времени x, y, z разложенными въ безконечные ряды по формулѣ Тайлора, причемъ для краткости положимъ $t - t_0 = h$, въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть три равенства:

$$(**)\begin{cases} x = x_0 + \frac{h}{1}x_0' + \frac{h^2}{1\cdot 2}x_0'' + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}x_0''' + \cdots \\ y = y_0 + \frac{h}{1}y_0' + \frac{h^2}{1\cdot 2}y_0'' + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}y_0''' + \cdots \\ z = z_0 + \frac{h}{1}z_0' + \frac{h^2}{1\cdot 2}z_0'' + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}z_0''' + \cdots \end{cases},$$

въ которыхъ нижніе значки обозначаютъ значенія соотвѣтствующихъ соотвѣтствующихъ имъ функцій при $t = t_0$, причемъ дифференцируя послѣдовательно уравненія (*) и подставляя въ получаемыя результаты вмѣсто x'', y'', z'' ихъ выраженія изъ тѣхъ равенствъ (*), мы получимъ всѣ производныя высшихъ порядковъ отъ координатъ, выраженными въ зависимости отъ времени t, самихъ координатъ x, y, z и ихъ первыхъ производныхъ x', y', z'; слѣдовательно если для нѣкотораго начальнаго момента t, мы зададимъ начальное положеніе $m_0(x_0, y_0, z_0)$ матеріальной точки и ея начальную скорость $\bar{v}_0(x_0', y_0', z_0')$, то всѣ коэффиціенты въ рядахъ (**) вполнѣ опредѣлятся и эти ряды дадутъ намъ возможность вычислить координаты (x, y, z) м. т. въ каждый моментъ времени t.

Но начальное положеніе м. т. и величина и направленіе ея начальной скорости могутъ быть заданы вполнѣ

произвольно, поэтому общія рѣшенія дифференціальныхъ уравненій (*) всегда будутъ содержать въ себѣ 6 произвольныхъ постоянныхъ, т. е. будутъ функціями времени t вида:

$$\begin{cases} x = f_1(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ y = f_2(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ z = f_3(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \end{cases}$$

гдѣ черезъ $c_1, c_2, \ldots\ldots c_6$ мы обозначили произвольныя постоянныя величины.

Такимъ образомъ для полнаго опредѣленія движенія св. м. т. кромѣ приложенныхъ къ ней силъ надо задать еще, такъ называемыя, начальныя обстоятельства движенія, т. е. положеніе м. т. $m_0(x_0, y_0, z_0)$ и величину и направленіе $\bar{v}_0(x_0', y_0', z_0')$ ея начальной скорости въ нѣкоторый начальный моментъ t_0, что было выяснено нами еще въ кинематикѣ при опредѣленіи движенія точки по ея ускоренію, причемъ подъ дѣйствіемъ одной и той же силы движенія м. т. могутъ быть весьма разнообразны, въ зависимости отъ начальныхъ обстоятельствъ этихъ движеній.

Примѣръ. Опредѣлить движеніе св. м. т., притягиваемой нѣкоторымъ неподвижнымъ центромъ O силою $\bar{F} = -mk^2\bar{r}$, прямопропорціональною массѣ m м. т. и ея разстоянію r отъ этого центра.

Принявъ центръ O за начало неподвижной прямоугольной системы координатъ (O, X, Y, Z) и обозначивъ черезъ x, y, z; X, Y, Z соотвѣтственно координаты м. т. относительно этихъ осей и проекціи на тѣ же оси приложенной къ ней силы, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ

$$X = -mk^2x, \quad Y = -mk^2y, \quad Z = -mk^2z$$

и потому дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ:

$$x'' = -k^2 x \;;\; y'' = -k^2 y \;;\; z'' = -k^2 z.$$

Дифференцируя последовательно по времени одно изъ этихъ уравненій, напр. послѣднее, мы получимъ:

$$z'' = -k^2 z \qquad , \; z''' = -k^2 z'$$
$$z^{(IV)} = -k^4 z \qquad z^{(V)} = -k^4 z'$$
$$z^{(VI)} = -k^6 z \qquad z^{(VII)} = -k^6 z'$$

и т. д.

слѣдовательно

$$z = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{1\cdot 2} z''_0 + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} z'''_0 + \cdots =$$
$$= z_0\left[1 - \frac{(kh)^2}{1\cdot 2} + \frac{(kh)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots\cdots\right] +$$
$$+ \frac{z'_0}{k}\left[kh - \frac{(kh)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(kh)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots\right] =$$
$$= z_0 \operatorname{Cos}(k,h) + \frac{z'_0}{k} \operatorname{Sin}(k,h),$$

откуда, принявъ вовниманіе, что $h = t - t_0$, получимъ

$$z = z_0 \operatorname{Cos} k(t - t_0) + \frac{z'_0}{k} \operatorname{Sin} k(t - t_0)$$

и подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$(*)\begin{cases} x = x_0 \operatorname{Cos} k(t-t_0) + \dfrac{x'_0}{k} \operatorname{Sin} k(t-t_0) \\ y = y_0 \operatorname{Cos} k(t-t_0) + \dfrac{y'_0}{k} \operatorname{Sin} k(t-t_0) \end{cases}$$

Если за плоскость координатъ XOY принять плоскость, проходящую черезъ начальную скорость $\overline{v}_0$ матеріальной точки, то

$$z_0 = 0 \;;\; z'_0 = 0 \;\text{ и }\; z = 0$$

т. е. мы убѣждаемся, что траекторія м. т. есть плоская кривая, плоскость которой проходитъ черезъ центръ притяженія O и начальную скорость м. т. $\overline{v}_0$, то и непосредственно очевидно, что въ данномъ случаѣ матеріальная точка подвержена дѣйствію нѣкоторой центральной силы.

При такомъ выборѣ плоскости координатъ XOY дви-

произвольно, поэтому <u>общія</u> рѣшенія дифференціальныхъ уравненій (*) всегда будутъ содержать въ себѣ 6 произвольныхъ постоянныхъ, т. е. будутъ функціями времени t вида:

$$\begin{cases} x = f_1(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ y = f_2(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ z = f_3(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \end{cases}$$

гдѣ черезъ $c_1, c_2, \ldots\ldots c_6$ мы обозначили произвольныя постоянныя величины.

Такимъ образомъ для полнаго опредѣленія движенія св. м. т. кромѣ приложенныхъ къ ней силъ надо задать еще, такъ называемыя, начальныя обстоятельства движенія, т. е. положеніе м. т. $m_0(x_0, y_0, z_0)$ и величину и направленіе $\bar{v}_0(x_0', y_0', z_0')$ ея начальной скорости въ нѣкоторый начальный моментъ t_0, что было выяснено нами еще въ кинематикѣ при опредѣленіи движенія точки по ея ускоренію, причемъ подъ дѣйствіемъ одной и той же силы движенія м. т. могутъ быть весьма разнообразны, въ зависимости отъ начальныхъ обстоятельствъ этихъ движеній.

Примѣръ. <u>Опредѣлить движеніе св. м. т., притягиваемой нѣкоторымъ неподвижнымъ центромъ O силою $\bar{F} = -mk^2\bar{r}$, прямопропорціональною массѣ m м. т. и ея разстоянію r отъ этого центра.</u>

Принявъ центръ O за начало неподвижной прямоугольной системы координатъ (O, X, Y, Z) и обозначивъ черезъ x, y, z; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ соотвѣтственно координаты м. т. относительно этихъ осей и проекціи на тѣ же оси приложенной къ ней силы, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ

$$\mathfrak{X} = -mk^2x, \quad \mathfrak{Y} = -mk^2y, \quad \mathfrak{Z} = -mk^2z$$

и потому дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ:

$$x'' = -k^2 x \; ; \; y'' = -k^2 y \; ; \; z'' = -k^2 z.$$

Дифференцируя последовательно по времени одно изъ этихъ уравненій, напр. послѣднее, мы получимъ:

$$z'' = -k^2 z \quad , \quad z''' = -k^2 z'$$
$$z^{(IV)} = -k^4 z \qquad z^{(V)} = -k^4 z'$$
$$z^{(VI)} = -k^6 z \qquad z^{(VII)} = -k^6 z'$$

и т. д.

слѣдовательно

$$z = z_0 + \frac{h}{1} z_0' + \frac{h^2}{1\cdot 2} z_0'' + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} z_0''' + \cdots =$$
$$= z_0 \left[1 - \frac{(kh)^2}{1\cdot 2} + \frac{(kh)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots\cdots \right] +$$
$$+ \frac{z_0'}{k} \left[kh - \frac{(kh)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(kh)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots \right] =$$
$$= z_0 \operatorname{Cos}(k, h) + \frac{z_0'}{k} \operatorname{Sin}(k, h),$$

откуда, принявъ вовниманіе, что $h = t - t_0$, получимъ

$$z = z_0 \operatorname{Cos} k(t - t_0) + \frac{z_0'}{k} \operatorname{Sin} k(t - t_0)$$

и подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$(*) \begin{cases} x = x_0 \operatorname{Cos} k(t-t_0) + \dfrac{x_0'}{k} \operatorname{Sin} k(t-t_0) \\ y = y_0 \operatorname{Cos} k(t-t_0) + \dfrac{y_0'}{k} \operatorname{Sin} k(t-t_0) \end{cases}$$

Если за плоскость координатъ XOY принять плоскость, проходящую черезъ начальную скорость $\overline{v}_0$ матеріальной точки, то

$$z_0 = 0 \; ; \; z_0' = 0 \; и \; z = 0$$

т. е. мы убѣждаемся, что траекторія м. т. есть плоская кривая, плоскость которой проходитъ черезъ центръ притяженія O и начальную скорость м. т. $\overline{v}_0$, то и непосредственно очевидно, ибо въ данномъ случаѣ матеріальная точка подвержена дѣйствію нѣкоторой центральной силы.

При такомъ выборѣ плоскости координатъ XOY ави-

женіе м. т. опредѣлится двумя равенствами (*), исключивъ изъ которыхъ время t, мы получимъ уравненіе траекторіи м. т.

$$k^2(y_0x - x_0y)^2 + (y'_0x - x'_0y)^2 = (x_0y'_0 - y_0x'_0)^2,$$

изъ котораго видно, что траекторія м. т. въ разсматриваемомъ случаѣ вообще будетъ кривая второго порядка за исключеніемъ трехъ частныхъ случаевъ, когда траекторія будетъ прямою линіею, а именно:

1). Если начальная скорость м. т. $v_0 = 0$, т. е. $x'_0 = 0$ и $y'_0 = 0$; въ этомъ случаѣ траекторія м. т. будетъ прямая

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0},$$

проходящая черезъ центръ O и начальное положеніе м. т.

2) Если въ начальный моментъ м. т. находится въ центрѣ притяженія O, т. е. $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, но начальная скорость не равна нулю; въ этомъ случаѣ траекторія м. т. будетъ прямая

$$\frac{x}{x'_0} = \frac{y}{y'_0},$$

совпадающая съ начальною скоростью м. т.

3) Если направленіе начальной скорости м. т. проходитъ черезъ центръ притяженія, т. е.

$$\frac{x'_0}{x} = \frac{y'_0}{y_0},$$

то въ этомъ случаѣ траекторія м. т. будетъ прямая

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0},$$

проходящая черезъ центръ притяженія и начальное положеніе м. т.

Если въ послѣднихъ трехъ случаяхъ ось OX взять

совпадающую съ прямолинейною траекторiю м. т., то движенiе м. т. будетъ совершаться по этой оси, удовлетворяя соотвѣтственно равенствамъ:

$$1)\quad x = x_0 \cos k(t-t_0),$$

$$2)\quad x = \frac{x_0'}{k} \sin k(t-t_0)$$

$$3)\quad x = x_0 \cos k(t-t_0) + \frac{x_0'}{k} \sin k(t-t_0).$$

§5. Выводъ общихъ законовъ движенiя св. м. т. изъ дифференцiальныхъ уравненiй ея движенiя.

Такъ какъ дифференцiальныя уравненiя движенiя св. мат. точки

$$(*)\quad mx'' = X,\; my'' = Y,\; mz'' = Z$$

имѣютъ мѣсто при всевозможныхъ силахъ и всевозможныхъ начальныхъ обстоятельствахъ движенiя св. м. т., то изъ нихъ можно вывести общiе законы движенiя св. м. т., т. е. такiе законы, которые также остаются справедливыми при всевозможныхъ силахъ и всевозможныхъ начальныхъ обстоятельствахъ движенiя м. т.

1) Сами дифференцiальныя уравненiя (*) движенiя св. м. точки выражаютъ, какъ мы знаемъ, аналитически законъ количества ускоренiя св. м. т.

$$m\bar{u} = \bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

2) Сдѣлавъ соотвѣтствующiя преобразованiя съ дифференцiальными уравненiями (*), мы придемъ къ третьимъ равенствамъ

$$\begin{cases} m(yz'' - zy'') = yZ - zY, \\ m(zx'' - xz'') = zX - xZ, \\ m(xy'' - yx'') = xY - yX \end{cases}$$

аналитически выражающимъ законы моментовъ количества ускоренія св. м. т.

$$\bar{l}_o = \bar{L} \quad \text{и} \quad l_{ox} = L_{ox}$$

3) Помноживъ дифференціальныя уравненія (*) на dt и проинтегрировавъ полученныя равенства въ предѣлахъ отъ t_o до t, мы придемъ къ тремъ равенствамъ:

$$m(x' - x'_o) = \int_{t_o}^{t} \mathfrak{X}\, dt,$$

$$m(y' - y'_o) = \int_{t_o}^{t} \mathfrak{Y}\, dt,$$

$$m(z' - z'_o) = \int_{t_o}^{t} \mathfrak{Z}\, dt,$$

аналитически выражающимъ законъ измѣненія количества движенія св. м. т., а именно:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_o = \bar{J}_{t_o}^{t}(\bar{F}) = \int_{t_o}^{t} \bar{F}\, dt.$$

4) Замѣтивъ, что

$$m(yz' - zy')' = m(yz'' - zy'') = y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y}$$

$$m(zx' - xz')' = m(zx'' - xz'') = z\mathfrak{X} - x\mathfrak{Z}$$

$$m(xy' - yx')' = m(xy'' - yx'') = x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X}$$

и зная, что лѣвыя части этихъ равенствъ соотвѣтственно выражаютъ:

$$k'_{ox} = k'_{o,x} = v_{k,x},\ k'_{oy} = k'_{o,y} = v_{k,y},$$

$$k'_{oz} = k'_{o,z} = v_{k,z}$$

а правыя - соотвѣтственно равны

$$L_{ox} = L_{o,x},\ L_{oy} = L_{o,y},\ L_{oz} = L_{o,z}$$

мы приходимъ къ общему закону измѣненія моментовъ количества движенія св. м. т.:

$$\bar{v}_k = \bar{L}_o \quad \text{и} \quad k'_{ox} = L_{ox}.$$

5) Помноживъ наконецъ дифференціальныя уравненія (*) соотвѣтственно на dx, dy, dz и сложивъ почленно полученныя равенства, мы придемъ къ равенству:

$$m\,(x''dx + y''dy + z''dz) = \mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz,$$

но

$$x''dx + y''dy + z''dz = (x''x' + y''y' + z''z')\,dt =$$
$$= d\,\frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2} = d\,\frac{v^2}{2};$$

слѣдовательно

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}\,dz,$$

откуда интегрируя получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t}(\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz)$$

т. е. придемъ къ общему закону измѣненія кинетической энергіи или живой силы св. м. т.

$$\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0 = \mathrm{T}_{t_0}^{t}(\overline{\mathrm{F}}).$$

§6. Выводъ частныхъ случаевъ общихъ законовъ движенія св. м. т. изъ дифференціальныхъ уравненій ея движенія.

А. Частные случаи закона количества ускоренія св. мат. точки.

1). Законъ равномѣрнаго движенія св. м. точки. При равномѣрномъ движеніи св. м. т. скорость точки сохраняетъ постоянную величину и потому

$$\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0,$$

но

$$\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz = (\mathfrak{X}x' + \mathfrak{Y}y' + \mathfrak{Z}z')\,dt =$$
$$= \mathrm{F}v\,\mathrm{Cos}\,(\mathrm{F}, v)\,dt,$$

слѣдовательно

$$F v \cos(F, v) = 0,$$

т. е. <u>при равномѣрномъ движеніи св. м. т. равнодѣйствующая приложенныхъ къ ней силъ должна быть равна нулю или быть перпендикулярна къ скорости м. т. и наоборотъ.</u>

2. Законъ прямолинейнаго движенія св. м. т.

Для прямолинейнаго движенія св. м. т. необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., была постоянно направлена по прямой, совпадающей съ начальною скоростью м. т.

Дѣйствительно, принявъ эту прямую за ось OX прямоугольной системы координатъ (O; X, Y, Z) изъ общихъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. придемъ къ равенствамъ

$$mx'' = X; \quad my'' = 0; \quad mz'' = 0$$

слѣдовательно

$$y' = Const = y'_0 = 0$$

и

$$z' = Const = z'_0 = 0$$

откуда получимъ

$$y = Const. = y_0 = 0$$

$$z = Const. = z_0 = 0$$

т. е. траекторія св. м. т. совпадаетъ съ осью OX, и наоборотъ

если $y = 0$ и $z = 0$, то

$$Y = my'' = 0 \quad и \quad Z = mz'' = 0,$$

т. е. силы должны быть направлены по оси OX.

3. Законъ прямолинейнаго и равномѣрнаго движенія св. м. т.

При прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи св. м. т. равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ должна быть равна нулю и наоборотъ.

Дѣйствительно, при прямолинейномъ и равномѣр-

номъ движеніи св. м. т.

$$x'' = y'' = z'' = 0\,;$$

слѣдовательно

$$\mathfrak{X} = mx'' = 0\,,\ \mathfrak{Y} = my'' = 0\,,$$
$$\mathfrak{Z} = mz'' = 0$$

и наоборотъ.

4. Условія движенія св. м. т. въ плоскости.

Для движенія св. м. т. въ плоскости необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая приложенныхъ къ ней силъ постоянно находилась въ неподвижной плоскости, проходящей черезъ начальную скорость м. т.

Дѣйствительно, принявъ такую плоскость за плоскость $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ прямоугольной системы координатъ $(O;\ \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, изъ общихъ уравненій движенія св. м. т. мы придемъ къ равенствамъ:

$$mx'' = \mathfrak{X}\,,\ my'' = \mathfrak{Y}\,,\ mz'' = 0\,;$$

слѣдовательно

$$z' = Const = z'_0 = 0$$

и потому

$$z = Const = z_0 = 0\,,$$

т. е. св. м. т. во все время движенія будетъ оставаться въ плоскости $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$, проходящей черезъ начальную скорость м. т., и наоборотъ, если св. м. т. во все время движенія остается въ плоскости $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$, т. е. $z = 0$, то $z' = 0$ и $\mathfrak{Z} = mz'' = 0$, т. е. св. м. т. должна оставаться въ неподвижной плоскости, проходящей черезъ начальную скорость м. т.

Укажемъ еще одно условіе движенія св. мат. т. въ плоскости.

Если равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., остается во все время движенія параллельною нѣкоторой неподвижной оси, то траекторія св. м. т. будетъ плоская кривая, плоскость которой параллельна

этой оси.

Дѣйствительно, принявъ данную ось за ось OZ прямоугольной системы координатъ $(O; X, Y, Z)$, мы придемъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія св. м. т. вида

$$mx'' = 0,\ my'' = 0,\ mz'' = Z;$$

слѣдовательно

$$x' = C_1 \text{ и } y' = C_2$$

и потому

$$C_2 x' - C_1 y' = 0$$

или

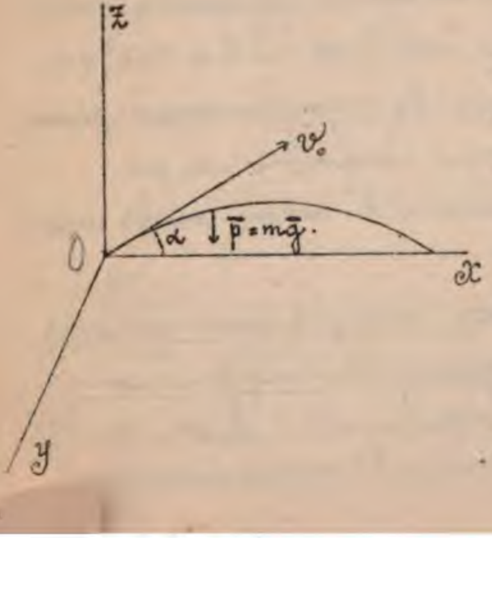
$$C_2 x - C_1 y = C_3$$

послѣднее равенство показываетъ, что движеніе св. м. т. будетъ совершаться въ плоскости, нормальной оси OZ, причемъ, конечно, эта плоскость будетъ проходить черезъ начальное положеніе м. т. и черезъ ея начальную скорость.

Примѣръ. Движеніе тяжелой м. т., брошенной подъ угломъ α къ горизонту, въ пустотѣ.

Принявъ начальное положеніе тяжелой м. т. за начало O прямоугольной системы координатъ $(O; X, Y, Z)$, направивъ ось OZ по вертикали вверхъ и примемъ за плоскость XOZ вертикальную плоскость, проходящую черезъ начальную скорость $\bar{v}_0$ м. т., въ такомъ случаѣ

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg$$



и уравненія движенія тяжелой м. т. по сокращеніи на m напишутся подъ видомъ

$$x'' = 0,\ y'' = 0,\ z'' = -g$$

Условившись для простоты время t отсчитывать отъ начала движенія, т. е. положивъ, что при $t = 0$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \ , \ x_0' = v_0 \cos\alpha ;$$

$$y_0' = 0 \ , \ z_0' = v_0 \sin\alpha ;$$

проинтегрируемъ вышенаписанныя уравненія движенія тяжелой точки въ пустотѣ; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ равенствамъ:

$$x' = Const. = x_0' = v_0 \cos\alpha ,$$

$$y' = Const = y_0' = 0$$

$$z' = -gt + C = -gt + v_0 \sin\alpha ,$$

проинтегрировавъ которыя, получимъ равенства:

$$(1) \quad x = v_0 \cos\alpha t ,$$

$$(2) \quad y = Const = y_0 = 0$$

$$(3) \quad z = -\frac{gt}{2} + v_0 \sin\alpha t ,$$

изъ которыхъ видно, что траекторія тяжелой м. т. будетъ плоская кривая, лежащая въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось Oz, что и непосредственно можно было предвидѣть, такъ сила тяжести mg параллельна оси Oz.

Исключивъ изъ равенствъ (1) и (3) время t, получимъ уравненія траекторіи движенія тяжелой м. т. въ пустотѣ.

$$z = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha ,$$

изъ котораго видно, что траекторія эта будетъ парабола.

Положивъ въ послѣднемъ уравненіи $z = 0$, получимъ дальность полета:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} ,$$

откуда видно, что наибольшая дальность полета будетъ при

$$\sin 2\alpha = 1 ,$$

т. е. при $\alpha = 45°$, причемъ

этой оси.

Дѣйствительно, принявъ данную ось за ось OZ прямоугольной системы координатъ $(O;\, X, Y, Z)$, мы придемъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія св. м. т. вида

$$mx'' = 0\,,\ my'' = 0\,,\ mz'' = Z\,;$$

слѣдовательно

$$x' = C_1 \text{ и } y' = C_2$$

и потому

$$C_2 x' - C_1 y' = 0$$

или

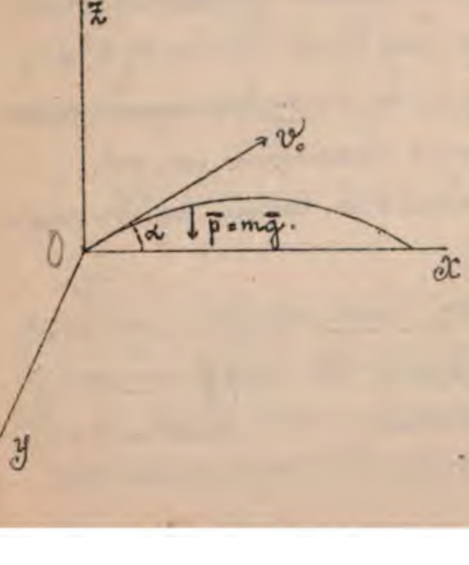
$$C_2 x - C_1 y = C_3$$

послѣднее равенство показываетъ, что движеніе св. м. т. будетъ совершаться въ плоскости, нормальной оси OZ, причемъ, конечно, эта плоскость будетъ проходить черезъ начальное положеніе м. т. и черезъ ея начальную скорость.

Примѣръ. Движеніе тяжелой м. т., брошенной подъ угломъ α къ горизонту, въ пустотѣ.

Принявъ начальное положеніе тяжелой м. т. за начало O прямоугольной системы координатъ $(O;\, X, Y, Z)$, направимъ ось OZ по вертикали вверхъ и примемъ за плоскость XOZ вертикальную плоскость, проходящую черезъ начальную скорость $\bar{v}_0$ м. т., въ такомъ случаѣ

$$X = 0\,,\ Y = 0\,,\ Z = -mg$$



и уравненія движенія тяжелой м. т. по сокращеніи на m напишутся подъ видомъ

$$x'' = 0\,,\ y'' = 0\,,\ z'' = -g$$

Условившись для простоты время t отсчитывать отъ начала движенія, т. е. положивъ, что при $t = 0$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \ , \ x_0' = v_0 \cos\alpha;$$

$$y_0' = 0 \ , \ z_0' = v_0 \sin\alpha;$$

проинтегрируемъ вышенаписанныя уравненія движенія тяжелой точки въ пустотѣ; въ такомъ случаѣ мы придемъ къ равенствамъ:

$$x' = Const. = x_0' = v_0 \cos\alpha,$$

$$y' = Const = y_0' = 0$$

$$z' = -gt + C = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

проинтегрировавъ которыя, получимъ равенства:

$$(1) \quad x = v_0 \cos\alpha t,$$

$$(2) \quad y = Const = y_0 = 0$$

$$(3) \quad z = -\frac{gt}{2} + v_0 \sin\alpha t,$$

изъ которыхъ видно, что траекторія тяжелой м. т. будетъ плоская кривая, лежащая въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось Oz, что и непосредственно можно было предвидѣть, такъ сила тяжести mg параллельна оси Oz.

Исключивъ изъ равенствъ (1) и (3) время t, получимъ уравненія траекторіи движенія тяжелой м. т. въ пустотѣ.

$$z = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tang}\alpha,$$

изъ котораго видно, что траекторія эта будетъ парабола.

Положивъ въ послѣднемъ уравненіи $z = 0$, получимъ дальность полета:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

откуда видно, что наибольшая дальность полета будетъ при

$$\sin 2\alpha = 1,$$

т. е. при $\alpha = 45^\circ$, причемъ

$$x_{max.} = \frac{v_0^2}{g}$$

Наконецъ, положивъ въ равенствѣ (3) $z = 0$, получимъ время полета:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

В. Частные случаи закона количества движенія св. мат. точки.

1). Законъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ данной оси.

Если направленіе равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., во все время движенія этой послѣдней постоянно проходитъ черезъ нѣкоторую неподвижную ось или параллельна ей, то секторіальная скорость м. т. въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, сохраняетъ постоянную величину, т. е. площадь сектора, описываемого проекціей этой точки на такой плоскости возрастаетъ пропорціонально времени.

Дѣйствительно, принявъ эту ось за ось Oz прямоугольной системы координатъ $(O; x, y, z)$, ясно, что

$$\mathcal{M}_{oz}(\overline{F}) = x\mathcal{Y} - y\mathcal{X} = 0,$$

и потому изъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. мы придемъ къ равенствамъ:

$$m(xz'' - zx'') = m(xz' - zx')' = x\mathcal{Z} - z\mathcal{X} = 0,$$

т. е.

$$m(xz' - zx') = c,$$

но

$$m(xz' - zx') = k_{oz} = 2m\mathcal{S}'_z,$$

слѣдовательно

$$\mathcal{S}'_z = \frac{c}{2m} \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_z = \frac{c}{2m}(t - t_0)$$

ч. т. д.

2. Законы площадей при центральной силѣ.

Если направленіе равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ св. м. т., во все время движенія этой послѣдней проходитъ черезъ нѣкоторый центръ O, то законъ площадей будетъ имѣть мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ этотъ центръ O, причемъ траекторія мат. точки будетъ плоская кривая, плоскость которой проходитъ черезъ этотъ центръ O, и въ плоскости движенія мат. точки ея секторіальная скорость будетъ имѣть наибольшую величину.

Дѣйствительно, принявъ центръ O за начало координатъ и зная, что

$$\mathcal{M}_o(\overline{F}) = 0$$

изъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т., мы придемъ къ равенствамъ

$$m(yz'' - zy'') = m(yz' - zy')' = yZ - zY =$$
$$= \mathcal{M}_{ox}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,x}(\overline{F}) = 0,$$

$$m(zx'' - xz'') = m(zx' - xz')' = zX - xZ =$$
$$= \mathcal{M}_{oy}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,y}(\overline{F}) = 0,$$

$$m(xy'' - yx'') = m(xy' - yx')' = xY - yX =$$
$$= \mathcal{M}_{oz}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,z}(\overline{F}) = 0,$$

слѣдовательно

$$(*) \quad m(yz' - zy') = C_1, \; m(zx' - xz') = C_2,$$
$$m(xy' - yx') = C_3$$

Помноживъ затѣмъ послѣднія равенства соотвѣтственно на x, y, z и сложивъ почленно полученные результаты, придемъ къ равенству

$$(**) \quad C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0.$$

Причемъ первыя три изъ этихъ равенствъ (*) можно переписать подъ видомъ:

$$k_{ox} = 2m\delta'_x = C_1\ ,\ k_{oy} = 2m\delta'_y = C_2$$

$$k_{oz} = 2m\delta'_z = C_3\ ,$$

т. е. они выражаютъ, что законъ площадей будетъ имѣть мѣсто въ каждой изъ плоскостей координатъ, но плоскости координатъ можно выбрать произвольно, слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ законъ площадей будетъ имѣть мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ центръ O; наконецъ равенство (**) показываетъ, что траекторія св. м. т. будетъ плоская кривая, плоскость которой проходитъ черезъ центръ O, причемъ воспользовавшись равенствами:

$$C_1 = k_{ox} = k_{o,x}\ ,\ C_2 = k_{oy} = k_{o,y}\ ,\ C_3 = k_{oz} = k_{o,z}$$

мы можемъ переписать его подъ видомъ

$$k_{o,x}x + k_{o,y}y + k_{o,z}z = k_o r \cos(k_o, r) = 0\ ,$$

гдѣ черезъ r мы обозначили радіусъ векторъ м. т., слѣдовательно во все время движенія

$$\bar{r} \perp \bar{k}_o\ ,$$

т. е. плоскость траекторіи м. т. будетъ перпендикулярна къ линейному моменту

$$\bar{k}_o = M_o(m\bar{v})$$

количества движенія св. м. т., сохраняющему постоянную величину и постоянное направленіе въ пространствѣ, ибо

$$k_{o,x} = C_1\ ,\ k_{o,y} = C_2\ ,\ k_{o,z} = C_3$$

Принявъ, наконецъ, во вниманіе, что $\bar{k}_o$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ моментъ количества движенія св. м. т. относительно оси, совпадающей съ его направленіемъ, мы при-

ходимъ къ заключенію, что

$$k_0 = 2mS',$$

гдѣ черезъ S' мы обозначили секторіальную скорость м. т. въ плоскости ея движенія, слѣдовательно

$$S' = \frac{k_0}{2m} = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}{2m},$$

причемъ эта секторіальная скорость будетъ наибольшею изъ секторіальныхъ скоростей м. т. въ любой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, такъ какъ взявъ плоскость, перпендикулярную къ любой оси OX, мы знаемъ, что

$$S'_x = \frac{K_{ox}}{2m} = \frac{K_{o,x}}{2m} = \frac{K_o}{2m} \cos(K_o, \mathfrak{X}) = S' \cos(K_o, \mathfrak{X})$$

C. Законы сохраненія полной энергіи св. мат. точки.

Если равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., есть консервативная сила, т. е.

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

гдѣ $U(x, y, z)$ есть потенціалъ данной консервативной силы, то полная энергія м. т. сохраняетъ постоянную величину, т. е.

$$\mathfrak{K} + \Pi = \mathfrak{K} - U = h.$$

Дѣйствительно, въ данномъ случаѣ

$$\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}\,dy + \mathfrak{Z}\,dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU.$$

и потому доказанное нами раньше (§5) общее равенство

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}\,dy + \mathfrak{Z}\,dz$$

при консервативныхъ силахъ обратится въ равенство:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU,$$

откуда интегрируя получимъ

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \text{ , или } K - U = h.$$

§ 7. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т.

Если преобразовывая какимъ нибудь образомъ дифференціальныя уравненія движенія св. м. т.

$$mx'' = X \text{ , } my'' = Y \text{ , } mz'' = Z \text{ .... } (*)$$

мы получимъ равенство

$$\frac{d}{dt} F(t; x, y, z, x', y', z') = 0$$

обращающееся тождественно въ нуль при замѣнѣ въ немъ послѣ дифференцированія вторыхъ производныхъ x'', y'', z'' отъ координатъ ихъ выраженіями изъ дифференціальныхъ уравненій (*):

$$x'' = \frac{X}{m} \text{ , } y'' = \frac{Y}{m} \text{ , } z'' = \frac{Z}{m},$$

то проинтегрировавъ такое равенство, мы придемъ къ равенству

$$F(t; x, y, z; x', y', z') = C \text{ ...... } (**),$$

заключающему время t, координаты м. т. (x, y, z) и ихъ первыя производныя (x', y', z') и нѣкоторую произвольную постоянную C, причемъ производная отъ этого равенства:

$$F'(t, x, y, z, x', y', z') = 0$$

должна тождественно обращаться въ нуль на основаніи дифференціальныхъ уравненій (*).

Такія равенства (**) называются первыми интегралами дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*).

Поясними это понятіе нѣсколькими примѣрами.

1) Если сила, приложенная къ мат. точкѣ, во все вре-

мы движенія этой послѣдней, лежитъ въ одной плоскости съ нѣкоторою неподвижною осью OZ, то моментъ этой силы относительно оси OZ равенъ нулю, т. е.

$$\mathcal{M}_{oz}(\overline{F}) = x\mathcal{Y} - y\mathcal{X} = 0.$$

и изъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*) мы получимъ, что

$$m(xy'' - yx'') = x\mathcal{Y} - y\mathcal{X} = 0,$$

или

$$m(xy' - yx')' = 0,$$

слѣдовательно

$$m(xy' - yx') = C,$$

причемъ это равенство будетъ однимъ изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (*), выражающимъ, какъ извѣстно, законъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ оси OZ, ибо

$$m(xy' - yx') = k_{oz} = 2mS'_z,$$

слѣдовательно

$$S'_z = \frac{C}{2m} = Const.$$

и потому его называютъ интеграломъ площадей

2. Если сила, приложенная къ св. м. т., во все время движенія этой послѣдней проходитъ черезъ начало координатъ, то линейной моментъ

$$\overline{\mathcal{M}}_o(\overline{F}) = 0$$

этой силы относительно начала координатъ будетъ равенъ нулю, слѣдовательно для такой силы

$$y\mathcal{Z} - z\mathcal{Y} = \mathcal{M}_{ox}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,x}(\overline{F}) = 0$$
$$z\mathcal{X} - x\mathcal{Z} = \mathcal{M}_{oy}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,y}(\overline{F}) = 0$$
$$x\mathcal{Y} - y\mathcal{X} = \mathcal{M}_{oz}(\overline{F}) = \mathcal{M}_{o,z}(\overline{F}) = 0,$$

и потому изъ дифференціальныхъ уравненій (*) движенія

св. м. т. после надлежащих преобразований, подобно предыдущему, мы придем к трем равенствам:

$$m(yz'' - zy'')=0, \quad m(zx' - xz')'=0$$

$$m(xy' - yx')'=0,$$

откуда получим три первых интеграла:

$$m(yz' - zy')=C_1, \quad m(zx' - xz')=C_2,$$

$$m(xy' - yx')=C_3,$$

выражающих законы площадей в трех плоскостях координат, так как равенства эти можно переписать под видом:

$$2mS'_x = C_1, \quad 2mS'_y = C_2, \quad 2mS'_z = C_3,$$

и потому их называют „<u>интегралами площадей</u>".

3. Если сила, приложенная к св. м. т. <u>консервативна</u>, т.е. проекции ея удовлетворяют равенствам:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то помножив дифференциальные уравнения движения св. м. т. (*) соответственно на dx, dy, dz и сложив почленно полученные равенства, придем к равенству:

$$m(x''dx + y''dy + z''dz) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU$$

откуда интегрируя получим:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

где h есть произвольная постоянная, т.е. получим один из первых интегралов дифференциальных уравнений движения св. м. т. под действием консерва-

тивной силы

$$\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)-\mathcal{U}(x,y,z)=h,$$

выражающей извѣстный законъ сохраненія полной энергіи, и называемый „интеграломъ живой силы"

Если мы имѣемъ два первыхъ интеграла

$$F_1(t;x,y,z;x',y',z')=C_1$$
$$F_2(t;x,y,z;x',y',z')=C_2$$

дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*), то взявъ отъ нихъ произвольную функцію $F(F_1,F_2)$ и приравнявъ ее новой произвольной постоянной C, мы получимъ новый интегралъ:

$$F(F_1,F_2)=C;$$

ибо производная отъ такой сложной функціи

$$F'(F_1,F_2)=\frac{\partial F}{\partial F_1}F_1'+\frac{\partial F}{\partial F_2}F_2'=0$$

будетъ тождественно обращаться въ нуль на основаніи уравненій (*), такъ какъ производныя F_1' и F_2' по опредѣленію обращаются тождественно въ нули на основаніи тѣхъ же уравненій, каждая въ отдѣльности, но постоянныя C_1, C_2, C здѣсь будутъ связаны равенствомъ

$$F(C_1,C_2)=C$$

и потому такіе интегралы не будутъ независимы; причемъ <u>независимыхъ</u> первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*), т. е. такихъ, въ которыхъ произвольныя постоянныя не связаны между собою не можетъ быть больше шести:

$$\begin{cases}F_1(t;x,y,z;x',y',z')=C_1\\ F_2(t;x,y,z;x',y',z')=C_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ F_6(t;x,y,z;x',y',z')=C_6\end{cases}$$

Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ, рѣшивъ эти шесть уравненій относительно координатъ (x, y, z) и ихъ производныхъ x', y', z' и подставивъ эти выраженія въ седьмой интегралъ мы получили бы соотношеніе между семью постоянными $c_1, c_2, \ldots c_7$, въ которое t, какъ величина перемѣнная, входить не можетъ.

Найдя шесть независимыхъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*) и рѣшивъ ихъ относительно координатъ x, y, z и ихъ производныхъ x', y', z', мы придемъ къ равенствамъ:

$$\begin{cases} x = f_1(t; c_1, c_2, \ldots c_6) \\ y = f_2(t; c_1, c_2, \ldots c_6) \\ z = f_3(t; c_1, c_2, \ldots c_6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = f_1'(t; c_1, c_2, \ldots c_6) \\ y' = f_2'(t; c_1, c_2, \ldots c_6) \\ z' = f_3'(t; c_1, c_2, \ldots c_6) \end{cases}$$

въ которыхъ произвольныя постоянныя опредѣлятся на основаніи данныхъ начальныхъ обстоятельствъ движенія, а именно, что при $t = t_0$

$$x = x_0, \; y = y_0, \; z = z_0 \text{ и } x' = x_0', \; y' = y_0'$$
$$z_0' = z_0';$$

и опредѣлимъ такимъ образомъ движеніе св. м. т., но можно поступать и иначе: если, найдя три независимыхъ первыхъ интеграла дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*)

$$F_1(t; x, y, z; x', y', z') = c_1$$

$$F_2(t; x, y, z; x', y', z') = c_2$$

$$F_3(t; x, y, z; x', y', z') = c_3$$

и преобразовавъ ихъ, мы придемъ къ равенству:

$$\frac{d}{dt}\phi(t;\, x, y, z;\, c_1, c_2, c_3) = 0,$$

обращающееся тождественно въ нуль при подстановкѣ въ немъ послѣ дифференцированія вмѣсто x', y', z' ихъ выраженій, найденныхъ изъ первыхъ трехъ интеграловъ, то, проинтегрировавъ такое равенство, мы придемъ къ равенству:

$$\phi(t, x, y, z, c_1, c_2, c_3) = C,$$

заключающему время t, координаты матеріальной точки x, y, z и четыре произвольныхъ постоянныхъ c_1, c_2, c_3, C, изъ которыхъ первыя три суть произвольныя постоянныя найденныхъ трехъ первыхъ интеграловъ, а четвертая новая произвольная постоянная; такое равенство называютъ однимъ изъ вторыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. (*).

Найдя три такихъ вторыхъ интеграла

$$\begin{cases} \phi_1(t;\, x, y, z;\, c_1, c_2, c_3) = c_4 \\ \phi_2(t;\, x, y, z;\, c_1, c_2, c_3) = c_5 \\ \phi_3(t;\, x, y, z;\, c_1, c_2, c_3) = c_6 \end{cases}$$

и рѣшивъ ихъ относительно координатъ x, y, z, мы снова придемъ къ равенствамъ

$$x = f_1(t;\, c_1, c_2, \ldots c_6)$$
$$y = f_2(t;\, c_1, c_2, \ldots c_6)$$
$$z = f_3(t;\, c_1, c_2, \ldots c_6),$$

изъ которыхъ произвольныя постоянныя опредѣлятся изъ начальныхъ обстоятельствъ движенія, и найдемъ такимъ образомъ движеніе св. м. т.

Примѣръ. Если сила сохраняетъ постоянную величину и направленіе, т. е.

$$X = A \quad , \; Y = B , \quad Z = C ,$$

то переписавъ дифференціальныя уравненія движенія св. м. точки,

$$mx'' = A \quad , \; my'' = B \; , \quad mz'' = C$$

подъ видомъ:

$$(mx' - At)' = 0 \; , \quad (my' - Bt)' = 0 ,$$

$$(mz' - Ct)' = 0 ,$$

получимъ три первыхъ интеграла:

$$mx' - At = C_1 \; , \quad my' - Bt = C_2$$

$$mz' - Ct = C_3 ,$$

переписавъ которые подъ видомъ:

$$\left(mx - A\frac{t^2}{2} - C_1 t\right)' = 0 \; , \quad \left(my - B\frac{t^2}{2} - C_2 t\right)' = 0$$

$$\left(mz - C\frac{t^2}{2} - C_3 t\right)' = 0$$

получимъ три вторыхъ интеграла:

$$mx - A\frac{t^2}{2} - C_1 t = C_4 \; , \quad my - B\frac{t^2}{2} - C_2 t = C_5 ,$$

$$mz - C\frac{t^2}{2} - C_3 t = C_6 ,$$

изъ которыхъ, зная начальныя обстоятельства движенія, опредѣлимъ самое движеніе св. м. т. подъ дѣйствіемъ постоянной силы.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ общее рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій (*) движенія св. м. т. приводится къ отысканію шести первыхъ интеграловъ этихъ дифференціальныхъ уравненій или трехъ первыхъ интеграловъ и къ отысканію по нимъ трехъ вторыхъ интеграловъ тѣхъ же уравненій.

Методы отысканія первыхъ и вторыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. не входятъ въ программу нашего курса, замѣтимъ только, что этотъ методъ есть методъ, обратный изложенному нами раньше методу рѣшенія тѣхъ же уравненій при помощи рядовъ: тамъ мы, при помощи дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т., отыскивали производныя высшихъ порядковъ отъ координатъ и выражали ихъ при помощи тѣхъ же уравненій черезъ время t, координаты x, y, z и ихъ первыя производныя x', y', z', здѣсь же наоборотъ по даннымъ уравненіямъ движенія св. м. т., заключающимъ вторыя производныя x'', y'', z'' отъ координатъ, мы отыскиваемъ шесть первыхъ интеграловъ, т. е. шесть равенствъ вида:

$$F(t;\ x, y, z;\ x', y', z') = C,$$

не заключающихъ въ себѣ вторыхъ производныхъ отъ координатъ мат. точки, а только — время, сами координаты, ихъ производныя и произвольную постоянную C или, найдя три такихъ равенства, отыскиваемъ по нимъ три вторыхъ интеграла тѣхъ же уравненій, т. е. три равенства вида:

$$\Phi(t;\ x, y, z;\ C_1, C_2, C_3) = C,$$

не заключающихъ въ себѣ вовсе производныхъ отъ координатъ, а — лишь время t, сами координаты (x, y, z) и четыре произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, C_3, C, изъ которыхъ первыя три суть произвольныя постоянныя найденныхъ первыхъ трехъ интеграловъ, а четвертая C — новая произвольная постоянная, причемъ равенство, не заключающее этой новой произвольной постоянной C, хотя и обращающееся тождественно въ нуль на основаніи дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т., не будетъ ихъ вторымъ интеграломъ.

Напримѣръ. При движеніи св. м. т. подъ дѣйствіемъ центральной силы существуютъ, какъ мы доказали, три первыхъ интеграла:

$$m(xy' - yx') = C_3, \quad m(yz' - zy') = C_1,$$
$$m(zx' - xz') = C_2,$$

дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. подъ дѣйствіемъ такой силы, выражающіе законъ площадей въ трехъ плоскостяхъ координатъ, причемъ помноживъ эти равенства соотвѣтственно на x, y, z и сложивъ ихъ, мы придемъ къ равенству:

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0,$$

выражающему то, извѣстное намъ обстоятельство, что траекторія движенія св. м. т. подъ дѣйствіемъ центральной силы будетъ плоская кривая, плоскость которой проходитъ черезъ центръ притяженія или отталкиванія, но это равенство не будетъ однимъ изъ вторыхъ интеграловъ движенія св. м. т. подъ дѣйствіемъ центральной силы, такъ какъ оно не заключаетъ новой произвольной постоянной.

§8. Лагранжевы дифференціальныя уравненія движенія св. м. т.

Вообразимъ какія нибудь три произвольныя функціи времени t и координатъ (x, y, z) движущейся м. точки

$$(*) \quad \begin{cases} q_1 = f_1(t; x, y, z) \\ q_2 = f_2(t; x, y, z) \\ q_3 = f_3(t; x, y, z) \end{cases}$$

Въ такомъ случаѣ, если намъ дано движеніе м.

точки, то ея координаты (x, y, z) будутъ опредѣленными функціями времени t и потому написанныя три величины q_1, q_2, q_3 будутъ тоже нѣкоторыми опредѣленными функціями той же перемѣнной; наоборотъ, если бы намъ были извѣстны эти три функціи времени q_1, q_2, q_3, то рѣшивъ уравненія (*) относительно координатъ (x, y, z), мы пришли бы къ равенствамъ:

$$(**)\begin{cases} x = \varphi_1(t; q_1, q_2, q_3) \\ y = \varphi_2(t; q_1, q_2, q_3) \\ z = \varphi_3(t; q_1, q_2, q_3), \end{cases}$$

опредѣляющимъ движеніе м. т.

Такія три функціи q_1, q_2, q_3 называютъ <u>произвольными параметрами</u>, опредѣляющими движеніе м. т.

Такимъ образомъ, если намъ даны равенства (**), то для опредѣленія движенія св. м. т. достаточно найти выраженія ея параметровъ q_1, q_2, q_3 въ функціи времени t.

Найдемъ, какимъ дифференціальнымъ уравненіямъ должны удовлетворять эти функціи или параметры (q_1, q_2, q_3) при движеніи св. м. т. подъ дѣйствіемъ данной силы.

Помноживъ съ этою цѣлью дифференціальныя уравненія движенія св. м. т.

$$mx'' = \mathfrak{X}, \quad my'' = \mathfrak{Y}, \quad mz'' = \mathfrak{Z}$$

соотвѣтственно на частныя производныя

$$\frac{\partial x}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k},$$

въ которыхъ черезъ q_k мы обозначимъ одинъ изъ параметровъ q_1, q_2, q_3, т. е. $k = 1, 2, 3$, и сложивъ почлен-

но полученныя произведенія, мы придемъ къ тремъ равенствамъ:

$$\mathcal{K}_k = Q_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

въ которыхъ:

$$\mathcal{K}_k = m\left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_k} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_k} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_k}\right)$$

и

$$Q_k = X \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z \frac{\partial z}{\partial q_k},$$

причемъ выраженіе $\mathcal{K}_k$ можетъ быть преобразовано еще слѣдующимъ образомъ:

$$\mathcal{K}_k = m\left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_k} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_k} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_k}\right) =$$

$$= m\left(x' \frac{\partial x}{\partial q_k} + y' \frac{\partial y}{\partial q_k} + z' \frac{\partial z}{\partial q_k}\right)' - m\left[x'\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)' + y'\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)' + z'\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)'\right]$$

но дифференцируя равенства (**), получимъ равенства

$$(***) \begin{cases} x' = \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \dfrac{\partial x}{\partial q_3} q_3', \\ y' = \dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial y}{\partial q_2} q_2' + \dfrac{\partial y}{\partial q_3} q_3', \\ z' = \dfrac{\partial z}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial z}{\partial q_2} q_2' + \dfrac{\partial z}{\partial q_3} q_3', \end{cases}$$

Дифференцируя же равенства (***) последовательно по q_1', q_2', q_3' и т.д.

~~изъ которыхъ~~ убѣждаемся въ справедливости 9 равенствъ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} = \dfrac{\partial x'}{\partial q_1'}, & \dfrac{\partial x}{\partial q_2} = \dfrac{\partial x'}{\partial q_2'}, & \dfrac{\partial x}{\partial q_3} = \dfrac{\partial x'}{\partial q_3'}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial q_1} = \dfrac{\partial y'}{\partial q_1'}, & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} = \dfrac{\partial y'}{\partial q_2'}, & \dfrac{\partial y}{\partial q_3} = \dfrac{\partial y'}{\partial q_3'}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial q_1} = \dfrac{\partial z'}{\partial q_1'}, & \dfrac{\partial z}{\partial q_2} = \dfrac{\partial z'}{\partial q_2'}, & \dfrac{\partial z}{\partial q_3} = \dfrac{\partial z'}{\partial q_3'}, \end{cases}$$

или короче:

$$\frac{\partial x}{\partial q_k} = \frac{\partial x'}{\partial q_k'}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_k} = \frac{\partial y'}{\partial q_k'}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_k} = \frac{\partial z'}{\partial q_k'}.$$

(при $k = 1, 2, 3$);

слѣдовательно:

уменьшаемое въ выраженіи K_k на стр. 70

$$m\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_k} + y'\frac{\partial y}{\partial q_k} + z'\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) =$$

$$= m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_k} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_k} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_k}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial q'_k}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) = \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q'_k} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'_k};$$ см. стр. 59.

кромѣ того изъ равенства:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)' = \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_1}\cdot q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_2} q'_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_3} q'_3 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q'_3\right) = \frac{\partial x'}{\partial q_k}$$ см. стр. 7 (xxx)

и двумъ ему подобныхъ мы убѣдимся въ справедливости 9 равенствъ:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)' = \frac{\partial x'}{\partial q_k}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)' = \frac{\partial y'}{\partial q_k}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)' = \frac{\partial z'}{\partial q_k};$$

$$(k = 1, 2, 3);$$

слѣдовательно

вычитаемое въ выраженіи K_k на стр. 70.

$$m\left[x'\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)' + y'\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)' + z'\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)'\right] =$$

$$= m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_k} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_k} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_k}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)}{\partial q_k} = \frac{\partial \frac{mv^2}{2}}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k}$$

и потому

$$\mathcal{K}_k = \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k},$$

гдѣ $k = 1, 2, 3$.

и

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$$ см. стр. 59

есть кинетическая энергія или живая сила св. м. т., выраженная при помощи равенствъ (**) и (***) въ зависимости отъ времени t, произвольныхъ параметровъ q_1, q_2, q_3 и ихъ первыхъ производныхъ q_1', q_2', q_3'.

Подобнымъ же образомъ выраженіе

$$Q_k = \mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \mathfrak{Y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \mathfrak{Z}\frac{\partial z}{\partial q_k}$$

при помощи тѣхъ же равенствъ (**) и (***) можетъ быть представлено въ функціи тѣхъ же величинъ, такъ какъ проекціи равнодѣйствующей силы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ въ самомъ общемъ случаѣ суть нѣкоторыя функціи времени t, координатъ мат. точки (x, y, z) и ихъ первыхъ производныхъ x', y', z'.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія св. м. т. въ произвольныхъ параметрахъ, называемымъ уравненіями Лагранжа для св. м. т., а именно:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial q_k'}\right)' = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial q_k} + Q_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

въ которыхъ

$$\mathfrak{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

есть кинетическая энергія м. т., выраженная при помощи равенствъ (**) и (***) въ параметрахъ q_1, q_2, q_3 и ихъ первыхъ производныхъ q_1', q_2', q_3'.

Выяснимъ еще значеніе выраженія

$$Q_k = \mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \mathfrak{Y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \mathfrak{Z}\frac{\partial z}{\partial q_k}$$

въ уравненіяхъ Лагранжа.

Это выраженіе очевидно можно представить, какъ геометрическое произведеніе

$$Q_k = \bar{\mathfrak{F}}\bar{\mathfrak{A}}_k = \mathfrak{F}\mathfrak{A}_k \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{A}_k),$$

гдѣ $\bar{\mathfrak{A}}_k$ есть векторъ, котораго проекціи на оси коор-

динатъ выражаются частными производными отъ соотвѣтственныхъ координатъ по параметру q_k, т.е.

$$\mathcal{A}_{k,x} = \frac{\delta x}{\delta q_k}, \quad \mathcal{A}_{k,y} = \frac{\delta y}{\delta q_k}, \quad \mathcal{A}_{k,z} = \frac{\delta z}{\delta q_k}$$

и потому

$$\frac{Q_k}{\mathcal{A}_k} = F \operatorname{Cos}(F, \mathcal{A}_k)$$

есть проекція равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м-т. на направленіе этого вектора $\bar{A}_k$, причемъ

$$\mathcal{A}_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}$$

Обозначивъ теперь черезъ $\overline{\Delta_k S}$ безконечно малый векторъ перемѣщенія м. т., когда измѣняется лишь одинъ параметръ q_k на безконечно малую положительную величину δq_k, мы знаемъ, что проекціи такого вектора $\Delta_k x$, $\Delta_k y$, $\Delta_k z$ на оси координатъ $(O; X, Y, Z)$ будутъ соотвѣтственно эквивалентны произведеніямъ:

$$\frac{\partial x}{\partial q_k}\delta q_k = \delta_k x, \quad \frac{\delta y}{\delta q_k}\delta q_k = \delta_k y, \quad \frac{\partial z}{\partial q_k}\delta q_k = \delta_k z$$

и потому

$$\cos(\mathcal{A}_k, X) = \frac{\mathcal{A}_{k,x}}{\mathcal{A}_k} = \frac{\frac{\delta x}{\delta q_k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\partial q_k}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\delta x}{\partial q_k}\delta q_k}{\sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta q_k}\delta q_k\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\partial q_k}\delta q_k\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\delta q_k\right)^2}} =$$

$$= \frac{\delta_k x}{\sqrt{(\delta_k x)^2 + (\delta_k y)^2 + (\delta_k z)^2}} =$$

$$= \text{Пред.} \frac{\Delta_k x}{\sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2 + (\Delta_k z)^2}} =$$

$$= \text{Пред.} \frac{\Delta_k x}{\Delta_k S};$$

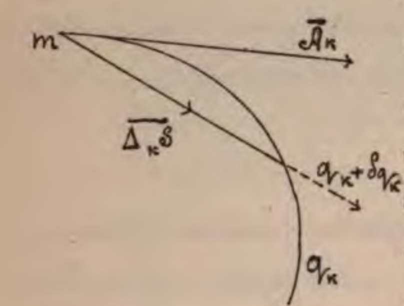
такимъ же образомъ убѣдимся въ справедливости еще

двухъ подобныхъ равенствъ; слѣдовательно:

$$\cos(A_k, X) = \text{Пред}\ \frac{\Delta_k x}{\Delta_k S},\quad \cos(A_k, Y) = \text{Пр.}\ \frac{\Delta_k y}{\Delta_k S},$$

$$\cos(A_k, Z) = \text{Пр.}\ \frac{\Delta_k z}{\Delta_k S},$$

откуда мы приходимъ къ заключенію, что направленіе вектора $\overline{A}_k$, если его отложить отъ матеріальной точки m, совпадаетъ съ предѣльнымъ направленіемъ вектора перемѣщенія $\overline{\Delta_k S}$ этой точки, когда мы будемъ измѣнять лишь одинъ параметръ q_k на безконечно малую положительную величину δq_k; другими словами направленіе такого вектора $\overline{A}_k$ совпадаетъ съ направленіемъ касательной mA_k траекторіи м. т. при положительномъ измѣненіи лишь одного параметра q_k; это направленіе можно назвать осью mA_k параметра q_k въ точкѣ m и потому, раздѣливъ уравненія Лагранжа на величину



$$A_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}$$

мы получимъ три равенства

$$\frac{\left(\frac{\delta H}{\delta q'_k}\right)' - \frac{\delta H}{\delta q_k}}{A_k} = \frac{Q_k}{A_k} = \overline{F} \cos(F, mA_k),$$

выражающія равенство проекцій количества ускоренія св. м. т. m и равнодѣйствующей приложенныхъ къ ней силъ на три оси произвольныхъ параметровъ q_1, q_2, q_3 въ точкѣ m, другими словами выражающимъ въ произвольныхъ параметрахъ основной законъ количества ускоренія св. м. т.

Выяснимъ еще значеніе произведенія

$$Q_k\, \delta q_k.$$

$$Q_k \delta q_k = \mathfrak{X} \frac{\delta x}{\delta q_k} \delta q_k + \mathfrak{Y} \frac{\delta y}{\delta q_k} \delta q_k + \mathfrak{Z} \frac{\delta z}{\delta q_k} \delta q_k =$$

$$= \mathfrak{X} \delta_k x + \mathfrak{Y} \delta_k y + \mathfrak{Z} \delta_k z = \overline{F} \overline{\delta_k S} = \delta_k T(\overline{F})$$

Такимъ образомъ

$$Q_k \delta q_k = \delta_k T(\overline{F}) = F \delta_k S \cos(F, \delta_k S),$$

т.е. произведеніе $Q_k \delta q_k$ эквивалентно воображаемой безконечно малой работѣ

$$F \Delta_k S \cos(F, \Delta_k S) = \Delta_k S T(\overline{F})$$

равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св.м.т. на безконечно маломъ перемѣщеніи мат. точки при измѣненіи лишь одного параметра q_k на безконечно малую величину δq_k.

Если равнодѣйствующая $\overline{F}$ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св.м.т., обладаетъ силовою функціею $\mathfrak{U}(t, x, y, z)$, т.е. такою функціей, что

$$\mathfrak{X} = \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta y}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta z}$$

то

$$Q_k = \mathfrak{X} \frac{\delta x}{\delta q_k} + \mathfrak{Y} \frac{\delta y}{\delta q_k} + \mathfrak{Z} \frac{\delta z}{\delta q_k} =$$

$$= \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta q_k} + \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta q_k} + \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta q_k} =$$

$$= \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta q_k}$$

и три уравненія Лагранжа для св.м.т. примутъ въ такомъ случаѣ такой видъ:

$$\left(\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta q'_k}\right)' = \frac{\delta(\mathcal{K} + \mathfrak{U})}{\delta q_k}, \text{ гдѣ } (k = 1, 2, 3).$$

такого же вида будутъ уравненія Лагранжа для св.м.т., если равнодѣйствующая $\overline{F}$ всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ консервативна, но въ такомъ случаѣ, какъ

мы знаемъ, силовая функція $U(x, y, z)$ не должна зависѣть явно отъ времени t.

§ 9. Дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. въ криволинейныхъ координатахъ.

Если равенства, связывающія параметры (q_1, q_2, q_3) съ ея координатами (x, y, z) не зависятъ явно отъ времени, т. е.

$$(*) \begin{cases} q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z) \\ q_3 = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

и рѣшаются относительно координатъ такъ, что изъ нихъ получаются равенства

$$(**) \quad x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3),$$

$$z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3),$$

то каждому положенію $m(x, y, z)$ мат. точки будутъ соотвѣтствовать три опредѣленныя значенія величинъ (q_1, q_2, q_3), которыя можно вычислить при помощи равенствъ $(*)$ и наоборотъ каждой совокупности величинъ (q_1, q_2, q_3) будетъ соотвѣтствовать опредѣленное положеніе $m(x, y, z)$ м. т., координаты котораго можно вычислить при помощи равенствъ $(**)$.

Такія три величины (q_1, q_2, q_3), опредѣляющія положеніе м. т. въ пространствѣ, называются вообще <u>криволинейными координатами</u> мат. точки.

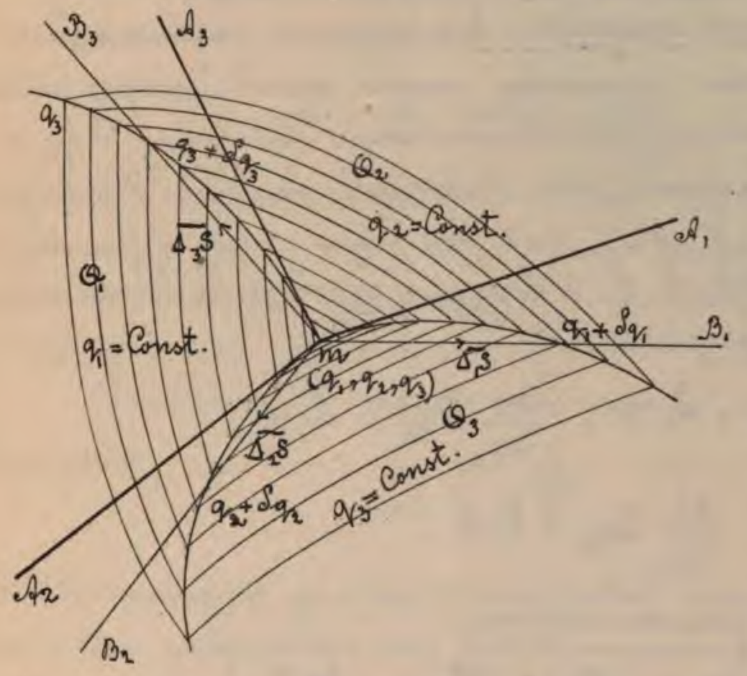
Переписавъ равенства $(*)$ подъ видомъ:

$$f_1(x, y, z) = q_1, \quad f_2(x, y, z) = q_2,$$

$$q_3 = f_3(x, y, z)$$

мы получимъ для каждой совокупности величинъ $(q_1,$

q_2, q_3) три поверхности Q_1, Q_2, Q_3, на которыхъ криволинейныя координаты q_1, q_2, q_3 соотвѣтственно сохраняютъ постоянныя величины. Такія поверхности называютъ поверхностями уровней соотвѣтственныхъ имъ криволинейныхъ координатъ.



Поверхности уровней Q_1, Q_2, Q_3 криволинейныхъ координатъ въ каждой точкѣ m пространства пересѣкаются по нѣкоторымъ кривымъ (Q_2, Q_3), (Q_3, Q_1), (Q_1, Q_2), на которыхъ двѣ изъ криволинейныхъ координатъ остаются постоянными, а одна измѣняется, такія кривыя мы назовемъ линіями уровней двухъ остающихся на нихъ постоянными криволинейныхъ координатъ (q_2, q_3), (q_3, q_1), (q_1, q_2).

Наконецъ направленія касательныхъ mA_1, mA_2, mA_3, проведенныхъ въ данной точкѣ m къ линіямъ уровней двухъ координатъ въ этой точкѣ, въ сторону возрастанія измѣняемой координаты, называютъ осями криволинейныхъ координатъ въ разсматриваемой точкѣ.

Установивъ эти общія понятія, относящіяся къ криволинейнымъ координатамъ, найдемъ углы, составляемые осями криволинейныхъ координатъ въ разсматриваемой точкѣ $m(x, y, z)$ съ осями прямоугольной системы координатъ $(O; X, Y, Z)$; съ этою цѣлью обозначимъ для краткости черезъ q_k, гдѣ $(k=1,2,3)$ одну изъ

криволинейныхъ координатъ (q_1, q_2, q_3) м. точки, а черезъ mA_k — направленіе соотвѣтствующей ей оси; въ такомъ случаѣ, зная, что направленіе касательной mA_k есть предѣльное направленіе секущей mB_k, совпадающей съ безконечно малымъ векторомъ перемѣщенія $\overline{\Delta_k S}$ точки m при измѣненіи лишь одной координаты q_k на безконечно малую положительную величину δq_k, и принимая во вниманіе, что проекціи такого вектора перемѣщенія $\Delta_k x, \Delta_k y, \Delta_k z$ на три прямоугольныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$ будутъ соотвѣтственно эквивалентны произведеніямъ

$$\frac{\partial x}{\partial q_k}\delta q_k = \delta_k x ; \quad \frac{\partial y}{\partial q_k}\delta q_k = \delta_k y ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_k}\delta q_k = \delta_k z ,$$

мы придемъ къ заключенію, что

$$\cos(mA_k, X) = \text{Пред.}\ \frac{\Delta_k x}{\Delta_k S} =$$

$$= \text{Пред.}\ \frac{\Delta_k x}{\sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2 + (\Delta_k z)^2}} = \text{Пр.}\ \frac{\delta_k x}{\sqrt{(\delta_k x)^2 + (\delta_k y)^2 + (\delta_k z)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial x}{\partial q_k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}} ,$$

такимъ же образомъ убѣдимся въ справедливости еще двухъ подобныхъ равенствъ для осей OY и OZ; слѣдовательно:

$$\begin{cases} \cos(mA_k, X) = \frac{\partial x}{\partial q_k} \cdot \frac{1}{A_k} \\ \cos(mA_k, Y) = \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{1}{A_k} \\ \cos(mA_k, Z) = \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{1}{A_k} \end{cases}$$

гдѣ

$$A_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2} .$$

Укажемъ еще на слѣдующее значеніе величины $\mathcal{A}_k$.

$$\mathcal{A}_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\delta_k x)^2 + (\delta_k y)^2 + (\delta_k z)^2}}{\delta q_k} = \text{Пр.} \frac{\Delta_k S}{\delta q_k},$$

т. е.

$$\mathcal{A}_k = \text{Пр.} \frac{\Delta_k S}{\Delta q_k}.$$

есть предѣлъ отношенія вектора перемѣщенія м. т. $\overline{\Delta_k S}$ при измѣненіи лишь одной координаты q_k на безконечно малую величину δq_k къ самому этому безконечно малому измѣненію δq_k этой координаты.

Проектируя теперь обѣ части геометрическаго равенства

$$m\overline{u} = \overline{F},$$

выражающаго законъ количества ускоренія св. м. т. на три указанныя оси криволинейныхъ координатъ, мы придемъ къ тремъ равенствамъ вида:

$$mu \operatorname{Cos}(u, m\mathcal{A}_k) = F \cos(F, m\mathcal{A}_k) =$$

$$= F_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

гдѣ для краткости черезъ F_k мы обозначили проекцію равнодѣйствующей F на направленіе оси $m\mathcal{A}_k$, причемъ

$$mu \operatorname{Cos}(u, m\mathcal{A}_k) = m[x'' \cos(\mathfrak{X}, m\mathcal{A}_k) +$$

$$+ y'' \cos(\mathfrak{Y}, m\mathcal{A}_k) + z'' \operatorname{Cos}(\mathfrak{Z}, m\mathcal{A}_k)] =$$

$$= \frac{m}{\mathcal{A}_k} \cdot \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_k} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_k} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = \frac{\mathcal{K}_k}{\mathcal{A}_k},$$

гдѣ

$$\mathcal{K}_k = m\left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_k} y'' + z'' \frac{\partial z}{\partial q_k}\right).$$

Но въ предыдущемъ § мы доказали, что

$$\mathcal{K}_k = \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k},$$

гдѣ

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$$

есть кинетическая энергія м. т. выраженная въ криволинейныхъ координатахъ q_1, q_2, q_3 и ихъ производныхъ q'_1, q'_2, q'_3.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія св. м. т. въ криволинейныхъ координатахъ:

$$\frac{1}{A_k}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k}\right] = F_k$$

гдѣ

$$A_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2},$$

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2}$$

и

$$k = 1, 2, 3,$$

въ которыхъ лѣвыя части, дѣленныя на массу m м. т., т. е. выраженія

$$\frac{1}{mA_k}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k}\right] = \frac{1}{m}F_k = \mathcal{U}\,\mathrm{Cos}(u, mA_k)$$

будутъ соотвѣтственно проекціями ускоренія св. м. т. на три оси криволинейныхъ координатъ.

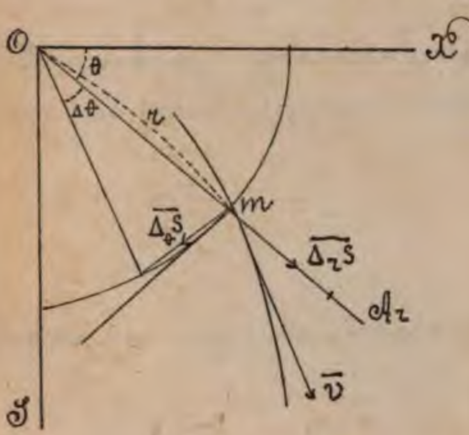
Примѣры.

1). <u>Дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. на плоскости, выраженныя въ полярныхъ координатахъ.</u>

Полярными координатами (r, θ) м. т. на плоскости называются радіусъ векторъ $om = r$ м. т.

и уголъ наклоненія θ этого радіуса вектора къ оси OX, называемый аргументомъ.

Полагая $r = const.$, получимъ линію уровня этой координаты r; эта линія будетъ окружность, описанная радіусомъ r изъ полюса O; подобнымъ же образомъ полагая $\theta = const.$, получимъ линію уровня координаты θ; эта линія будетъ прямою, проходящею черезъ точку m и полюсъ O.



Оси mA_r и mA_θ полярныхъ координатъ r и θ, будучи направлены по касательнымъ къ траекторіямъ, описываемымъ м. т., когда измѣняется лишь одинъ изъ этихъ параметровъ и притомъ въ сторону возрастанія параметра, имѣютъ слѣдующія направленія: ось mA_r по продолженію радіуса вектора мат. точки, а ось mA_θ по перпендикуляру къ этому радіусу вектору и притомъ въ сторону возрастанія угла θ.

Равенства, связывающія полярныя координаты мат. точки (r, θ) съ ея прямоугольными координатами (x, y), какъ видно изъ чертежа, будутъ:

$$x = r\cos\theta \quad , y = r\sin\theta ;$$

слѣдовательно

$$A_r = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta r}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta r}\right)^2} = 1$$

и

$$A_\theta = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta\theta}\right)^2} = r,$$

что и непосредственно видно, ибо

$$A_r = \text{Пред.}\ \frac{\Delta_r s}{\Delta r} = \text{Пред.}\ \frac{\Delta r}{\Delta r} = 1$$

и

$$A_\theta = \text{Пред.}\ \frac{\Delta_\theta s}{\Delta\theta} = \text{Пред.}\ r\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta} = r$$

Для составленія дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. въ полярныхъ координатахъ выразимъ еще кинетическую энергію

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

матеріальной точки въ полярныхъ координатахъ и ихъ производныхъ

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2)$$

Последнее выраженіе для K и непосредственно очевидно (см. Кинем. стр. 136) откуда получимъ

$$\frac{1}{A_r}\left[\left(\frac{\delta K}{\delta r'}\right)' - \frac{\delta K}{\delta r}\right] = m(r'' - r\theta'^2) = F_r'$$

$$\frac{1}{A_\theta}\left[\left(\frac{\delta K}{\delta\theta'}\right)' - \frac{\delta K}{\delta\theta}\right] = \frac{m}{r}(r^2\theta')' = F_\theta$$

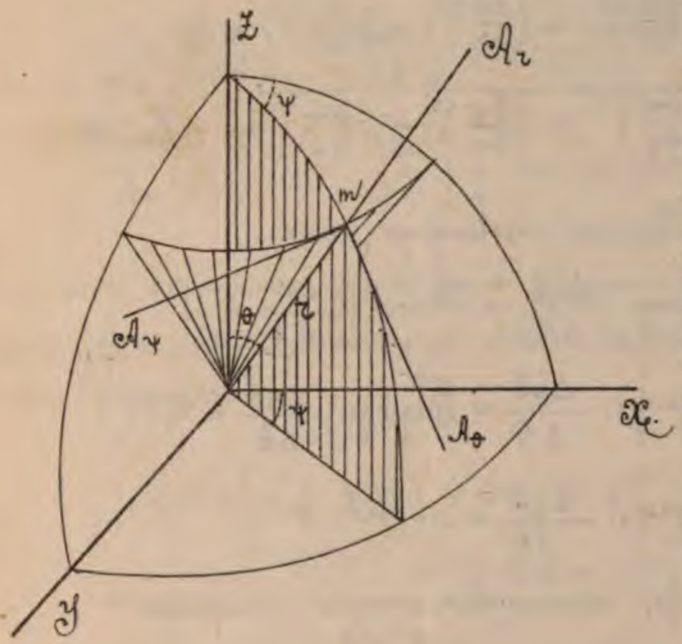
т. е.

$$m(r'' - r\theta'^2) = F_r \quad \text{и} \quad \frac{m(r^2\theta')'}{r} = F_\theta'$$

гдѣ черезъ $\overline{F}_r'$ и $\overline{F}_\theta'$ мы обозначили для краткости проекціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. на оси полярныхъ координатъ mA_r и mA_θ.

2. Дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. въ пространствѣ, выраженныя въ полярныхъ координатахъ.

Полярными координатами (r, θ, ψ) матеріальной точки въ пространствѣ называютъ радіусъ векторъ $om = r$ мат. точки, уголъ θ, составляемый радіусомъ векторомъ съ вертикальною осью OZ, и уголъ ψ, составляемый подвижною вертикальною плоскостью, проходящею черезъ ось OZ и точку m, съ нѣкоторою неподвижною вертикальною плоскостью XOZ, проходящею черезъ ту же ось OZ.



Полагая

$$r = Const, \quad \theta = const$$

$$\psi = Const.,$$

получимъ поверхности уровней полярныхъ координатъ: шаровую поверхность ($r = Const$), коническую ($\theta = Const$) и вертикальную плоскость ($\psi = Const$).

Измѣняя лишь одну изъ координатъ

$$r, \theta, \psi,$$

а двѣ другія оставляя постоянными, получимъ линіи уровней двухъ координатъ и касательныя къ нимъ mA_r, mA_θ, mA_ψ будутъ осями координатъ.

Равенства, связывающія полярныя координаты (r, θ, ψ) мат. точки съ ея прямоугольными координа-

$$\mathcal{A}_\theta = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta\theta}\right)^2} = r,$$

что и непосредственно видно, ибо

$$\mathcal{A}_r = \text{Пред.}\ \frac{\Delta_r s}{\Delta r} = \text{Пред.}\ \frac{\Delta r}{\Delta r} = 1$$

и

$$\mathcal{A}_\theta = \text{Пред.}\ \frac{\Delta_\theta s}{\Delta\theta} = \text{Пред.}\ r\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta} = r$$

Для составленія дифференціальныхъ уравненій движенія св. м. т. въ полярныхъ координатахъ выразимъ еще кинетическую энергію

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2}$$

матеріальной точки въ полярныхъ координатахъ и ихъ производныхъ

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2)$$

Послѣднее выраженіе для $\mathcal{K}$ и непосредственно очевидно (см. Кинем. стр. 136) откуда получимъ

$$\frac{1}{\mathcal{A}_r}\left[\left(\frac{\delta\mathcal{K}}{\delta r'}\right)' - \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta r}\right] = m(r'' - r\theta'^2) = F_r'$$

$$\frac{1}{\mathcal{A}_\theta}\left[\left(\frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\theta'}\right)' - \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\theta}\right] = \frac{m}{r}(r^2\theta')' = F_\theta'$$

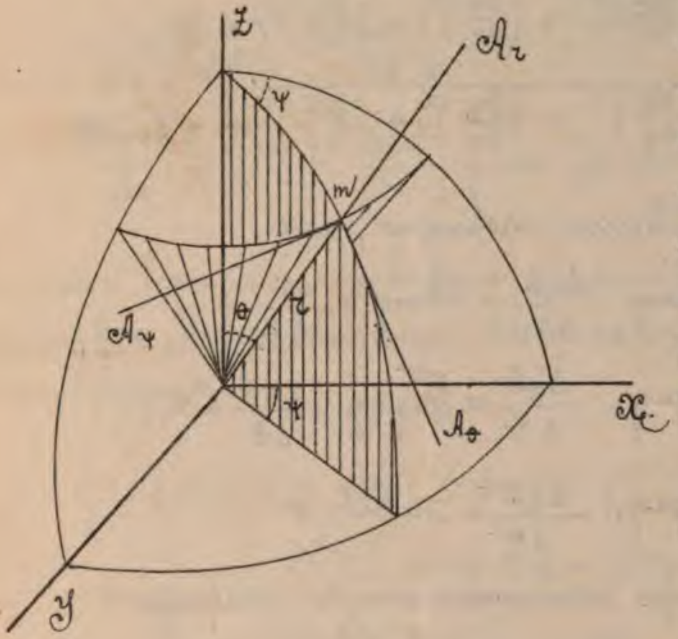
т. е.

$$m(r'' - r\theta'^2) = F_r \quad \text{и} \quad \frac{m(r^2\theta')'}{r} = F_\theta'$$

гдѣ черезъ $\overline{F}_r'$ и $\overline{F}_\theta'$ мы обозначили для краткости проекціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. на оси полярныхъ координатъ $m\mathcal{A}_r$ и $m\mathcal{A}_\theta$.

2. Дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. въ пространствѣ, выраженныя въ полярныхъ координатахъ.

Полярными координатами (r, θ, ψ) матеріальной точки въ пространствѣ называютъ радіусъ векторъ $om = r$ мат. точки, уголъ θ, составляемый радіусомъ векторомъ съ вертикальною осью Oz, и уголъ ψ, составляемый подвижною вертикальною плоскостью, проходящею черезъ ось Oz и точку m, съ нѣкоторою неподвижною вертикальною плоскостью XOZ, проходящею черезъ ту же ось OZ.



Полагая

$$r = Const, \quad \theta = const$$

$$\psi = Const.,$$

получимъ поверхности уровней полярныхъ координатъ: шаровую поверхность $(r = Const)$, коническую $(\theta = Const)$ и вертикальную плоскость $(\psi = Const)$.

Измѣняя лишь одну изъ координатъ

$$r, \theta, \psi,$$

а двѣ другія оставляя постоянными, получимъ линіи уровней двухъ координатъ и касательныя къ нимъ mA_r, mA_θ, mA_ψ будутъ осями координатъ.

Равенства, связывающія полярныя координаты (r, θ, ψ) мат. точки съ ея прямоугольными координа-

тами (x, y, z), какъ видно изъ чертежа, будутъ:

$$x = r \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\psi \quad , \; y = r \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi$$

$$z = r \operatorname{Cos}\theta,$$

изъ которыхъ получимъ

$$A_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$A_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$A_\psi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2} = r \operatorname{Sin}\theta,$$

что и непосредственно очевидно, ибо

$$A_r = \text{Пред.} \frac{\Delta_r S}{\Delta r} = \text{Пред} \frac{\Delta r}{\Delta r} = 1$$

$$A_\theta = \text{Пред.} \frac{\Delta_\theta S}{\Delta \theta} = \text{Пред.} \frac{r \Delta \theta}{\Delta \theta} = r,$$

$$A_\psi = \text{Пред.} \frac{\Delta_\psi S}{\Delta \psi} = r \operatorname{Sin}\theta$$

Выразимъ теперь кинетическую энергію

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

мат. точки въ полярныхъ координатахъ

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) = \frac{m}{2}\left(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \operatorname{Sin}^2\theta\, \psi'^2\right)$$

что тоже непосредственно очевидно, такъ какъ на скорость мат. точки можно смотрѣть, какъ на скорость составного движенія изъ относительнаго движенія мат. точки по прямой A_r, изъ движенія этой прямой въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось OZ и мат. точку, и изъ дви-

женія этой вертикальной плоскости вокругъ оси Oz, слѣдовательно

$$\bar{v} = \bar{r}' + \overline{r\theta'} + r \sin\theta\, \psi'$$

$$A_r \qquad A_\theta \qquad A_\psi$$

Изъ найденнаго выраженія для K получимъ:

$$\frac{1}{A_r}\left[\left(\frac{\delta K}{\delta r'}\right)' - \frac{\delta K}{\delta r}\right] = m\left[r'' - r\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\, \psi'^2\right)\right] = F'_r$$

$$\frac{1}{A_\theta}\left[\left(\frac{\delta K}{\delta \theta'}\right)' - \frac{\delta K}{\delta \theta}\right] = m\left[\frac{(r^2\theta')'}{r} - r \sin\theta \cos\theta\, \psi'^2\right] = F'_\theta$$

$$\frac{1}{A_\psi}\left[\left(\frac{\delta K}{\delta \psi'}\right)' - \frac{\delta K}{\delta \psi}\right] = m\, \frac{(r^2 \sin^2\theta\, \psi')'}{r \sin\theta} = F'_\psi$$

Такимъ образомъ уравненія движенія св. м. т. въ пространствѣ, выраженныя въ полярныхъ координатахъ, будутъ:

$$\begin{cases} m\left[r'' - r\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\, \psi'^2\right)\right] = F'_r, \\ m\left[\dfrac{(r^2\theta')'}{r} - \dfrac{1}{2} r \sin 2\theta\, \psi'^2\right] = F'_\theta, \\ m\, \dfrac{(r^2 \sin^2\theta\, \psi')'}{r\sin\theta} = F'_\psi, \end{cases}$$

гдѣ черезъ F'_r, F'_θ, F'_ψ мы обозначили для краткости проекціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., на оси полярныхъ координатъ mA_r, mA_θ, mA_ψ.

§10. Начало Даламбера для св. мат. точки.

Геометрическое равенство, выражающее общій законъ количества ускоренія св. м. т., можно переписать еще подъ видомъ

$$\bar{F} - m\bar{u} = 0 \text{ или } \bar{F}' + (-m\bar{u}) = 0$$

Силу

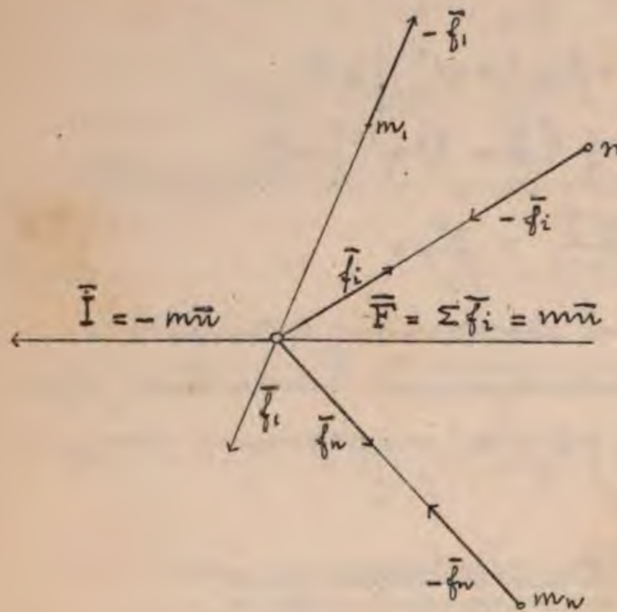
$$\bar{I} = -m\bar{u},$$

равную, но прямо противоположную количеству ускорения $m\bar{u}$ мат. точки, называютъ силою инерціи мат. точки, причемъ силу инерціи мат. точки считаютъ не приложенною къ мат. точкѣ, а исходящею изъ нея.

Чтобы уяснить это понятіе, припомнимъ, что по основному началу взаимодѣйствія на всякую силу $\bar{F}$, приложенную къ матеріальной точкѣ, мы должны смотрѣть, какъ на равнодѣйствующую приложенныхъ къ ней силъ $\bar{f}_i$, исходящихъ изъ дѣйствующихъ на мат. точку, окружающихъ ее мат. точекъ m_i; такимъ образомъ

$$\bar{F} = \Sigma \bar{f}_i,$$

но по тому же основному началу, если мат. точка m_i дѣйствуетъ на мат. точку m съ силою $\bar{f}_i$, то мат. точка m будетъ въ свою очередь дѣйствовать на каждую такую точку m_i съ силою $-\bar{f}_i$, равною и прямопротивоположною силѣ $\bar{f}_i$; причемъ геометрическую сумму $\Sigma(-\bar{f}_i)$ всѣхъ этихъ силъ воздѣйствія мат. точки m на дѣйствующія на нее мат. точки m_i и называютъ



силою инерціи $\bar{I}$ данной мат. точки; слѣдовательно

$$\bar{I} = \Sigma(-\bar{f}_i) = -\Sigma \bar{f}_i = -\bar{F} = -m\bar{u}.$$

Итакъ сила инерціи мат. точки

$$\bar{I} = -m\bar{u}$$

равна и прямопротивоположна количеству ~~движенія~~ ускоренія $m\bar{u}$ м. т., но не приложена къ м. т., а исходитъ изъ нея.

Примѣчаніе. Сила инерціи есть понятіе вполнѣ реальное: когда мы бросаемъ рукою камень, то сила инерціи камня оказываетъ давленіе на руку; пароходъ движется на водѣ, благодаря силамъ инерціи частицъ воды, отталкиваемыхъ лопастями винта, ибо съ какими силами лопасти винта отталкиваютъ частицы воды, съ такими же, но прямопротивоположными силами инерціи частицы воды дѣйствуютъ на лопасти винта, ось котораго связана съ пароходомъ и потому пароходъ приходитъ въ движеніе вслѣдствіе силъ инерціи частицъ воды, но силу инерціи мат. точки не слѣдуетъ смѣшивать со свойствомъ инерціи мат. точки, составляющимъ первое изъ основныхъ началъ кинетики, тогда какъ сила инерціи есть слѣдствіе четвертаго основного закона кинетики: „начала взаимодѣйствія".

Введя понятіе о силѣ инерціи мат. точки

$$\bar{I} = -m\bar{u},$$

мы можемъ переписать равенство

$$m\bar{u} = \bar{F},$$

выражающее общій законъ количества ускоренія св. м. т. подъ видомъ:

$$\bar{F} + \bar{I} = 0 \quad \ldots\ldots (*)$$

и дать ему слѣдующее толкованіе: при движеніи св. м. т. равнодѣйствующая

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

~~въ~~ приложенныхъ къ ней силъ и ея сила инерціи $\overline{I} = -m\overline{u}$, если эту послѣднюю фиктивно приложить къ самой мат. точкѣ, взаимно уравновѣшиваются, т.е. если вообразить св. м. т. въ данный моментъ ~~въ покоѣ~~ и фиктивно приложить къ ней кромѣ дѣйствующихъ на нее силъ, еще ея силу инерціи

$$\overline{I} = -m\overline{u},$$

то мат. точка останется въ покоѣ.

Въ ~~самомъ~~ такомъ толкованіи написаннаго геометрическаго равенства (*) и состоитъ, такъ называемое, начало Даламбера для св. м. т., равносильное закону количества ускоренія св. м. т. и приводящее вопросъ о движеніи м. точки, т. е. вопросы динамики къ вопросамъ статики, причемъ фикція здѣсь заключается не въ понятіи о силѣ инерціи мат. т., а въ приложеніи этой силы къ самой мат. точкѣ, тогда какъ ~~эта~~ сила исходитъ изъ нея.

Итакъ, мы можемъ высказать слѣдующее начало Даламбера для св. м. т.

При движеніи св. м. т. приложенныя къ ней силы и ея сила инерціи, если эту послѣднюю фиктивно приложить къ самой мат. точкѣ, взаимно уравновѣшиваются; другими словами, если вообразить св. м. т. въ данный моментъ въ покоѣ и къ дѣйствующимъ на нее въ этотъ моментъ силамъ фиктивно присоединить ея силу инерціи

$$\overline{I} = -m\overline{u},$$

то мат. точка останется въ покоѣ, что и вы-

ражается равенствомъ

$$\overline{F} + \overline{I} = 0, \ldots\ldots (*)$$

равносильнымъ равенству:

$$m\overline{u} = \overline{F},$$

выражающему общій законъ количества ускоренія св. м. т.

Выразивъ наконецъ равенство (*) аналитически въ проекціяхъ на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O; x, y, z), мы получимъ три равенства:

$$X + \dot{I}_x = 0 \quad , \quad Y + \dot{I}_y = 0$$

$$Z + \dot{I}_z = 0,$$

равносильныя дифференціальнымъ уравненіямъ движенія св. м. т.

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z,$$

ибо

$$I_x = -mx'', \quad I_y = -my'', \quad I_z = -mz''$$

§11. Начало виртуальной работы для св. м. т. и равенство Лагранжа для св. м. т.

Вообразимъ при движеніи св. м. т. ~~нѣкоторое~~ (произвольное), безконечно малое ея отклоненіе δS отъ ея дѣйствительнаго положенія въ данный моментъ; такое отклоненіе для краткости мы будемъ называть виртуальнымъ отклоненіемъ мат. точки и воображаемую работу приложенныхъ къ ней силъ на такомъ отклоненіи — виртуальною работою этихъ силъ.

Помноживъ обѣ части геометрическаго равенства

$$\overline{F} + \overline{I} = 0 \ldots\ldots (*),$$

выражающаго Начало Даламбера для св. м. точки

геометрически на $\delta\bar{s}$ мы придемъ къ равенству:

$$(\bar{F}+\bar{I})\delta\bar{s}=0\;\ldots\ldots(^{**}),$$

равносильному равенству (*), ибо при произвольности направленія $\delta\bar{s}$, такое равенство возможно лишь при условіи, что

$$\bar{F}+\bar{I}=0$$

Равенство (**) мы назовемъ „Началомъ виртуальной работы для св. м. т." и формулируемъ его слѣдующимъ образомъ:

При движеніи св. м. т. виртуальная работа равнодѣйствующей

$$\bar{F}=\Sigma\bar{F}_i$$

всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., и ея силы инерціи

$$\bar{I}=-m\bar{u},$$

фиктивно приложенной къ ней, равна нулю, что и выражается равенствами

$$(\bar{F}+\bar{I})\delta\bar{s}=\bar{F}\delta\bar{s}+\bar{I}\delta\bar{s}=0\;\ldots\ldots(^{**})$$

Это начало въ приложеніяхъ особенно удобно въ его аналитической формулировкѣ, данной Лагранжемъ.

Обозначивъ черезъ X, Y, Z; $\delta x, \delta y, \delta z$ соотвѣтственно проекціи равнодѣйствующей

$$\bar{F}=\Sigma\bar{F}_i$$

всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т., и проекціи виртуальнаго отклоненія $\delta\bar{s}$ мат. точки на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$, мы знаемъ, что равенство (**) аналитически можетъ быть выражено (см. Введеніе. Аналитическое выраженіе геометрическаго произведенія двухъ векторовъ) равенствомъ:

$$(\mathfrak{X} - mx'')\delta x + (\mathfrak{Y} - my'')\delta y + (\mathfrak{Z} - mz'')\delta z = 0 \; ..... \; (***),$$

которое было дано Лагранжемъ, и потому мы назовемъ равенствомъ Лагранжа для св. м. т.

Такимъ образомъ, равенство Лагранжа для св. м. т (***) есть ~~аналитическое~~ выраженіе начала виртуальной работы для св. м. т.

Изъ равенства Лагранжа для св. м. т. можно получить дифференціальныя уравненія движенія св. м. т. въ прямоугольной неподвижной системѣ координатъ $(O, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ и наоборотъ.

Дѣйствительно, такъ какъ проекціи $\delta x, \delta y, \delta z$ виртуальнаго отклоненія $\delta \mathfrak{S}$ мат. точки или, какъ еще называютъ, варіаціи координатъ м. т. суть вполнѣ произвольныя безконечно малыя величины, то равенство Лагранжа (***) можетъ быть удовлетворено только при условіи равенства въ немъ нулю коэффиціентовъ при этихъ произвольныхъ безк. малыхъ величинахъ $\delta x, \delta y, \delta z$, что приводитъ насъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія св. м. т.

$$mx'' = \mathfrak{X}, \quad my'' = \mathfrak{Y}, \quad mz'' = \mathfrak{Z}$$

и наоборотъ, помноживъ эти дифференціальныя уравненія соотвѣтственно на произвольныя варіаціи координатъ м. т. $\delta x, \delta y, \delta z$, мы придемъ къ равенству Лагранжа.

Подобнымъ же образомъ изъ равенства Лагранжа (***) могутъ быть получены диф. ур.—нія Лагранжа для движенія св. м. т., выраженныя въ произвольныхъ параметрахъ q_1, q_2, q_3.

Дѣйствительно, положивъ

$$x = f_1(t; q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(t; q_1, q_2, q_3)$$

$$z = f_3(t; q_1, q_2, q_3)$$

гдѣ f_1, f_2, f_3 суть нѣкоторыя данныя функціи времени t и параметровъ q_1, q_2, q_3, дадимъ этимъ параметрамъ въ данный моментъ соотвѣтственно безконечно малыя приращенія $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$; въ такомъ случаѣ координаты (x, y, z) матеріальной точки получатъ нѣкоторыя безконечно малыя приращенія соотвѣтственно эквивалентныя выраженіямъ:

$$\begin{cases} \delta x = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \dfrac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3 \\ \delta y = \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \dfrac{\partial y}{\partial q_3}\delta q_3 \\ \delta z = \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \dfrac{\partial z}{\partial q_3}\delta q_3 \end{cases}$$

Вообразимъ теперь виртуальныя отклоненія $\delta\bar{s}$ св. м. т., проекціи которыхъ $\delta x, \delta y, \delta z$ выражаются написанными равенствами, и подставивъ эти выраженія въ равенство Лагранжа (***)

$$(\mathfrak{X} - mx'')\,\delta x + (\mathfrak{Y} - my'')\,\delta y + (\mathfrak{Z} - mz'')\,\delta z = 0,$$

отберемъ въ немъ всѣ члены, заключающіе общихъ множителей $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$, тогда мы придемъ къ равенству:

$$(\Theta_1 - \mathfrak{K}_1)\,\delta q_1 + (\Theta_2 - \mathfrak{K}_2)\,\delta q_2 + (\Theta_3 - \mathfrak{K}_3)\,\delta q_3 = 0$$

или короче:

$$\Sigma\,(\Theta_k - \mathfrak{K}_k)\,\delta q_k = 0,$$

гдѣ

$$\Theta_k = \mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \mathfrak{Y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \mathfrak{Z}\frac{\partial z}{\partial q_k},$$

$$\mathfrak{K}_k = m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_k} + y''\frac{\partial y}{\partial q_k} + z''\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)$$

$$k = 1, 2, 3.$$

причемъ такъ какъ написанныя равенства остаются справедливыми при всевозможныхъ значеніяхъ безконечно малыхъ величинъ $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$, то необходимо:

$$Q_1 - K_1 = 0, \; Q_2 - K_2 = 0, \; Q_3 - K_3 = 0$$

или короче

$$K_k = Q_k,$$

$$\text{гдѣ } k = 1, 2, 3.$$

Преобразовавъ наконецъ выраженіе K_k подобно тому, какъ это было сдѣлано для того же выраженія въ §8, мы убѣдимся, что

$$K_k = \left(\frac{\partial K}{\partial q'_k}\right)' + \frac{\partial K}{\partial q_k},$$

гдѣ $k = 1, 2, 3$ и

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

есть кинетическая энергія своб. мат. точки, выраженная въ параметрахъ q_1, q_2, q_3 и ихъ производныхъ q'_1, q'_2, q'_3, и придемъ къ уравненіямъ Лагранжа для св. мат. точки.

$$\left(\frac{\partial K}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k, \quad \text{гдѣ } k = 1, 2, 3,$$

выведеннымъ нами въ §8.

III. Динамика несвободной матеріальной точки.

§1. Принципъ освобожденія отъ связей. Реакція связи. Давленіе несв. мат. т. на связь.

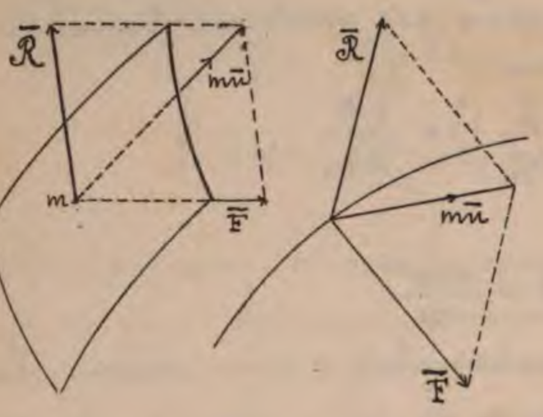
Несвободною м. т. называется такая мат. т., перемѣщенія которой ограничены нѣкоторыми условіями; напр. мат. точка должна оставаться на нѣкоторой поверхности или линіи. Всякое ограниченіе

св. м. т. будемъ называть связью.

Принципъ освобожденія отъ связей.

На всякое движеніе несв. м. т. можно смотрѣть, какъ на движеніе св. м. т., если къ дѣйствующимъ на нее силамъ присоединить силу, замѣняющую собою присутствіе связи, называемую реакціей этой связи.

Дѣйствительно, положимъ, что къ несв. м. т. m приложены силы, равнодѣйствующая которыхъ есть $\overline{F}$; если бы м. т. была свободна, то по закону количества ускоренія для св. м. т. она получила бы ускореніе $\frac{\overline{F}}{m}$, если же м. т. не свободна, то можетъ случиться, что такое ускореніе $\frac{\overline{F}}{m}$ не будетъ совмѣстимо со связью и м. точка подъ дѣйствіемъ той же равнодѣйствующей силы $\overline{F}$ пріобрѣтетъ нѣкоторое другое ускореніе $\overline{u}$, совмѣстимое со связью, которое въ такомъ случаѣ всегда можно представить подъ видомъ



$$\overline{u} = \frac{\overline{F}}{m} + \frac{\overline{R}}{m},$$

гдѣ R есть нѣкоторая добавочная сила.

Переписавъ наконецъ послѣднее геометрическое равенство подъ видомъ

$$m\overline{u} = \overline{F} + \overline{R}$$

мы убѣждаемся, что м. т., будучи свободна, пріобрѣтаетъ при совмѣстномъ дѣйствіи этихъ двухъ силъ $\overline{F}$ и $\overline{R}$ тоже ускореніе $\overline{u}$, какое она пріобрѣтаетъ, будучи несвободна, подъ дѣйствіемъ одной силы $\overline{F}$.

Такая добавочная сила $\overline{\mathcal{R}}$, замѣняющая собою присутствіе данной связи, называется реакціей этой связи.

Итакъ, присутствіе всякой связи при движеніи несв. м. т. всегда можно замѣнить нѣкоторою силой, называемою реакціей этой связи и смотрѣть на несв. м. т., какъ на свободную, въ чемъ и заключается высказанный нами „принципъ освобожденія отъ связей."

Если движеніе несвоб. м. т. дано, то реакція связи опредѣлится изъ геометрическаго равенства:

$$\overline{\mathcal{R}} = m\overline{u} - \overline{F}.$$

Силу, геометрически равную количеству ускоренія $m\overline{u}$ несв. м. т., т. е. сообщающую м. т., если бы она была свободна, то же ускореніе $\overline{u}$, какое она имѣетъ въ данный моментъ при несвободномъ состояніи, называютъ движущею силою несв. м. т., причемъ такъ какъ

$$\overline{u} = \overline{u}_v + \overline{u}_\varsigma ,$$

то

$$m\overline{u} = m\overline{u}_v + m\overline{u}_\varsigma ,$$

гдѣ

$$\overline{u}_v = \overline{v}' \text{ и } \overline{u}_\varsigma = \frac{v^2}{\varsigma},$$

т. е. движущая сила несв. м. т. разлагается на касательную движущую силу

$$m\overline{u}_v = mv'$$

и центростремительную движущую силу

$$mu_\varsigma = m\frac{v^2}{\varsigma}$$

Но, по началу равенства дѣйствія и противодѣйствія, если связь дѣйствуетъ на несв. м. т. съ силою $\overline{\mathcal{R}}$, то м. т. въ свою очередь будетъ дѣйствовать на

связь съ силою

$$\bar{\mathcal{P}} = -\bar{R} = \bar{F} - m\bar{u} = \bar{F} + \bar{I},$$

называемого давленіемъ несв. м. т. на связь, гдѣ черезъ

$$\bar{I} = -m\bar{u}$$

мы обозначили силу инерціи несв. м. т.

Итакъ давленіе несв. мат. точки на связь всегда равно геометрической суммѣ равнодѣйствующей всѣхъ силъ непосредственно приложенныхъ къ несв. м. т. и ея силы инерціи $\bar{I} = -m\bar{u}$, т. е.

$$\bar{\mathcal{P}} = -\bar{R} = \bar{F} + \bar{I}.$$

Сила инерціи:

$$\bar{I} = -m\bar{u} = -m(\bar{u}_v + \bar{u}_\rho) = -m\bar{u}_v - m\bar{u}_\rho = \bar{I}_v + \bar{I}_\rho$$

разлагается въ свою очередь на касательную и нормальную силы инерціи:

$$\bar{I}_v = -m\bar{u}_v = -mv' \quad \text{и} \quad \bar{I}_\rho = -m\bar{u}_\rho = -m\frac{v^2}{\rho},$$

причемъ нормальную силу инерціи

$$\bar{I}_\rho = -\frac{mv^2}{\rho}$$

называютъ еще центробѣжною силою, такъ какъ она направлена по главной нормали къ траекторіи несв. м. т. въ сторону, противоположную радіусу кривизны траекторіи въ разсматриваемой точкѣ.

1). Давленіе несв. м. т. при движеніи по идеально гладкой неподвижной поверхности.

Идеально гладкая поверхность можетъ оказывать лишь нормальную къ ней реакцію $\bar{R}$ и потому давленіе

$$\bar{\mathfrak{P}} = -\bar{\mathfrak{R}}$$

несв. матеріальной точки на идеально гладкую поверхность должна быть направлено по нормали къ поверхности въ разсматриваемой точкѣ, причемъ

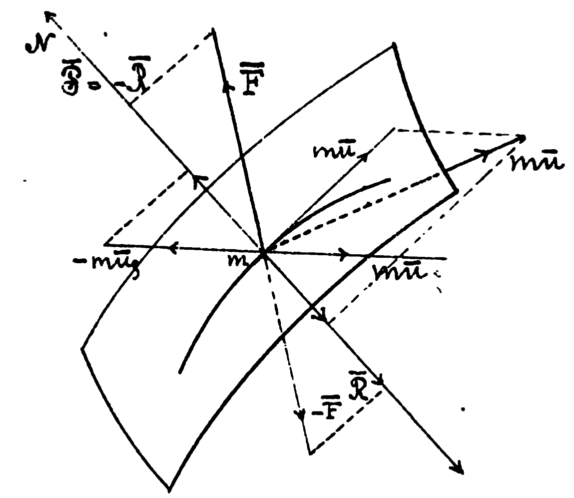
$$\bar{\mathfrak{P}} = -\bar{\mathfrak{R}} = \bar{F} + \bar{I} = \bar{F} - m\bar{u} =$$

$$= \bar{F} - m(\bar{u}_v + \bar{u}_\varsigma),$$

т.е.

$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{F} - m\bar{u}_v - m\bar{u}_\varsigma ;$$

и потому, спроектировавъ обѣ части послѣдняго геометрическаго равенства на нормаль N къ поверхности въ разсматриваемой точкѣ и принявъ во вниманіе, что



$$(\bar{u}_v)_N = 0,$$

получимъ:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_N = F_N - (m\bar{u}_\varsigma)_N =$$

$$= F_N - \left(\frac{\overline{mv^2}}{\varsigma}\right)_N ,$$

такъ какъ давленіе $\mathfrak{P}$ несв. м. т., будучи нормально къ поверхности, проектируется на направленіе N въ натуральную величину.

Итакъ, давленіе несв. м. т. на идеально гладкую поверхность составляется изъ проекціи $\bar{F}_N$ равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т. на нормаль къ поверхности въ разсматриваемой точкѣ и изъ проекціи $\left(-\frac{mv^2}{\varsigma}\right)_N$ на то же направленіе центробѣжной

силы несв. м. т.

2) Давленіе несв. м. т. при движеніи по идеально гладкой неподвижной линіи.

Такъ какъ идеально гладкая линія можетъ оказывать лишь нормальныя къ ней реакціи $\bar{R}$, то давленіе

$$\bar{P} = -\bar{R}$$

несв. м. т. на идеально гладкую кривую должно быть тоже нормально къ этой линіи, т. е. должно лежать въ плоскости N, нормальной къ кривой въ разсматриваемой точкѣ.

Проектируя обѣ части геометрическихъ равенствъ

$$\bar{P} = -\bar{R} = \bar{F} + \bar{I} = \bar{F} - m\bar{w}_v - m\bar{w}_\rho$$

на плоскость N, нормальную къ кривой въ разсматриваемой точкѣ, и принимая во вниманіе, что

$$(\bar{w}_v)_N = 0,$$

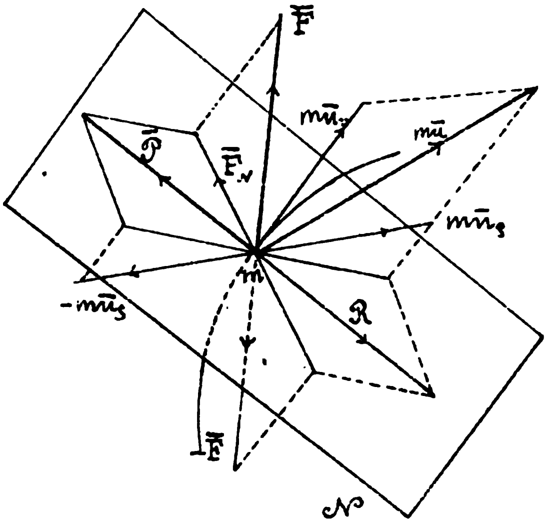
подобно предыдущему, получимъ

$$\bar{P} = \bar{P}_N = \bar{F}_N + \left(-m\frac{v^2}{\rho}\right)_N,$$

т. е. давленіе $\bar{P}$ несв. м. т. на идеально гладкую кривую лежитъ въ нормальной плоскости къ кривой въ разсматриваемой точкѣ и потому проектируется на эту плоскость въ натуральную величину, т. е.

$$\bar{P} = \bar{P}_N$$

Итакъ, давленіе несв. м. т. на идеально гладкую кривую, составляется изъ проекціи $\bar{F}_N$ равнодѣйствующихъ всѣхъ приложенныхъ къ несв. м. т. силъ на плоскость N, нормальную къ кривой въ разсматриваемой точкѣ и изъ проекціи на ту же плоскость $\left(-\frac{mv^2}{\rho}\right)$ центробѣжной силы несв. м. т.



§ 2. Общіе законы движенія несв. мат. точки.

Силы, непосредственно приложенныя къ несв. м. т. для краткости мы будемъ называть еще активными силами, въ отличіе отъ реакцій, которыя не задаются непосредственно, а опредѣляются какъ мы видѣли, при помощи первыхъ, когда извѣстно движеніе несв. м. т. и потому реакціи связей мы будемъ называть еще пассивными силами.

Обозначивъ соотвѣтственно черезъ

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i \quad \text{и} \quad \bar{R} = \Sigma \bar{R}_k$$

равнодѣйствующія всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., по принципу освобожденія отъ связей мы знаемъ, что, присоединивъ къ дѣйствующимъ на несв. м. т. активнымъ силамъ еще всѣ дѣйствующія на нее пассивныя силы, мы можемъ смотрѣть на несв. м. т., какъ на свободную и потому всѣ общіе законы движенія св. м. т. будутъ справедливы и для несв. м. т., если къ дѣйствующимъ

къ ней активнымъ силамъ, мы присоединимъ всѣ дѣйствующія на нее пассивныя силы или реакціи связей, замѣняющія собою присутствіе этихъ послѣднихъ.

Такимъ образомъ мы получимъ пять общихъ законовъ движенія несв. м. т.

I. Общій законъ количества ускоренія несв. м. т.

Количество ускоренія несв. м. т. геометрически равно равнодѣйствующей всѣхъ приложенныхъ къ ней активныхъ и пассивныхъ силъ, т. е.

$$m\bar{u} = \bar{F}' + \bar{R}$$

II. Общіе законы моментовъ количества ускоренія несв. м. т.

а) Линейной моментъ

$$\bar{l}_0 = \bar{M}_0(m\bar{u})$$

количества ускоренія несв. м. т. относительно любого центра O геометрически равенъ линейному моменту $\bar{L}_0$ относительно того же центра равнодѣйствующей всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., т. е.

$$\bar{l}_0 = \bar{L}_0 = \bar{M}_0(\bar{F} + \bar{R}) =$$

$$= \bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{R}).$$

в) моментъ количества ускоренія несв. м. т.

$$l_{ox} = M_{ox}(m\bar{u})$$

относительно любой оси OX равенъ моменту L_{ox} относительно той же оси OX всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несвб. м. т., т. е.

$$l_{ox} = L_{ox} = \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}+\bar{\mathcal{R}}) = \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}) + \mathcal{M}_{ox}(\bar{\mathcal{R}}).$$

III. Общій законъ измѣненія количества движенія несв. м. т.

Геометрическое приращеніе количества движенія

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0$$

несв. м. т. m за данный промежутокъ времени $(t-t_0)$ геометрически равно полному импульсу всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., т. е.

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{F}+\bar{\mathcal{R}}) = \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{F}) + \bar{J}_{t_0}^{t}(\bar{\mathcal{R}}).$$

IV. Общіе законы измѣненія моментовъ количества движенія несв. м. т.

a). Скорость $\bar{v}_k$ точки k, чертящей годографъ момента количества движенія или количества скорости несв. м. т. относительно любого неподвижнаго центра O, геометрически равно линейному моменту $\bar{L}_0$ относительно того же центра O равнодѣйствующей всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., т.е.

$$\bar{v}_k = \bar{L}_0 = \bar{\mathcal{M}}_0(\bar{F}+\bar{\mathcal{R}}) = \bar{\mathcal{M}}_0(\bar{F}) + \bar{\mathcal{M}}_0(\bar{\mathcal{R}})$$

ибо

$$\bar{v}_k = \bar{l}_0.$$

b) Производная отъ момента количества движенія k'_{ox} несв. м. т. относительно любой неподвижной оси OX равна моменту L_{ox} относительно той же оси равнодѣйствующей всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., т. е.

$$k'_{ox} = L_{ox} = \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}+\bar{\mathcal{R}}) = \mathcal{M}_{ox}(\bar{F}) + \mathcal{M}_{ox}(\bar{\mathcal{R}})$$

ибо

$$k'_{ox} = l_{ox}.$$

V. Общій законъ измѣненія кинетической энергіи или живой силы несв. м. т.

Приращеніе кинетической энергіи или живой силы несв. м. т.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

за данный промежутокъ времени $(t - t_0)$ равно полной работѣ за тотъ же промежутокъ времени всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., т. е.

$$\mathcal{K} - \mathcal{K}_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = T_{t_0}^{t}(\bar{F} + \bar{\mathcal{R}}) =$$
$$= T_{t_0}^{t}(\bar{F}) + T_{t_0}^{t}(\bar{\mathcal{R}}).$$

§3. Частные случаи общихъ законовъ движенія несв. м. т.

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи общихъ законовъ движенія несв. м. т. по идеально гладкимъ неподвижнымъ поверхностямъ и линіямъ.

1) Движеніе несв. м. т. по идеально гладкимъ неподвижнымъ поверхностямъ и линіямъ безъ дѣйствія активныхъ силъ совершается равномѣрно.

Дѣйствительно, по общему закону количества ускоренія несв. м. т.

$$m\bar{u} = \bar{F} + \bar{\mathcal{R}},$$

но въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\bar{F} = 0,$$

слѣдовательно

$$m\bar{u} = \bar{\mathcal{R}};$$

проектируя обѣ части этого геометрическаго равенства

на направленіе скорости $\bar{v}$ несв. м. т., получимъ

$$(m\bar{u})_v = mv' - \mathcal{R}\,\mathrm{Cos}\,(\mathcal{R}, v) = 0,$$

такъ какъ идеально гладкія поверхности и линіи по опредѣленію могутъ оказывать лишь нормальныя къ нимъ реакціи и потому

$$\mathrm{Cos}\,(\mathcal{R}, v) = 0,$$

слѣдовательно

$$v' = 0 \quad , \text{т. е.} \quad v = \mathrm{Const}.$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ общій законъ количества ускоренія несв. м. т. выразится равенствомъ

$$m\bar{u}_s = \bar{\mathcal{R}};$$

поэтому при движеніи несв. м. т. безъ дѣйствія активныхъ силъ по идеально гладкой поверхности радіусы кривизны ея траекторіи или главныя нормали траекторіи несв. м. т. во все время движенія этой послѣдней будутъ совпадать съ направленіями реакцій поверхности, т. е. будутъ нормальны къ поверхности. (*)

2). При движеніи несв. м. т. по идеально гладкой поверхности вращенія подъ дѣйствіемъ силъ, проходящихъ черезъ ось вращенія или ей параллельныхъ, имѣетъ мѣсто законъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ реакція поверхности тоже проходитъ черезъ ось вращенія поверхности, принявъ которую за ось OX, по общему закону измѣненія моментовъ количества движенія несвободной м. точки получимъ:

(*) Такія линіи называются геодезическими линіями данной поверхности; онѣ вообще представляютъ кратчайшія разстоянія ме-

$$k'_{ox} = L_{ox} = M_{ox}(\bar{F}) + M_{ox}(\bar{R}) = 0$$

слѣдовательно

$$k_{ox} = 2mS'_x = C$$

т. е.

$$S'_x = \frac{C}{2m} \quad \text{и} \quad S_x = \frac{C}{2m}(t - t_0),$$

гдѣ черезъ S_x мы обозначимъ секторіальную площадь м. т. въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія.

Напр. Если тяжелая м. т. движется подъ дѣйствіемъ начальнаго толчка по круговой конической или цилиндрической поверхности, оси которыхъ вертикальны, то секторіальная скорость такой несв. м. т. въ горизонтальной плоскости, относительно точки пересѣченія оси съ плоскостью, сохраняетъ постоянную величину, тоже самое относится и къ тяжелой мат. т., движущейся подъ дѣйствіемъ начальнаго толчка по идеально гладкой шаровой поверхности, если за ось ея принять вертикальный діаметръ.

<u>3.)</u> Законъ сохраненія полной энергіи несв. м. т.

<u>Если къ несв. м. т., находящейся на идеально гладкой неподвижной поверхности или линіи приложена консервативная сила, то полная энергія такой м. т. сохраняетъ постоянную величину.</u>

Дѣйствительно, по общему закону измѣненія кинетической энергіи или живой силы несв. м. т.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = T^t_{t_0}(\bar{F}) + T^t_{t_0}(\bar{R}),$$

но при идеально гладкихъ неподвижныхъ поверхностяхъ или линіяхъ

$$T^t_{t_0}(\bar{R}) = \int_{t_0}^{t} Rv \cos(R, v)\, dt = 0,$$

ибо реакція такихъ поверхностей и линій нормальны къ нимъ, т. е. перпендикулярны къ скорости $\bar{v}$ несв. м. т., и потому, если сила $\bar{F}$ консервативна и черезъ

и (x, y, z) мы обозначимъ ея потенціалъ, то

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = T_{t_0}^{t}(\bar{F}) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

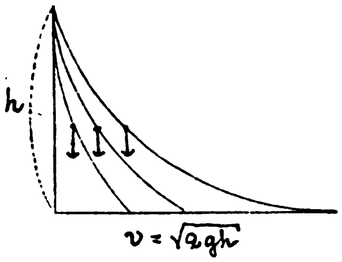
или

$$\frac{mv^2}{2} - U(x, y, z) = \frac{mv_0^2}{2} - U(x_0, y_0, z_0) = h$$

т. е.

$$E = K + \Pi = K - U = h = Const.$$

Примѣры. 1). Если тяжелая м. т. спускается безъ начальной скорости по идеально гладкимъ поверхностямъ или линіямъ съ высоты h надъ горизонтомъ, то скорость м. т. когда она придетъ на горизонтъ, будетъ равна $\sqrt{2gh}$, независимо отъ вида этихъ поверхностей и линій.



Дѣйствительно, потенціалъ силы тяжести есть

$$-pz = -mgz$$

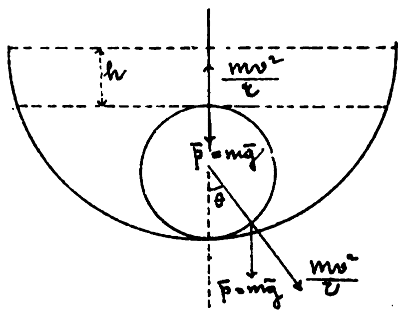
и потому по закону сохраненія полной энергіи

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = Const. = \frac{mv_0^2}{2} + mgz_0$$

и при $z = 0$, $v_0 = 0$ и $z_0 = h$

$$v = \sqrt{2gh}.$$

2). Центробѣжныя горы. Съ какой высоты надо спустить тележку, чтобы она не сорвалась при обходѣ завитка?



Тележка не отдѣлится отъ рельсъ, пока будетъ оказывать на нихъ давленіе, которое, какъ мы знаемъ, составляется изъ проекціи ея центробѣжной силы $-\frac{mv^2}{2}$ и прило-

оженной къ ней силы тяжести

$$\bar{p} = m\bar{g}$$

на нормальную скорость къ кривой въ разсматриваемой точкѣ и должно быть направлено по продолженію радіуса r; слѣдовательно сумма проекцій этихъ двухъ силъ на продолженіе радіуса должно быть >0, т. е.

$$\mathfrak{P} = \frac{mv^2}{r} + p\cos\theta > 0,$$

гдѣ черезъ θ мы обозначили уголъ между $\bar{p}$ и продолженіемъ радіуса r; изъ написаннаго неравенства ясно, что самое опасное мѣсто будетъ при $\theta = \pi$, т. е. въ высшей точкѣ завитка, но по предыдущему въ этой точкѣ

$$v = \sqrt{2gh},$$

гдѣ h есть высота мѣста спуска тележки надъ высшею точкою завитка; кромѣ того

$$p = mg;$$

слѣдовательно, необходимо, чтобы

$$m\frac{2gh}{r} - mg > 0$$

или

$$h > \frac{r}{2}$$

§ 4. Дифференціальныя уравненія движенія несв. м. т. по идеально гладкой неподвижной поверхности.

Разсмотримъ сначала движеніе м. т. по идеально гладкой удерживающей ее неподвижной поверхности

$$f(x, y, z) = 0 \ldots\ldots (*)$$

Такъ какъ идеально гладкая поверхность можетъ оказывать лишь нормальныя къ ней реакціи, то ре-

акція $\bar{\mathcal{R}}$ поверхности въ каждой ея точкѣ должна быть направлена въ ту или другую сторону по диффеpенціальному параметру поверхности въ разсматриваемой точкѣ, т.е.

$$\bar{\mathcal{R}} = \lambda \bar{\mathcal{N}},$$

гдѣ λ есть нѣкоторый положительный или отрицательный множитель, слѣдовательно:

$$\bar{\mathcal{R}}_x = \lambda \mathcal{N}_x = \lambda \frac{\delta f}{\delta x}, \quad \bar{\mathcal{R}}_y = \lambda \mathcal{N}_y = \lambda \frac{\delta f}{\delta y},$$

$$\bar{\mathcal{R}}_z = \lambda \mathcal{N}_z = \lambda \frac{\delta f}{\delta z}$$

Проектируя теперь обѣ части геометрическаго равенства

$$m\bar{u} = \bar{F} + \bar{\mathcal{R}},$$

выражающаго общій законъ количества ускоренія несв. м.т. на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O, X, Y, Z), мы придемъ къ тремъ равенствамъ:

$$(**) \quad \begin{cases} mx'' = X + \lambda \dfrac{\delta f}{\delta x} \\ my'' = Y + \lambda \dfrac{\delta f}{\delta y} \\ mz'' = Z + \lambda \dfrac{\delta f}{\delta z} \end{cases}$$

присоединивъ къ которымъ уравненіе поверхности (*), получимъ четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ функцій времени x, y, z и λ, гдѣ λ есть множитель, опредѣляющій реакцію поверхности

$$\mathcal{R} = \pm \lambda \mathcal{N} = \pm \lambda \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Уравненія (**) называются дифференціальными уравненіями движенія несв. м.т. по идеально гладкой поверхности (*); для рѣшенія ихъ надо предварительно исключить изъ нихъ неизвѣстный намъ множитель λ, тогда мы получимъ два уравненія:

$$\frac{mx'' - \mathfrak{X}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{my'' - \mathfrak{Y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{mz'' - \mathfrak{Z}}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \qquad (***)$$

присоединивъ къ которымъ уравненіе поверхности (*), будемъ имѣть три уравненія для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ функцій (x, y, z).

Для рѣшенія этихъ трехъ уравненій достаточно найти лишь четыре ихъ независимыхъ первыхъ интеграла

$$F_1(t;\, x, y, z;\, x', y', z') = C_1,$$
$$F_2(t;\, x, y, z;\, x', y', z') = C_2;$$
$$F_3(t;\, x, y, z;\, x', y', z') = C_3;$$
$$F_4(t;\, x, y, z;\, x', y', z') = C_4,$$

ибо, присоединивъ къ нимъ два имѣющіяся у насъ равенства:

$$f(x, y, z) = 0$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0$$

мы будемъ имѣть шесть уравненій для опредѣленія шести неизвѣстныхъ намъ функцій x, y, z, x', y', z', причемъ произвольныя постоянныя C_1, C_2, C_3, C_4 опредѣлятся при помощи начальныхъ обстоятельствъ движенія несв. м. т. $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'$, изъ которыхъ тоже только четыре можно задать вполнѣ произвольно, такъ какъ они должны удовлетворять вышенаписаннымъ двумъ равенствамъ.

Если сила $\bar{F}$ консервативна, т. е.

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

гдѣ черезъ

$$U = U(x, y, z)$$

мы обозначили потенціалъ данной консервативной

силы, то, какъ мы знаемъ, въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ мѣсто законъ сохраненія полной энергіи

$$\frac{mv^2}{2} - U = h,$$

причемъ это равенство будетъ однимъ изъ первыхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (**), называемымъ интеграломъ живой силы.

Этотъ интегралъ можетъ быть полученъ и непосредственно изъ уравненій (**).

Дѣйствительно, помноживъ равенства (**) соотвѣтственно на dx, dy, dz и сложивъ почленно полученныя произведенія, мы придемъ къ равенству

$$m(x''dx + y''dy + z''dz) =$$
$$= \mathfrak{X}dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right),$$

въ которомъ

$$m(x''dx + y''dy + z''dz) =$$
$$= d\,\frac{m(x'^2+y'^2+z'^2)}{2} = d\,\frac{mv^2}{2}$$

$$\mathfrak{X}dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

ибо

$$f(x, y, z) = 0;$$

слѣдовательно

$$d\,\frac{mv^2}{2} = dU,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$\frac{mv^2}{2} - U = h$$

гдѣ h есть произвольная постоянная, ч. т. д.

Примѣры. 1) Движеніе тяжелой м. т. по наклонно…

гладкой наклонной плоскости, составляющей уголъ α съ горизонтомъ.

Примявъ наклонную плоскость за плоскость координатъ XOY, линію пересѣченія наклонной плоскости съ горизонтальною плоскостью за ось OX и направивъ ось OZ по перпендикуляру къ наклонной плоскости, мы получимъ уравненіе наклонной плоскости

$$z = 0;$$

кромѣ того проекціи силы тяжести

$$\bar{p} = m\bar{g}$$

тяжелой м. т. на указанныя три оси выразятся равенствами

$$X = 0, \quad Y = -mg\sin\alpha; \quad Z = -mg\cos\alpha;$$

слѣдовательно, дифференціальныя уравненія движенія напишутся подъ видомъ:

$$mx'' = 0, \quad my'' = -mg\sin\alpha, \quad mz'' = -mg\cos\alpha + \lambda = 0;$$

интегрируя первыя два равенства, получимъ

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 + C_3 t + C_4$$

изъ послѣдняго же равенства найдемъ реакцію наклонной плоскости

$$R = R_z = \lambda = mg\cos\alpha,$$

причемъ произвольныя постоянныя C_1, C_2, C_3, C_4 опредѣляются изъ начальныхъ обстоятельствъ движенія.

2.) Дифференціальныя уравненія движенія коническаго маятника.

Примявъ точку подвѣса коническаго маятника за начало прямолинейной системы координатъ $(O; XYZ)$, въ которой ось OZ направлена по вертикали внизъ и обозначивъ черезъ l длину нити маятника, мы получимъ

уравненіе шаровой поверхности, на которой должна оставаться м. т.

$$x^2+y^2+z^2=l^2,$$

причемъ проекціи силы тяжести на указанныя оси выразятся равенствами

$$\mathfrak{X}=0\ ,\quad \mathfrak{Y}=0\ ,\quad \mathfrak{Z}=mg;$$

слѣдовательно дифференціальныя уравненія движенія такой несв. м. т. напишутся подъ видомъ:

$$mx''=2\lambda x\ ,\ my''=2\lambda y\ ,\ mz''=mg+2\lambda z$$

Эти три дифференціальныя уравненія обладаютъ двумя первыми интегралами: интеграломъ площадей въ плоскости, перпендикулярной оси Oz, и интеграломъ живой силы, выражающимъ имѣющій здѣсь мѣсто законъ сохраненія полной энергіи несв. м. т.

$$m(xy'-yx')=C_1$$

$$\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)-mgz=C_2=h$$

Если наконецъ въ уравненіяхъ (**) положимъ:

$$x''=0\ ,\ y''=0\ ,\ z''=0,$$

то получимъ уравненія равновѣсія несв. м. т. на идеально гладкой поверхности.

$$\mathfrak{X}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\quad \mathfrak{Y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\mathfrak{Z}+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

выведенныя нами въ статикѣ.

Исключивъ изъ послѣднихъ равенствъ λ, придемъ къ равенствамъ:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\mathfrak{Y}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{Z}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

выражающимъ условіе равновѣсія несв. м. т. на идеально гладкой поверхности, а именно, что равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ къ такой несв. м. т. силъ должна быть нормальна къ поверхности въ разсматриваемой точкѣ.

§5. Дифференціальныя уравненія движенія несв. м. т. по идеально гладкой неподвижной линіи.

На всякую линію мы можемъ смотрѣть, какъ на пересѣченіе двухъ поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad f_2(x, y, z) = 0 \;\ldots\ldots (*)$$

Если обѣ эти поверхности идеально гладки, т. е. могутъ оказывать лишь нормальныя къ нимъ реакціи

$$\bar{R}_1 = \lambda_1 \bar{N}_1 \quad \text{и} \quad \bar{R}_2 = \lambda_2 \bar{N}_2,$$

то реакція ихъ линіи пересѣченія

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \lambda_1 \bar{N}_1 + \lambda_2 \bar{N}_2$$

будетъ всегда находиться въ нормальной плоскости къ этой линіи, т. е. линія пересѣченія тоже будетъ идеально гладкою, и дифференціальныя уравненія м. т. по идеально гладкой кривой получатся, если мы спроектируемъ обѣ части геометрическаго равенства

$$m\bar{u} = \bar{F} + \bar{R} = \bar{F} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2,$$

выражающаго законъ количества ускоренія несв. м. т., движущейся по идеально гладкой линіи на три взаимноперпендикулярныя оси координатъ (O, X, Y, Z) въ такомъ случаѣ мы получимъ три равенства

$$(**) \quad \begin{cases} mx'' = X + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \\ my'' = Y + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, \\ mz'' = Z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z}, \end{cases}$$

присоединивъ къ которымъ два уравненія поверхностей (*), будемъ имѣть пять уравненій для опредѣленія пяти функцій: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

Для рѣшенія этихъ уравненій надо предварительно исключить изъ нихъ неизвѣстныхъ намъ множителей λ_1, λ_2, для чего достаточно помножить равенства (**) соотвѣтственно на x', y', z' и сложить почленно полученныя произведенія, тогда мы придемъ къ равенству

$$(***) \quad m(x''x' + y''y' + z''z') = \mathfrak{X} x' + \mathfrak{Y} y' + \mathfrak{Z} z',$$

не заключающему множителей λ_1, λ_2, ибо продифференцировавъ равенства (*), мы убѣдимся, что коэффиціенты при членахъ послѣдняго равенства, заключающихъ этихъ множителей λ_1, λ_2:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} x' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' = 0$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} x' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' = 0$$

равны нулю.

Равенство (***) можно переписать еще подъ видомъ

$$m u v \operatorname{Cos}(u, v) = F v \cos(F, v)$$

или

$$m v' = F \operatorname{Cos}(F, v) = F_v$$

причемъ послѣднее равенство и непосредственно очевидно, ибо оно выражаетъ равенство проекцій на направленіе скорости $\bar{v}$ м. т. обѣихъ частей геометрическаго равенства

$$m \bar{u} = \bar{F} + \bar{\mathfrak{R}},$$

выражающаго общій законъ количества ускоренія несв.

м. т. движущейся по идеально гладкой кривой.

Для рѣшенія трехъ уравненій (*) и (***) достаточно найти ихъ два независимыхъ интеграла

$$F_1(t;\, x, y, z;\, x', y', z') = C_1,$$

и

$$F_2(t;\, x, y, z;\, x', y', z') = C_2,$$

такъ какъ присоединивъ къ нимъ четыре имѣющихся у насъ равенства

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad , \; f_2(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} x' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' = 0$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} x' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' = 0,$$

мы будемъ имѣть шесть уравненій для опредѣленія шести неизвѣстныхъ намъ функцій x, y, z, x', y', z', причемъ произвольныя постоянныя опредѣляются при помощи начальныхъ обстоятельствъ движенія несв. м. т. x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0', изъ которыхъ тоже только два можно задать произвольно, такъ какъ они должны удовлетворять вышенаписаннымъ четыремъ уравненіямъ.

Если сила $\bar{F}$ консервативна, т. е.

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

гдѣ черезъ

$$U = U(x, y, z)$$

мы обозначимъ потенціалъ данной консервативной силы, то, какъ мы знаемъ, имѣетъ мѣсто законъ сохраненія полной энергіи

$$\frac{mv^2}{2} - U = h,$$

который въ такомъ случаѣ будетъ однимъ изъ первыхъ

интеграловъ дифференціальныхъ уравненій (***) и носитъ названіе интеграла живой силы.

Въ справедливости послѣдняго заключенія нетрудно и непосредственно убѣдиться, ибо помноживъ равенство (***) на dt, мы придемъ къ равенству

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU,$$

откуда интегрируя получимъ

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

гдѣ h есть произвольная постоянная.

Опредѣливъ движеніе м. т., изъ равенствъ (**) найдемъ неизвѣстные множители λ_1, λ_2, опредѣляющіе реакціи $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ поверхностей и реакцію линіи ихъ пересѣченія:

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \lambda_1 \bar{N}_1 + \lambda_2 \bar{N}_2$$

причемъ

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos(R_1, R_2)} =$$

$$= \sqrt{\lambda_1^2 N_1^2 + \lambda_2^2 N_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 N_1 N_2 \cos(N_1, N_2)},$$

гдѣ

$$N_1^2 = \left(\frac{\delta f_1}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f_1}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta f_1}{\delta z}\right)^2$$

$$N_2^2 = \left(\frac{\delta f_2}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f_2}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta f_2}{\delta z}\right)^2$$

и

$$N_1 N_2 \cos(N_1, N_2) = \frac{\delta f_1}{\delta x}\cdot\frac{\delta f_2}{\delta x} + \frac{\delta f_1}{\delta y}\,\frac{\delta f_2}{\delta y} + \frac{\delta f_1}{\delta z}\,\frac{\delta f_2}{\delta z}$$

Полагая наконецъ въ уравненіяхъ (**)

$$x'' = 0,\quad y'' = 0,\quad z'' = 0.$$

получимъ три уравненія

$$X + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta x} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta x} = 0;\quad Y + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta y} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta y} = 0$$

$$Z + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 \ldots$$

присоединивъ къ которымъ два уравненія поверхностей (*), получимъ пять уравненій равновѣсія несв. м. т. на идеально гладкой кривой, выведенныя нами въ статикѣ.

§6. Поверхности и линіи не гладкія.

Негладкія поверхности и линіи могутъ оказывать кромѣ нормальныхъ еще и касательныя къ нимъ реакціи.

Такимъ образомъ полная реакція $\bar{R}$ негладкой поверхности или линіи можетъ быть разложена на двѣ составляющія

$$\bar{R} = \bar{R}_N + \bar{R}_K,$$

гдѣ R_N есть нормальная составляющая реакціи, а $\bar{R}_K$ — касательная составляющая, называемая еще силою тренія.

Относительно силъ тренія въ примѣненіи къ несв. м. т. изъ опытовъ допускается, что

1) сила тренія приложена къ несв. м. т. противоположно направленію относительной скорости м. т. по отношенію къ поверхности или линіи, по которой она движется.

2) величина силы тренія пропорціональна нормальному давленію движущейся м. т. или дѣйствующей на нее нормальной реакціи R_N, т. е.

$$R_K = K R_N$$

гдѣ K есть отвлеченное число, зависящее лишь отъ физической природы находящихся въ соприкосновеніи тѣлъ и называется коэффиціентомъ тренія.

На основаніи этихъ свойствъ силъ тренія законъ количества ускоренія несв. м. т., движущейся по негладкой поверхности или линіи, выразится равенствами:

$$m\bar{w} = \bar{F} + \bar{R} = \bar{F} + \bar{R}_N - k\frac{R_N}{v}\bar{v},$$

причемъ при движеніи м. т. по поверхности

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\bar{R}_N = \lambda \bar{N},$$

гдѣ N есть дифференціальный параметръ поверхности въ разсматриваемой точкѣ, и потому дифференціальныя уравненія движенія несв. м. т. по негладкой поверхности напишутся подъ видомъ

$$\begin{cases} mx'' = X + \lambda\frac{\delta f}{\delta x} - k(\lambda)N\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ my'' = Y + \lambda\frac{\delta f}{\delta y} - k(\lambda)N\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ mz'' = Z + \lambda\frac{\delta f}{\delta z} - k(\lambda)N\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \end{cases}$$

въ которыхъ черезъ (λ) мы обозначили абсолютную величину множителя λ.

При движеніи же м. т. по негладкой линіи — пересѣченія двухъ поверхностей

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad f_2(x, y, z) = 0$$

$$\bar{R}_N = \bar{R}_{N_1} + \bar{R}_{N_2} = \lambda_1\bar{N}_1 + \lambda_2\bar{N}_2$$

слѣдовательно

$$R_N = \sqrt{\lambda_1^2 N_1^2 + \lambda_2^2 N_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 N_1 N_2 \operatorname{Cos}(N_1, N_2)}$$

и потому дифференціальныя уравненія движенія такой м. т. напишутся подъ видомъ:

$$\begin{cases} mx'' = X + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta x} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta x} - kR_N\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ my'' = Y + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta x} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta x} - kR_N\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ mz'' = Z + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta x} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta x} - kR_N\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{cases}$$

гдѣ подъ R_N есть вышенаписанное выраженіе нормальной реакціи.

Негладкія поверхности и линіи могутъ, какъ мы знаемъ изъ статики, оказывать касательныя реакціи и при относительномъ равновѣсіи несв. м. т. на такихъ поверхностяхъ и линіяхъ, причемъ такія реакціи называются <u>статическимъ</u> треніемъ или <u>сцѣпленіемъ</u>; сцѣпленіе всегда равно и противоположно касательной составляющей $\overline{F}_K$ равнодѣйствующей всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ покоящейся несв. м. т. и имѣетъ своимъ maximum произведеніе

$$kR_N = kF_N,$$

гдѣ k есть коэффиціентъ тренія для данныхъ тѣлъ, поэтому если

$$F_K < kF_N,$$

то покоящаяся несв. м. т. подъ дѣйствіемъ силы $\overline{F}$ останется на негладкой поверхности или линіи въ равновѣсіи, если же

$$F_K \geqq kF_N$$

или

$$\frac{F_K}{F_N} \geqq k$$

то придетъ въ движеніе.

Примѣръ. Если тяжелую м. т. положить безъ начальной скорости на наклонную негладкую прямую, обладающую коэффиціентомъ тренія k, то такая точка можетъ придти въ движеніе только при углѣ наклоненія α прямой къ горизонту, удовлетворяющемъ условію

$$\tan\alpha \geqq k,$$

ибо въ данномъ случаѣ

$$F_K = p\sin\alpha$$

и

$$F_N = p\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ ;$$

причемъ для движенія необходимо, чтобы

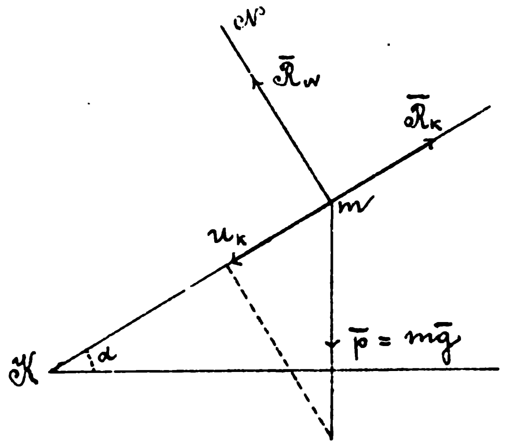
$$\frac{F_K}{F_N} = \mathrm{tang}\,\alpha$$

было $\geqslant K$.

Спроектировавъ наконецъ обѣ части геометрическаго равенства

$$m\bar{u} = m\bar{g} + \bar{R}_N + \bar{R}_K,$$

выражающаго общій законъ количества ускоренія несв. м. т. на направленіе осей mK и mN, изъ которыхъ первая совпадаетъ съ данною прямою и направлена внизъ, а вторая лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ данную прямую, перпендикулярна къ ней и направлена вверхъ, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ



$$0 = -mg\,\mathrm{Cos}\,\alpha + R_N$$

и

$$mu_K = mg\,(\mathrm{Sin}\,\alpha - K\,\mathrm{Cos}\,\alpha),$$

изъ которыхъ получимъ

$$R_N = mg\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ ,\ R_K = -\kappa mg\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

и

$$u_K = g\,(\mathrm{Sin}\,\alpha - \kappa\,\mathrm{Cos}\,\alpha)$$

т. е. движеніе такой м. т. будетъ равноускореннымъ съ ускореніемъ

$$u = u_K.$$

§7. Общее аналитическое опредѣленіе связей несв. м. т.

Если м. т. свободна, то ея три координаты (x, y, z) не ограничены никакими условіями.

Всякую зависимость

$$\varphi(x, y, z, t) \gtreqless 0$$

между координатами несв. м. т. мы будемъ называть связью несв. м. т.

Если функція связи не зависитъ явно отъ времени t, то мы будемъ называть связь <u>неизмѣняемою</u>, въ противномъ же случаѣ <u>измѣняемою.</u>

Если связь выражается <u>равенствомъ</u>

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

то мы будемъ ее называть <u>удерживающею.</u>

Всякая удерживающая связь несв. м. т. можетъ быть представлена въ пространствѣ, какъ нѣкоторая измѣняемая или неизмѣняемая поверхность, на которой должна оставаться несв. м. т.. Такую поверхность при неизмѣняемой связи мы будемъ называть поверхностью связи, при измѣняемой же связи — поверхностью связи въ данный моментъ. Поверхность связи дѣлитъ пространство на двѣ части: для точекъ, лежащихъ на поверхности связи, функція связи равна нулю, для точекъ, лежащихъ по одну сторону поверхности связи, функція связи принимаетъ <u>положительныя</u> значенія, а по другую ея сторону — <u>отрицательныя</u>, причемъ, какъ мы знаемъ, положительная часть пространства находится по ту сторону поверхности связи, куда направлены ея дифференціальные параметры $\mathcal{N}$, т.е. векторы, которыхъ проекціи на три прямоугольныя оси координатъ (x, y, z) выражаются соотвѣтственными частными

производными отъ функціи связи по координатамъ разсматриваемой точки поверхности связи:

$$N_x = \frac{\delta \varphi}{\delta x}, \quad N_y = \frac{\delta \varphi}{\delta y}, \quad N_z = \frac{\delta \varphi}{\delta z}.$$

Если связь выражается <u>равенствомъ</u> и <u>неравенствомъ</u>:

$$\varphi(x, y, z, t) \gtreqless 0$$

то такую связь мы будемъ называть <u>неудерживающею</u> связью.

Неудерживающая связь не препятствуетъ м. т. сходить съ поверхности связи

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

въ положительную часть пространства, раздѣляемаго этою поверхностью на двѣ части, и только не допускаетъ м. т. проникнуть въ отрицательную часть такого пространства, причемъ, помноживъ функцію связи на ± 1, ее всегда можно написать въ такомъ видѣ, что м. т. будетъ сходить съ поверхности связи въ ту сторону, гдѣ функція связи принимаетъ положительныя значенія, т. е.

$$\varphi > 0$$

Такимъ образомъ, при неудерживающей связи

$$\varphi(x, y, z, t) \gtreqless 0$$

надо различать два случая:

1). если координаты м. т. удовлетворяютъ неравенству

$$\varphi(x, y, z, t) > 0,$$

то м. т. не находится на поверхности связи и ея безконечно малыя перемѣщенія подобно ~~св.~~ м. т. неограничены никакими условіями;

2) если координаты м. т. удовлетворяютъ

равенству

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

то м. т. находится на поверхности неудерживающей связи и ея безконечно малыя перемещения ограничены условием, что м. т. не может перейти въ пространство, лежащее по другую сторону поверхности связи.

Примѣры.

1) Связь

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

выражаетъ удерживающую шаровую поверхность радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ.

2) Связь

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \geqq 0$$

выражаетъ такую же неудерживающую поверхность, причемъ точка можетъ сходить съ нея во внѣшнюю сторону.

3) Связь

$$r^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \geqq 0$$

выражаетъ такую же неудерживающую поверхность, причемъ точка можетъ сходить съ нея во внутреннюю сторону.

Свобода м. т. вообще можетъ быть ограничена одною или нѣсколькими удерживающими или неудерживающими связями; но больше трехъ удерживающихъ независимыхъ связей

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

$$\varphi_3(x, y, z, t) = 0$$

задать нельзя, такъ какъ такія три равенства опредѣляютъ три координаты (x, y, z) м. т. въ каждый моментъ.

§ 8. Возможныя въ данный моментъ скорости и ускоренія несв. м. т., связанной одною удерживающею или неудерживающею связью.

Если несв. м. т. связана удерживающею связью

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

т. е. координаты несв. м. т. во все время ея движенія удовлетворяютъ написанному равенству, то взявъ первую и вторую производныя отъ этого равенства по времени t, мы придемъ къ двумъ равенствамъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z' + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z'' + \varphi_{II} = 0,$$

гдѣ для краткости черезъ φ_{II} мы обозначили всѣ члены полной второй производной φ'', взятой по времени t отъ функціи φ, кромѣ членовъ, заключающихъ вторыя производныя отъ координатъ, т. е.

$$\varphi_{II} = \varphi'' - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z''\right),$$

причемъ вышенаписанныя два равенства можно переписать еще подъ видомъ

$$\overline{N}\,\overline{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

или

$$Nv \operatorname{Cos}(N, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

и

$$\overline{N}\,\overline{u} + \varphi_{II} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (**)$$

или

$$Nu \operatorname{Cos}(N, u) + \varphi_{II} = 0$$

Такимъ образомъ скорость $\overline{v}$ и ускореніе $\overline{u}$ несв. м. т.

связанной удерживающей связью должны соответственно удовлетворять равенствамъ или условіямъ (*) и (**). Скорости и ускоренія несв. м. т., удовлетворяющія такимъ равенствамъ, мы будемъ называть совмѣстимыми со связью въ данный моментъ или возможными въ данный моментъ скоростями и ускореніями несв. м. т., связанной данной удерживающей связью.

Если несв. м. т. связана неудерживающей связью

$$\varphi(x, y, z, t) \gtrless 0,$$

то приходится различать слѣдующіе три отдѣльныхъ случая:

1) $\varphi > 0$; въ этомъ случаѣ м. т. не находится на поверхности связи, φ' и φ'' могутъ быть $\gtrless 0$ и потому скорости и ускоренія несв. м. т. не ограничены никакими условіями.

2) $\varphi = 0$ и

$$\varphi' = \frac{\delta\varphi}{\delta x} x' + \frac{\delta\varphi}{\delta y} y' + \frac{\delta\varphi}{\delta z} z' + \frac{\delta\varphi}{\delta t} =$$

$$= \bar{N}\bar{v} + \frac{\delta\varphi}{\delta t} > 0$$

въ этомъ случаѣ функція φ будетъ съ теченіемъ времени возрастать и м. т. сойдетъ со связи, причемъ φ'' можетъ быть $\gtrless 0$, т. е. ускоренія несв. м. т. не будутъ ограничены никакими условіями.

3) $\varphi = 0$ и

$$\varphi' = \bar{N}\bar{v} + \frac{\delta\varphi}{\delta t} = 0$$

въ этомъ случаѣ φ'' не можетъ быть < 0, ибо въ такомъ случаѣ функція φ съ теченіемъ времени должна убывать, т. е. φ' сдѣлается < 0, и потому φ тоже съ теченіемъ времени будетъ убывать, т. е. тоже станетъ < 0, что невозможно, ибо по условію неудерживающей связи

$$\varphi(x, y, z, t) \geqq 0;$$

слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\varphi'' = \frac{\delta\varphi}{\delta x}x'' + \frac{\delta\varphi}{\delta y}y'' + \frac{\delta\varphi}{\delta z}z'' + \varphi_{11} =$$

$$= \bar{N}\bar{u} + \varphi_{11} \geqq 0.$$

Итакъ, при движеніи несв. м. т., связанной неудерживающей связью

$$\varphi(x, y, z, t) \geqq 0,$$

при $\varphi = 0$ скорости несв. м. т. должны удовлетворять условіямъ

$$\bar{N}\bar{v} + \frac{\delta\varphi}{\delta t} \geqq 0 \quad \ldots\ldots (*)$$

или

$$Nv\cos(N, v) + \frac{\delta\varphi}{\delta t} \geqq 0$$

и при $\varphi = 0$ и

$$\bar{N}\bar{v} + \frac{\delta\varphi}{\delta t} = 0$$

ускоренія несв. м. т. удовлетворяютъ условіямъ:

$$\bar{N}\bar{u} + \varphi_{11} \geqq 0 \quad \ldots\ldots (**)$$

или

$$Nu\cos(N, u) + \varphi_{11} \geqq 0$$

Скорости и ускоренія несв. м. т., связанной неудерживающей связью, удовлетворяющія написаннымъ условіямъ, мы будемъ называть совмѣстимыми со связью или возможными въ данный моментъ скоростями и ускореніями несв. м. т., связанной данною неудерживающею связью.

§ 9. Виртуальныя скорости и виртуальныя отклоненія въ данный моментъ несвободной матеріальной точки, связанной

одного удерживающего или неудерживающего связью.

Виртуальными скоростями въ данный моментъ несв. м. т., связанной какою-либо связью, мы будемъ называть всѣвозможныя возможныя скорости такой точки, а которой связь въ этотъ моментъ предположимъ неизмѣняемою и удерживающею; такимъ образомъ, виртуальныя скорости несв. м. т., связанной неизмѣняемою удерживающею связью въ каждый моментъ совпадаютъ съ ея возможными скоростями.

Изъ вышенаписаннаго опредѣленія ясно, что проекціи виртуальныхъ скоростей несв. м. т. въ данный моментъ

$$v_x = x' \quad, v_y = y' \quad, v_z = z'$$

при всякой измѣняемой или неизмѣняемой, удерживающей или неудерживающей связи

$$\varphi(x, y, z, t) \geqq 0$$

должны удовлетворять равенству

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} x' + \frac{\delta\varphi}{\delta y} y' + \frac{\delta\varphi}{\delta z} z' = 0,$$

если мы продифференцируемъ уравненіе связи въ предположеніи, что время t, явно въ него входящее, останется постояннымъ.

Написанное равенство можно написать еще подъ видомъ

$$N_x v_x + N_y v_y + N_z v_z = \bar{N}\bar{v} = Nv \operatorname{Cos}(N, v) = 0,$$

откуда ясно, что виртуальныя скорости несв. м. т., связанной одною удерживающею или неудерживающею связью, перпендикулярны къ дифференціальному ихъ параметру N связи въ разсматриваемой точкѣ, т. е. лежатъ въ плоскости, касательной къ поверхности связи въ этой точкѣ.

Виртуальными отклоненіями несв. м. т. въ данный

моментъ мы будемъ называть воображаемые безконечно малые векторы перемѣщеній $\overline{\delta s}$ несв. м. т., направленные по виртуальнымъ скоростямъ несв. м. т. въ этотъ моментъ и имъ пропорціональные, т. е.

$$\overline{\delta s} = \bar{v}\,\delta t,$$

гдѣ черезъ δt мы обозначили нѣкоторый <u>воображаемый</u> безк. мал. промежутокъ времени.

Изъ этого опредѣленія ясно, что проекціи виртуальныхъ отклоненій несв. м. т. въ данный моментъ на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ, удовлетворяя слѣдующимъ равенствамъ

$$\delta x = v_x\,\delta t,\quad \delta y = v_y\,\delta t,\quad \delta z = v_z\,\delta t,$$

будутъ удовлетворять равенству

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\varphi}{\delta z}\delta z = 0,$$

ибо проекціи виртуальныхъ скоростей удовлетворяютъ равенству

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}v_x + \frac{\delta\varphi}{\delta y}v_y + \frac{\delta\varphi}{\delta z}v_z = 0$$

Проекціи виртуальныхъ отклоненій $(\delta x, \delta y, \delta z)$ несв. м. т. на три оси координатъ называютъ еще <u>варіаціями координатъ</u> несв. м. т., а произведенія

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}\delta x,\quad \frac{\delta\varphi}{\delta y}\delta y,\quad \frac{\delta\varphi}{\delta z}\delta z,$$

подобныя частнымъ дифференціаламъ функціи φ — <u>частными варіаціями этой функціи по соотвѣтствующимъ координатамъ</u>, наконецъ сумму всѣхъ частныхъ варіацій функціи φ:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\varphi}{\delta z}\delta z = \delta\varphi$$

называютъ полною ея варіаціей по координатамъ.

Въ такомъ случаѣ можно сказать, что проекціи

виртуальныхъ отклоненій или варіацій координатъ несв. м. т., связанной одною удерживающею или неудерживающею связью, обращають полную $\delta\varphi$ функціи связи въ нуль, т. е.

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0 ;$$

послѣднее равенство можно написать еще подъ видомъ:

$$\mathfrak{N}_x \delta x + \mathfrak{N}_y \delta y + \mathfrak{N}_z \delta z = \overline{\mathfrak{N}}\,\overline{\delta s} = 0,$$

откуда видно, что виртуальныя отклоненія несв. м. т. въ данный моментъ лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ дифференціальному параметру $\overline{\mathfrak{N}}$ связи въ разсматриваемой точкѣ, или въ плоскости, касательной къ поверхности связи въ разсматриваемой точкѣ, что и непосредственно очевидно, такъ какъ они направлены по виртуальнымъ скоростямъ несв. м. т. въ данный моментъ.

Наконецъ виртуальною работою въ данный моментъ силы $\overline{F}$, приложенной къ несв. м. т.,

$$\delta T(\overline{F}) = \overline{F}\,\overline{\delta s} = \mathfrak{X}\delta x + \mathfrak{Y}\delta y + \mathfrak{Z}\delta z$$

мы будемъ называть воображаемую безконечно малую работу этой силы на виртуальныхъ отклоненіяхъ несв. м. т. въ этотъ моментъ.

<u>Примѣчаніе</u>. Виртуальныя отклоненія въ данный моментъ несв. м. т., находящейся на удерживающей или неудерживающей, измѣняемой или неизмѣняемой поверхности, лежатъ въ плоскости, касательной къ этой поверхности въ разсматриваемой точкѣ и потому, если поверхность идеально гладкая, т. е. можетъ оказывать лишь нормальныя къ ней реакціи $\overline{\mathfrak{R}}$, то

$$\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\delta s} = \mathfrak{R}_x \delta x + \mathfrak{R}_y \delta y + \mathfrak{R}_z \delta z = 0,$$

т. е. виртуальная работа силъ реакціи идеально гладкой

поверхности равна нулю.

§10. Общее опредѣленіе идеальныхъ связей для несв. м. т.

Удерживающую или неудерживающую связь

$$\varphi(x, y, z, t) \geq 0$$

несв. м. т. мы будемъ называть идеальною, когда виртуальная работа

$$\bar{R}\,\bar{\delta s} = R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z = 0$$

ея силы реакціи $\bar{R}$ равна нулю.

Такъ какъ проекціи виртуальныхъ отклоненій несв. м. т., связанной одною удерживающею или неудерживающею связью

$$\varphi(x, y, z, t) \geq 0,$$

связаны лишь однимъ равенствомъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z = 0,$$

то равенство

$$R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z = 0$$

не можетъ быть независимымъ отъ перваго равенства, а должно быть его слѣдствіемъ, т. е.

$$R_x = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda N_x$$

$$R_y = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda N_y$$

$$R_z = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda N_z$$

гдѣ λ есть нѣкоторый положительный или отрица-

 Преподаватель [подпись]

тельной множитель.

Слѣдовательно

$$\bar{R} = \lambda \bar{N};$$

такимъ образомъ реакція идеальной связи несв. м. т. направлена въ ту или другую сторону по дифференціальному параметру связи въ разсматриваемой точкѣ; другими словами, идеальная связь несв. м. т. не можетъ оказывать на м. т. реакцій, касательныхъ къ поверхности связи.

Множитель λ, опредѣляющій реакцію идеальной связи, можно назвать коэффиціентомъ напряженія идеальной связи.

Укажемъ теперь, при какихъ условіяхъ появляется реакція идеальной связи и какъ въ такомъ случаѣ вычислить коэффиціентъ ея напряженія λ.

Если къ св. м. т. приложить силу $\bar{F}$, то по закону количества ускоренія св. м. т., эта сила сообщитъ м. т. ускореніе

$$\bar{u} = \frac{\bar{F}}{m},$$

для несвободной же матеріальной точки такое ускореніе возможно лишь въ томъ случаѣ, если оно будетъ совмѣстимо со связью, т. е. будетъ удовлетворять условіямъ § 7 (**) возможныхъ въ данный моментъ ускореній несв. м. т., связанной одною удерживающею или неудерживающею связью, а именно: при удерживающей связи

$$\bar{N}\bar{u} + \varphi_{11} = 0,$$

а при неудерживающей связи, при

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \bar{N}\bar{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\bar{N}\bar{u} + \varphi_{11} \geq 0;$$

эти условія при

$$\bar{u} = \frac{\bar{F}}{m}$$

можно переписать соотвѣтственно подъ видомъ

$$\bar{F}\bar{\mathfrak{N}} + m\varphi_{11} = 0$$

и

$$\bar{F}\bar{\mathfrak{N}} + m\varphi_{11} \geqq 0,$$

и потому, если сила $\bar{F}$ не удовлетворяетъ послѣднимъ условіямъ, т. е. при удерживающей связи

$$\bar{F}\bar{\mathfrak{N}} + m\varphi_{11} \gtrless 0$$

и при неудерживающей связи, при

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\mathfrak{N}}\bar{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$$\bar{F}\bar{\mathfrak{N}} + m\varphi_{11} < 0,$$

то ускореніе $\frac{\bar{F}}{m}$ будетъ несовмѣстимо со связью и со стороны связи разовьется реакція $\bar{\mathfrak{R}}$, которая по принципу освобожденія отъ связей, дѣйствуя совмѣстно съ силою $\bar{F}$, сообщитъ м. т. ускореніе

$$\bar{u} = \frac{\bar{F} + \bar{\mathfrak{R}}}{m}$$

совмѣстимое со связью, т. е. удовлетворяющее равенству

$$\bar{\mathfrak{N}}\bar{u} + \varphi_{11} = 0;$$

слѣдовательно $\bar{\mathfrak{R}}$ будетъ удовлетворять равенству

$$(\bar{F} + \bar{\mathfrak{R}})\bar{\mathfrak{N}} + m\varphi_{11} = 0$$

но при идеальной связи

$$\bar{\mathfrak{R}} = \lambda\bar{\mathfrak{N}},$$

поэтому

$$(\bar{F} + \lambda\bar{\mathfrak{N}})\bar{\mathfrak{N}} + m\varphi_{11} = 0,$$

откуда найдемъ коэффиціентъ напряженія идеальной связи

$$\lambda = -\frac{\bar{F}\mathcal{N} + mg_{\shortparallel}}{\mathcal{N}^2} =$$

$$= \frac{\mathfrak{X}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + mg_{\shortparallel}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$

причемъ при удерживающей связи реакція появляется, какъ мы видили, при

$$\bar{F}\mathcal{N} + mg_{\shortparallel} \gtrless 0,$$

а при неудерживающей связи при

$$\bar{F}\mathcal{N} + mg_{\shortparallel} < 0;$$

слѣдовательно при удерживающей идеальной связи

$$\lambda \gtrless 0,$$

при неудерживающей же идеальной связи

$$\lambda \geqslant 0$$

Обозначивъ наконецъ черезъ

$$\nu = \lambda\varphi$$

произведеніе изъ функціи идеальной связи на коэффиціентъ ея напряженія λ, мы придемъ къ очевиднымъ равенствамъ

$$\frac{\partial\nu}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\varphi + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\varphi + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial z} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}\varphi + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

но при удерживающей связи $\varphi = 0$, и при неудержива-

ющей связи то же равенство имѣетъ мѣсто, когда связь напряжена, т. е. оказываетъ реакцію; слѣдовательно при удерживающей или неудерживающей идеальной связи

$$\mathcal{R}_x = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\mathcal{R}_y = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\mathcal{R}_z = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

поэтому функцію

$$V = \lambda \varphi$$

подобно установленному нами понятію о силовой функціи, можно назвать реакціонною функціею данной идеальной связи.

Итакъ, всякая идеальная связь

$$\varphi(x, y, z, t) \gtrless 0$$

обладаетъ реакціонною функціей

$$V = \lambda \varphi,$$

частныя производныя отъ которой по координатамъ даютъ проекціи связи на соотвѣтственныя оси координатъ

$$\mathcal{R}_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathcal{R}_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathcal{R}_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Замѣтимъ еще, что совокупность двухъ удерживающихъ или неудерживающихъ идеальныхъ связей и. т. п.

$$\varphi_1(x, y, z, t) \geq 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) \geq 0$$

даютъ тоже идеальную связь, т. е. виртуальная

работа равнодѣйствующей

$$\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}_1 + \overline{\mathfrak{R}}_2$$

реакцій этихъ связей будетъ равна нулю.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ проекціи виртуальныхъ отклоненій несв. м. т. связаны двумя равенствами

$$\delta\varphi_1 = 0 \quad \text{и} \quad \delta\varphi_2 = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\delta z = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\delta z = 0,$$

помноживъ которые на соотвѣтствующіе имъ коэффиціенты напряженій λ_1, λ_2 этихъ связей, придемъ къ равенствамъ

$$\mathfrak{R}_{1x}\delta x + \mathfrak{R}_{1y}\delta y + \mathfrak{R}_{1z}\delta z = \overline{\mathfrak{R}}_1\overline{\delta s} = 0$$

и

$$\mathfrak{R}_{2x}\delta x + \mathfrak{R}_{2y}\delta y + \mathfrak{R}_{2z}\delta z = \overline{\mathfrak{R}}_2\overline{\delta s} = 0,$$

слѣдовательно

$$\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\delta s} = \overline{\mathfrak{R}}_1\overline{\delta s} + \overline{\mathfrak{R}}_2\overline{\delta s} = 0.$$

§11. Дѣйствіе мгновенной силы на несв. м. т., связанную одною удерживающею или неудерживающею идеальною связью.

Если къ несв. м. т. приложить мгновенную силу, импульсъ которой мы обозначимъ черезъ $\overline{J}$, то скорость $\overline{v}$ св. м. т. въ данный моментъ мгновенно измѣнится въ нѣкоторую новую скорость $\overline{v}_1$, удовлетворяющую, какъ мы знаемъ, геометрическому равенству

$$\overline{v}_1 = \overline{v} + \frac{\overline{J}}{m},$$

если же м. т. свободна, то она можетъ пріобрѣсти такую скорость только при условіи, что эта скорость $\overline{v}_1$ будетъ совмѣстима со связью въ данный моментъ, т. е. при удерживающей связи будетъ удовлетворять равенствамъ

$$\bar{N}\bar{v}_1 + \frac{\delta\varphi}{\delta t} = 0$$

или

$$\bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}\right) + \frac{\delta\varphi}{\delta t} = 0,$$

но при удерживающей связи первоначальная скорость $\bar{v}$ м. т. удовлетворять условіямъ связи, т.е.

$$\bar{N}\bar{v} + \frac{\delta\varphi}{\delta t} = 0,$$

слѣдовательно при удерживающей связи несв. м. т. можетъ пріобрѣсти указанную скорость $\bar{v}$, только при условіи, что

$$\bar{N}\bar{J} = 0, \text{ т.е. } \bar{J} \perp \bar{N};$$

при неудерживающей же связи

$$\varphi(x, y, z, t) \geq 0,$$

если притомъ м. т. въ данный моментъ находится на поверхности связи, т.е.

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

то скорость $\bar{v}_1$ должна удовлетворять условіямъ:

$$\bar{N}\bar{v}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \geq 0$$

т.е.

$$\bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \geq 0$$

Поэтому, если при удерживающей связи

$$\bar{N}\bar{J} \gtrless 0$$

а при неудерживающей связи м. т. находится на поверхности связи, т.е.

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} < 0,$$

то скорость $\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}$ будетъ несовмѣстима со связью и

мгновенно измѣнить эту скорость $v+\frac{J}{m}$ въ нѣкоторую другую скорость $\bar{v}_1$, совмѣстимую со связью, ибо въ противномъ случаѣ связь была бы нарушена, причемъ скорость v_1 всегда можно написать подъ видомъ

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J}}{m} + \frac{\bar{j}}{m},$$

гдѣ $\bar{j}$ есть нѣкоторый добавочный мгновенный импульсъ, и тогда подъ совокупнымъ дѣйствіемъ этихъ двухъ мгновенныхъ импульсовъ $\bar{J}+\bar{j}$ м. т., будучи свободна, пріобрѣтетъ такое же мгновенное измѣненіе скорости

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v} = \frac{\bar{J}+\bar{j}}{m}$$

какое она пріобрѣтетъ подъ дѣйствіемъ одного мгновеннаго импульса $\bar{J}$, будучи свободною.

Такой мгновенный импульсъ $\bar{j}$, замѣняющій собою присутствіе связи, называется импульсомъ мгновенной реакціи связи, и мы приходимъ къ принципу освобожденія отъ связей при дѣйствіи мгновенныхъ силъ на несв. м. т., а именно: при дѣйствіи мгновенной силы на несв. м. т. можно смотрѣть, какъ на свободную, если къ дѣйствующимъ на такую м. т. мгновеннымъ силамъ присоединить еще мгновенную реакцію связи.

Если мы имѣемъ идеальную связь, то импульсъ $\bar{j}$ мгновенной реакціи такой связи выражается въ проекціяхъ на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ (O, x, y, z) равенствами:

$$\begin{cases} j_x = \int_t^{t+\vartheta} R_x\,dt = \int_t^{t+\vartheta} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_t^{t+\vartheta} \lambda\, dt = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ j_y = \int_t^{t+\vartheta} R_y\,dt = \int_t^{t+\vartheta} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} dt = \dots \dots = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ j_z = \int_t^{t+\vartheta} R_z\,dt = \dots \dots \dots = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

ибо мгновенная реакція связи дѣйствуетъ въ теченіе столь ничтожно малаго промежутка времени ϑ, что

измѣненіями координатъ м. т. (x, y, z) и импульсами всѣхъ немгновенныхъ за этотъ промежутокъ времени силъ можно пренебречь. Итакъ,

$$j_x = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu \mathcal{N}_x$$

$$j_y = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu \mathcal{N}_y$$

$$j_z = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu \mathcal{N}_z,$$

гдѣ

$$\mu = \int_t^{t+\theta} \lambda \, dt;$$

причемъ изъ послѣдняго равенства ясно, что для удерживающей связи μ можетъ быть $\gtrless 0$, ибо для такой связи $\lambda \gtrless 0$, для неудерживающей же связи $\lambda \geq 0$, слѣдовательно μ тоже ≥ 0, т. е. не можетъ быть отрицательно.

Слѣдовательно,

$$\bar{j} = \mu \bar{\mathcal{N}},$$

т. е. импульсъ мгновенной реакціи идеальной связи всегда направленъ въ ту или другую сторону по ея дифференціальному параметру въ разсматриваемой точкѣ, что и непосредственно очевидно, ибо направленіе мгновеннаго импульса реакціи должно совпадать съ направленіемъ реакціи идеальной связи.

Множитель μ, опредѣляющій этотъ импульсъ, можно назвать коэффиціентомъ мгновеннаго напряженія идеальной связи.

Укажемъ теперь, какъ вычислить коэффиціентъ мгновеннаго напряженія удерживающей или неудерживающей идеальной связи, если къ несв. м. т. приложить мгновенную силу, импульсъ которой есть $\bar{J}$.

По принципу освобожденія отъ связей при дѣйствіи мгновенныхъ силъ на несв. м. т., можно смотрѣть на данную несв. м. т., какъ на свободную, если къ дѣйствую-

щему на нее мгновенному импульсу $\bar{J}$ присоединимъ еще неизвѣстный намъ импульсъ

$$\bar{j} = \mu \bar{N}$$

реакціи идеальной связи, причемъ въ такомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, м. т. мгновенно измѣнитъ свою скорость $\bar{v}$ въ скорость

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J} + \bar{j}}{m} = \bar{v} + \frac{\bar{J} + \mu \bar{N}}{m}.$$

Разберемъ теперь отдѣльно два случая.

1) Если мы имѣемъ удерживающую идеальную связь

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

то скорость $\bar{v}_1$ должна удовлетворять условію:

$$\bar{N}\bar{v}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J} + \mu \bar{N}}{m}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

но первоначальная скорость $\bar{v}$ несв. м. т., связанной удерживающей связью, должна тоже удовлетворять равенству

$$\bar{N}\bar{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

слѣдовательно

$$\bar{N}\,\frac{\bar{J} + \mu \bar{N}}{m} = 0,$$

откуда

$$\mu = -\frac{\bar{J}\bar{N}}{N^2} = -\frac{J N \cos(J, N)}{N^2} = -\frac{J_N}{N},$$

гдѣ черезъ

$$J_N = J \cos(J, N)$$

мы обозначили проекцію мгновеннаго импульса $\bar{J}$ на направленіе дифференціальнаго параметра $\bar{N}$ идеальной связи въ разсматриваемой точкѣ.

Наконецъ, аналитически и въ этомъ случаѣ можетъ быть выражено очевидною формулою

$$\mu = -\frac{\bar{J}\bar{N}}{N^2} = -\frac{J_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + J_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + J_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$

и можетъ быть $\gtrless 0$.

2). Если же мы имѣемъ неудерживающую идеальную связь

$$\varphi(x, y, z, t) \geq 0$$

и въ данный моментъ $\varphi > 0$, т. е. материальная точка не находится на поверхности удерживающей связи, то скорость такой точки не ограничена никакими условіями и потому при дѣйствіи на какую-либо мгновеннаго импульса $\bar{J}$ она мгновенно измѣнитъ свою скорость $\bar{v}$ въ данный моментъ въ новую скорость

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J}}{m},$$

какъ свободная м. т.; подобнымъ же образомъ, если въ данный моментъ $\varphi = 0$, т. е. м. т. находится на поверхности неудерживающей связи и скорость

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}$$

удовлетворяетъ условіямъ этой неудерживающей связи, т. е.

$$\bar{N}\bar{v}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \geq 0,$$

то импульса реакціи связи не появится, и м. т., какъ свободная, мгновенно измѣнитъ свою скорость $\bar{v}$ въ скорость

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}.$$

Если же при неудерживающей связи $\varphi = 0$ и

$$\bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} < 0,$$

т. е. скорость $\bar{v} + \frac{\bar{J}}{m}$ несовмѣстима со связью, то надо различать случаи упругихъ и неупругихъ неудерживающихъ связей.

При неупругой неудерживающ. связи появится мгновенный импульсъ

$$\bar{j} = \mu\bar{N},$$

которій, дѣйствуя совмѣстно съ даннымъ импульсомъ $\bar{J}$, мгновенно измѣнитъ скорость $\bar{v}$ несв. м. т. въ скорость

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{J}+\bar{j}}{m} = \bar{v} + \frac{\bar{J}+\mu\bar{N}}{m},$$

удовлетворяющую тому же условію, какъ при удержив. связи, т. е. равенству

$$\bar{N}\bar{v}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\bar{J}+\mu\bar{N}}{m}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

откуда опредѣлится коэффиціентъ мгновеннаго напряженія μ неупругой неудержив. идеальной связи

$$\mu = -\frac{\bar{J}\bar{N} + m\left(\bar{N}\bar{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{N^2} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(J_x+mv_x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(J_y+mv_y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(J_z+mv_z)+m\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},$$

причемъ при неудержив. связи

$$\mu = \int_t^{t+\vartheta} \lambda\, dt \geq 0,$$

ибо

$$\lambda \geq 0.$$

Если неудерживающая связь упруга, то полный актъ дѣйствія мгновенной силы разбивается на два акта, причемъ въ концѣ перваго акта мгновенный импульсъ $\bar{j}$ опредѣляется, какъ при неупругой связи, т. е. $\bar{j}_1 = \mu\bar{N}$, второй же актъ, который называютъ упругимъ послѣдствіемъ связи, сообщаетъ несв. м. т. импульсъ $\bar{j}_2 = \varepsilon\bar{j}_1$, гдѣ $\varepsilon \overset{\geq 0}{\leq 1}$ называется коэффиціентомъ возстановленія упругой связи и потому полный мгновенный импульсъ упругой неудержив. связи опредѣлится изъ равенства

$\bar{j} = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 = \bar{j}_1(1+\varepsilon) = \mu\bar{N}(1+\varepsilon)$; при $\varepsilon = 1$ связь назыв. идеально упругою.

Опредѣливъ такимъ образомъ мгновенный импульсъ

$$\bar{j} = \mu\bar{N}$$

удерживающей и неудерживающей идеальной связи при дѣйствіи на несв. м. т. мгновеннаго импульса $\bar{J}$, мы можемъ опредѣлить мгновенное измѣненіе кинетической энергіи несв. м. т.

Дѣйствительно,

$$K_1 - K = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\bar{v}_1 - \bar{v})(\bar{v}_1 + \bar{v}),$$

но

$$m v_1 - m v = \bar{J} + \bar{j} = \bar{J} + \mu \bar{\mathcal{N}}$$

и

$$\bar{v}_1 + \bar{v} = 2\bar{v} + \frac{\bar{J} + \bar{j}}{m} = 2\bar{v} + \frac{\bar{J} + \mu\bar{\mathcal{N}}}{m},$$

слѣдовательно

$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K} = \frac{(\bar{J} + \bar{j})^2}{2m} + (\bar{J} + \bar{j})\bar{v} =$$

$$= \frac{(\bar{J} + \mu\bar{\mathcal{N}})^2}{2m} + (\bar{J} + \mu\bar{\mathcal{N}})\bar{v},$$

причемъ послѣднія равенства и непосредственно очевидны на основаніи принципа освобожденія отъ связей при дѣйствіи мгновенныхъ силъ на несв. м. т. (см. мгновенное измѣненіе измѣненіе кинетической энергіи св. м. т. стр. 41.).

Примѣръ. Ударъ несв. м. т., связанной неудерживающею идеальною связью объ эту связь.

Положимъ, что м. т., будучи связана неупругою неудерживающею идеальною связью

$$\varphi(x, y, z, t) \geq 0$$

въ нѣкоторый моментъ t приходитъ на поверхность этой неудерживающей связи; этотъ моментъ опредѣлится изъ равенства

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

Если въ этотъ моментъ скорость $\bar{v}$ м. т. будетъ совмѣстима со связью, т. е. будетъ удовлетворять условію

$$\bar{\mathcal{N}}\bar{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \geq 0,$$

то со стороны связи не появится мгновеннаго импульса ея реакціи, и м. т. безъ толчка перейдетъ на поверхность связи, если же скорость м. т. въ этотъ моментъ не удовлетворяетъ вышенаписаннымъ условіямъ, т. е.

$$\bar{\mathcal{N}}\bar{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} < 0,$$

то такая скорость будетъ не совмѣстима со связью, и со стороны связи должна развиться мгновенная реакція, обозначимъ импульсъ которой черезъ

$$\bar{j} = \mu \bar{N},$$

по принципу освобожденія отъ связей при дѣйствіи мгновенныхъ силъ на несв. м. т., мы знаемъ, что несв. м. т. мгновенно измѣнитъ свою скорость $\bar{v}$ въ скорость

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \frac{\bar{j}}{m} = \bar{v} + \frac{\mu \bar{N}}{m},$$

удовлетворяющую условію (неупругой) неудерживающей связи, т. е.

$$\bar{N}\bar{v}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \bar{N}\left(\bar{v} + \frac{\mu \bar{N}}{m}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

откуда получимъ коэффиціентъ мгновеннаго напряженія неупругой неудерживающей связи:

$$\mu = -\frac{m\left(\bar{N}\bar{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{N^2} > 0$$

и

$$j = \mu N = -\frac{m\left(\bar{N}\bar{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{N},$$

слѣдовательно

$$K_1 - K = \frac{j^2}{2m} + \bar{j}\bar{v} = \frac{\mu^2 N^2}{2m} + \mu \bar{N}\bar{v}$$

Если неудерж. идеальная связь <u>упруга</u>, то полный актъ удара м. т. объ упругую неудерживающую связь дѣлится на два акта:

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2,$$

и импульсъ мгновенной реакціи неудерживающей упругой связи составится изъ двухъ импульсовъ:

$$\bar{j} = \bar{j}_1 + \bar{j}_2,$$

причемъ импульсъ j_1 за первый актъ удара опредѣляется по предыдущимъ формуламъ, какъ при неупру-

гой связи, т.е.

$$\bar{j}_1 = \mu \bar{N},$$

гдѣ

$$\mu = -\frac{m\left(\bar{N}\bar{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{N^2} > 0,$$

импульсъ же j_2 за второй актъ удара предполагается равнымъ $\varepsilon\bar{j}_1$, гдѣ $\varepsilon \gtrless 0$ есть коэффиціентъ возстановленія упругой идеальной связи и потому

$$\bar{j} = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 = (1+\varepsilon)\mu\bar{N};$$

слѣдовательно, при упругой неудерживающей связи

$$\bar{v}_1 - \bar{v} = \frac{\bar{j}}{m} = (1+\varepsilon)\mu\bar{N}$$

и

$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K} = \frac{j^2}{2m} + \bar{j}\bar{v} = \frac{(1+\varepsilon)^2\mu^2N^2}{2m} + (1+\varepsilon)\mu\bar{N}\bar{v}.$$

§12. Дифференціальныя уравненія движенія несв. м. т., связанной идеальными связями.

По общему закону количества ускоренія несв. м. т. мы знаемъ, что

$$m\bar{w} = \bar{F} + \bar{R},$$

гдѣ R есть равнодѣйствующая реакцій всѣхъ связей. Проектируя обѣ части этого геометрическаго равенства на три взаимноперпендикулярныя неподвижныя оси координатъ (O, x, y, z), мы придемъ къ тремъ равенствамъ

$$(*)\quad \begin{cases} mx'' = X + R_x \\ my'' = Y + R_y \\ mz'' = Z + R_z \end{cases}$$

аналитически выражающимъ общій законъ количества ускоренія несв. м. т.

Положимъ теперь, что

1) м. т. связана одною идеальною удерживающею или неудерживающею связью:

$$\varphi(x, y, z, t) \geq 0,$$

тогда

$$\bar{R} = \lambda \bar{N}$$

и потому

$$R_x = \lambda N_x = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$R_y = \lambda N_y = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$R_z = \lambda N_z = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

подставивъ эти выраженія въ равенства (*) получимъ три дифференціальныхъ уравненія движенія несв. м. т., связанной одною идеальною связью:

$$(**) \begin{cases} mx'' = X + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ my'' = Y + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ mz'' = Z + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

присоединивъ къ которымъ уравненіе связи, будемъ имѣть четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ функцій времени t: x, y, z, λ, причемъ для рѣшенія этихъ уравненій надо поступать такъ же, какъ мы поступали въ частномъ случаѣ въ §4 при опредѣленіи движенія несв. м. т. по идеально гладкой неизмѣняемой и неподвижной поверхности. Если при неудерживающей связи, координаты м. т. въ какой-нибудь моментъ удовлетворяютъ неравенству

$$\varphi(x, y, z, t) > 0,$$

то связь не оказываетъ реакціи и R и λ равны

нуло.

2) м. т. связана двумя идеальными связями

$$\varphi_1(x, y, z, t) \geqslant 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) \geqslant 0$$

въ этомъ случаѣ

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \lambda_1 \bar{N}_1 + \lambda_2 \bar{N}_2$$

и потому

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$R_y = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

$$R_z = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.$$

Подставивъ эти выраженія въ равенства (*), придемъ къ тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія несв. м. т., связанной двумя идеальными связями

$$(***)\quad \left\{\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ my'' &= Y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ mz'' &= Z + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

присоединивъ къ которымъ два уравненія связей, будемъ имѣть пять уравненій для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ функцій времени t

$$x, y, z, \lambda_1, \lambda_2,$$

причемъ для рѣшенія этихъ уравненій надо поступать подобно тому, какъ мы поступали въ частномъ случаѣ въ §6 при неизмѣняемыхъ связяхъ, т.е. исключить предварительно изъ трехъ равенствъ (***) множители λ_1 и λ_2.

Если координаты несв. м. т. въ какой-нибудь моментъ времени удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\varphi_1(x, y, z, t) > 0$$

или

$$\varphi_2(x, y, z, t) > 0$$

то соотвѣтствующіе коэффиціенты λ_1 и λ_2 этихъ связей равны нулю.

3) м. т. связана тремя идеальными связями

$$\varphi_1(x, y, z, t) \geq 0$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) \geq 0$$

$$\varphi_3(x, y, z, t) \geq 0$$

въ этомъ случаѣ

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \lambda_1 \bar{N}_1 + \lambda_2 \bar{N}_2 + \lambda_3 \bar{N}_3$$

и потому

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}$$

$$R_y = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}$$

$$R_z = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}$$

подставивъ эти выраженія въ равенство (*), мы придемъ къ тремъ равенствамъ:

$$
(****)\quad \begin{cases} mx'' = X + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \lambda_3 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \\ my'' = Y + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \lambda_3 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \\ mz'' = Z + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \lambda_3 \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial z}, \end{cases}
$$

присоединивъ къ которымъ три уравненія удерживающихъ связей, будемъ имѣть шесть уравненій между шестью функціями времени $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; въ этомъ случаѣ движеніе несв. м. т. вполнѣ опредѣляется тремя уравненіями удерживающихъ связей:

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

$$\varphi_3(x, y, z, t) = 0$$

опредѣливъ изъ которыхъ x, y, z въ функціи времени t и взявъ отъ этихъ функцій вторыя производныя x'', y'', z'', изъ равенствъ (****) опредѣлимъ коэффиціенты напряженій $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ каждой изъ связей въ отдѣльности.

Если одна или двѣ функціи неудерживающихъ связей въ данный моментъ пріобрѣтаютъ значенія >0, то соотвѣтствующіе имъ коэффиціенты напряженій равны нулю, и мы приходимъ къ одному изъ предыдущихъ случаевъ.

Замѣтимъ наконецъ, что полная работа $T_{t_0}^{t}(\bar{R})$ реакціи <u>идеальной</u> связи вообще не равна нулю, ибо

$$T_{t_0}^{t}(\bar{R}) = \int_{t_0}^{t} (R_x dx + R_y dy + R_z dz) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right),$$

причемъ дифференцируя равенство:

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

получимъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = 0$$

слѣдовательно

$$T_{t_0}^{t}(\bar{\mathfrak{R}}) = -\int_{t_0}^{t} \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt \gtrless 0,$$

но при неизмѣняемой связи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

и потому

$$T_{t_0}^{t}(\bar{\mathfrak{R}}) = 0.$$

Поэтому при дѣйствіи на несв. м. т. консервативной силы при неизмѣняемыхъ идеальныхъ связяхъ всегда имѣетъ мѣсто законъ сохраненія полной энергіи несв. м. т. или интегралъ живой силы ея дифференціальныхъ уравненій:

$$\mathcal{K} - \mathcal{U} = h.$$

при измѣняемыхъ же связяхъ этотъ законъ не имѣетъ мѣста и соотвѣтствующаго ему интеграла тоже нѣтъ.

§13. Лагранжевы уравненія движенія несв. м. т., связанной одною или двумя идеальными связями, выраженныя въ независимыхъ параметрахъ.

Три координаты (x, y, z) св. м. т. не ограничены никакими условіями и потому про св. м. т. говорятъ, что она обладаетъ тремя степенями свободы, причемъ движеніе св. м. т., какъ мы знаемъ, можетъ быть выражено посредствомъ трехъ произвольныхъ

функцій:

$$q_1 = \psi_1(t, x, y, z), \quad q_2 = \psi_2(t, x, y, z) \qquad \text{.....}(*)$$

$$q_3 = \psi_3(x, y, z, t)$$

или независимыхъ параметровъ, опредѣляющихъ движеніе м. т., для чего достаточно рѣшить уравненія (*) относительно координатъ (x, y, z) м. т.

$$x = f_1(t, q_1, q_2, q_3)$$

$$y = f_2(t, q_1, q_2, q_3) \qquad \text{........}(**)$$

$$z = f_3(t, q_1, q_2, q_3)$$

Если же м. т. связана одною связью

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

то только двѣ изъ ея координатъ можно задать произвольно, третья же опредѣлится изъ уравненія связи, поэтому про такую м. т. говорятъ, что она имѣетъ <u>двѣ степени</u> свободы, причемъ, подставивъ въ уравненіе связи выраженія (**) координатъ м. т. черезъ параметры, мы убѣдимся, что параметры q_1, q_2, q_3 такой м. т. тоже будутъ между собою связаны и только два изъ нихъ могутъ быть независимыми, слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ

$$x = f_1(t, q_1, q_2)$$

$$y = f_2(t, q_1, q_2)$$

$$z = f_3(t, q_1, q_2)$$

т. е. координаты м. т. выражаются посредствомъ <u>двухъ</u> независимыхъ параметровъ q_1, q_2.

Предположивъ въ послѣднихъ равенствахъ время

t, явно въ нихъ входящее, постояннымъ, а параметры q_1, q_2 произвольными функціями времени t, мы получимъ движенія м. т., удовлетворяющія уравненію данной связи, если время t, явно въ него входящее, начиная съ даннаго момента, предположить постояннымъ и потому, взявъ въ такомъ предположеніи производныя отъ выраженій координатъ:

$$x' = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} q_2' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2',$$

$$y' = \frac{\partial f_2}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} q_2' = \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2',$$

$$z' = \frac{\partial f_3}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} q_2' = \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2',$$

мы получимъ проекціи <u>виртуальныхъ скоростей</u> несв. м. т. въ данный моментъ, помноживъ которыя на безконечно малую величину δt, найдемъ выраженія

$$\delta_x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$\delta_y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2$$

$$\delta_z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2$$

проекцій <u>виртуальныхъ отклоненій</u> несв. м. т., соотвѣтствующихъ произвольнымъ безконечно малымъ измѣненіямъ или варіаціямъ:

$$\delta q_1 = q_1' \delta t \quad , \quad \delta q_2 = q_2' \delta t$$

независимыхъ параметровъ.

Подобнымъ же образомъ, если м. т. связана двумя связями

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0,$$

то только одна изъ ея координатъ можетъ быть задана произвольно, остальныя же двѣ опредѣлятся изъ уравненій связей, поэтому про такую точку говорятъ, что она обладаетъ одною степенью свободы; въ этомъ случаѣ параметры q_1, q_2, q_3 будутъ связаны двумя уравненіями, и координаты м.т. могутъ быть выражены въ функціяхъ лишь одного независимаго параметра q:

$$x = f_1(t, q),$$
$$y = f_2(t, q),$$
$$z = f_3(t, q),$$

причемъ подобно предыдущему убѣдимся, что проекціи виртуальныхъ отклоненій такой несв. м.т. на оси (O, x, y, z) при безконечно маломъ измѣненіи или варіаціи δq независимаго параметра q выразятся равенствами

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta q,$$
$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q}\,\delta q,$$
$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q}\,\delta q,$$

Найдемъ теперь дифференціальныя уравненія движенія несв. м. т., связанной одною удерживающею идеальною связью

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

выраженныя въ независимыхъ параметрахъ q_1, q_2, удовлетворяющихъ равенствамъ

$$x = f_1(t, q_1, q_2),$$
$$y = f_2(t, q_1, q_2),$$
$$z = f_3(t, q_1, q_2).$$

Обозначивъ для краткости черезъ q_k ($k = 1, 2$) одинъ изъ этихъ параметровъ, помножимъ дифференціальныя уравненія движенія такой несв. м. т.

$$m x'' = \mathfrak{X} + \mathfrak{R}_x$$

$$m y'' = \mathfrak{Y} + \mathfrak{R}_y$$

$$m z'' = \mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_z$$

соотвѣтственно на частныя производныя

$$\frac{\partial x}{\partial q_k} = \frac{\partial f_1}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_k} = \frac{\partial f_2}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_k} = \frac{\partial f_3}{\partial q_k},$$

и сложимъ почленно полученныя равенства, тогда мы придемъ къ двумъ равенствамъ:

$$\mathfrak{K}_k = \Theta_k \quad (k = 1, 2),$$

въ которыхъ

$$\mathfrak{K}_k = m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_k} + y''\frac{\partial y}{\partial q_k} + z''\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k}$$

и

$$\Theta_k = \Theta_k(\bar{F}) + \Theta_k(\bar{\mathfrak{R}}),$$

причемъ

$$\Theta_k(\bar{F}) = \mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \mathfrak{Y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \mathfrak{Z}\frac{\partial z}{\partial q_k}$$

и

$$\Theta_k(\bar{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{R}_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + \mathfrak{R}_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + \mathfrak{R}_z\frac{\partial z}{\partial q_k},$$

но на стр. 75 мы доказали, что произведеніе

$$\Theta_k(\bar{F})\,\delta q_k = \delta_k T(\bar{F})$$

есть виртуальная работа м. т. при измѣненіи пара-

метра q_k на величину δq_k, слѣдовательно

$$Q_k(\mathcal{R})\,\delta q_k = \delta_k T(\mathcal{R}) = 0,$$

т.е.

$$Q_k(\mathcal{R}) = 0$$

такъ какъ виртуальная работа силы реакціи <u>идеальной</u> связи по опредѣленію равна нулю. Въ справедливости послѣдняго равенства

$$Q_k(\mathcal{R}) = 0$$

не трудно и непосредственно убѣдиться, ибо при идеальной связи:

$$\mathcal{R}_x = \lambda \mathcal{N}_x = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\mathcal{R}_y = \lambda \mathcal{N}_y = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\mathcal{R}_z = \lambda \mathcal{N}_z = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

слѣдовательно

$$Q_k(\mathcal{R}) = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial q_k} = 0,$$

такъ какъ выраженія координатъ черезъ независимые параметры, подставленныя въ функцію связи, обращають ее <u>тождественно</u> въ нуль.

Итакъ, мы получили два уравненія Лагранжа для несв. м. т., связанной одною идеальною связью:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k'}\right)' + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2).$$

въ которыхъ

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \mathcal{K}(t, q_1, q_2, q_1', q_2')$$

есть кинетическая энергія несв. м. т., выраженная въ параметрахъ q_1, q_2 и ихъ производныхъ q_1', q_2', и

$$Q_k = \mathcal{X}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \mathcal{Y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \mathcal{Z}\frac{\partial z}{\partial q_k},$$

причемъ

$$Q_k \delta q_k = \delta_k T(\bar{F}) = \bar{F}\, \overline{\delta_k S} =$$

$$= F \delta_k S \cos(F, \delta_k S)$$

есть виртуальная работа равнодѣйствующей

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., при измѣненіи лишь одного параметра q_k на безконечно малую величину δq_k.

Если м. т. связана двумя идеальными связями

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

и координаты ея выражены черезъ независимый параметръ q:

$$x = f_1(t, q),$$

$$y = f_2(t, q),$$

$$z = f_3(t, q),$$

то, поступая подобно предыдущему, придемъ къ уравненію Лагранжа вида

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'}\right)' - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} = Q,$$

гдѣ

$$\mathcal{K} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \mathcal{K}(t, q, q')$$

есть кинетическая энергія несв. м. т., выраженная черезъ параметръ q и его производную q', и

$$Q = X \frac{\partial x}{\delta q} + Y \frac{\partial y}{\delta q} + Z \frac{\partial z}{\delta q},$$

причемъ

$$Q\,\delta q = \delta T(F) = \overline{F}\,\overline{\delta s} = F\,\delta s \cos(F, \delta s)$$

есть виртуальная работа равнодѣйствующей

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., при измѣненіи параметра q на безконечно малую величину δq.

Если наконецъ равнодѣйствующая [Сила консервативна

$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$

всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., имѣетъ силовую функцію, т. е.

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

то въ такомъ случаѣ

$$Q_k = X\frac{\partial x}{\partial q_k} + Y\frac{\partial y}{\partial q_k} + Z\frac{\partial z}{\partial q_k} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k} = \frac{\partial u}{\partial q_k},$$

$$(k = 1, 2)$$

а во второмъ случаѣ

$$Q = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q}$$

и уравненія Лагранжа для несв. м. т. при одной идеальной связи будутъ вида

$$\left(\frac{\partial K}{\partial q'_k}\right)' = \frac{\partial (K + u)}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2)$$

а при двухъ идеальныхъ связяхъ

$$\left(\frac{\partial K}{\partial q'}\right)' = \frac{\partial (K + u)}{\partial q}$$

Такого же вида будутъ уравненія Лагранжа для несв. м. т. связанной идеальными связями если

равнодѣйствующая

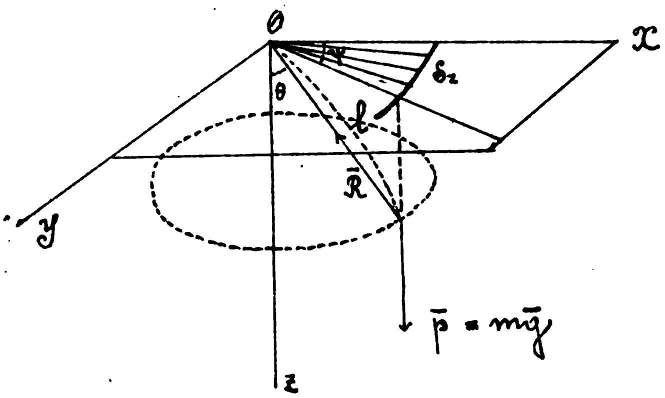
$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ активныхъ силъ будетъ консервативная сила, т. е. будетъ обладать потенціаломъ $U(x, y, z)$, но въ такомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, функція U не должна явно зависѣть отъ времени t.

Примѣры.

1) Дифференціальныя уравненія движенія коническаго маятника.

Обозначивъ черезъ l длину нити коническаго маятника, причемъ за независимые параметры углы θ и ψ полярныхъ координатъ подвѣшенной м.т., тогда мы получимъ слѣдующія очевидныя выраженія этихъ координатъ черезъ параметры:



$$\begin{cases} x = l \sin\theta \cos\psi \\ y = l \sin\theta \sin\psi \\ z = l \cos\theta \end{cases}$$

слѣдовательно

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$

$$= \frac{m}{2}(l^2 \sin^2\theta \, \psi'^2 + l^2 \theta'^2),$$

причемъ послѣднее выраженіе для K и непосредственно очевидно, если разсматривать скорость м.т., какъ составную изъ двухъ скоростей:

$$\bar{v} = \overline{l\theta'} + \overline{l\sin\theta\,\psi'}$$

(см. стр. 80), направленныхъ по осямъ A_θ и A_ψ полярныхъ координатъ.

Кромѣ того, потенціалъ силы тяжести, если за исходный пунктъ принять начало координатъ O, выразится равенствами:

$$u = mgz = mgl\cos\theta,$$

откуда получимъ

$$\frac{\partial K}{\partial \psi'} = ml^2\sin^2\theta\,\psi'$$

и

$$\frac{\partial (K + u)}{\partial \psi} = 0;$$

слѣдовательно

$$(ml^2\sin^2\theta\,\psi')' = 0,$$

и потому

$$ml^2\sin^2\theta\,\psi' = C_1;$$

этотъ интегралъ выражаетъ имѣющій здѣсь мѣсто законъ площадей

$$S'_z = C$$

въ плоскости, перпендикулярной къ оси Oz, такъ сила сила реакціи нити проходитъ черезъ точку O; т.е. черезъ ось Oz, а сила тяжести mg параллельна этой оси, причемъ

$$S'_z = \text{Пред}\,\frac{\Delta S_z}{\Delta t} = \text{Пред}\,\frac{(l\sin\theta)^2\Delta\psi}{2\Delta t} =$$

$$= \frac{l^2\sin^2\theta\,\psi'}{2} = \frac{C_1}{2m}$$

т.е.

$$C = \frac{C_1}{2m}$$

Изъ найденнаго интеграла ясно, что при

$$\theta = Const.$$

производная

$$\psi' = \frac{C_1}{2ml^2\sin^2\theta} = Const.,$$

и

$$v = l\sin\theta\,\psi' = Const.,$$

т.е. если конический маятник описывает круговую коническую поверхность, то такое его движение всегда совершается равномерно.

Для получения второго уравнения между параметрами ψ и θ найдем частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \theta'} = ml^2\theta'$$

и

$$\frac{\partial(\mathcal{K}+u)}{\partial\theta} = ml^2\sin\theta\cos\theta\,\psi'^2 - mlg\sin\theta$$

откуда получим второе уравнение:

$$(ml^2\theta')' = ml^2\sin\theta\cos\theta\,\psi'^2 - mgl\sin\theta$$

или

$$l\theta'' = l\sin\theta\cos\theta\,\psi'^2 - g\sin\theta$$

Это уравнение, воспользовавшись равенством

$$\psi' = \frac{C_1}{ml^2\sin^2\theta},$$

можно переписать под видом

$$l\theta'' = \frac{C_1^2\cos\theta}{m^2l^3\sin^3\theta} - g\sin\theta$$

и затем, помноживъ обе части соответственно на

$$\theta' dt = d\theta,$$

проинтегрировать, тогда мы получим еще один интеграл

$$l\frac{(\theta')^2}{2} = \frac{C_1^2}{2m^2l^3\sin^2\theta} + g\cos\theta + C_2,$$

подставивъ въ который вмѣсто постоянной C_1 ея выраженіе изъ перваго интеграла, придемъ къ равенству

$$\frac{m}{2}\left[(l\theta')^2 + l^2\sin^2\theta\,\psi'^2\right] - mg\cos\theta = mlC_2,$$

выражающему имѣющій здѣсь мѣсто законъ сохраненія полной энергіи

$$K - u = h,$$

причемъ

$$h = mlC_2.$$

Оба эти интеграла можно было бы написать и непосредственно, не исходя изъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка движенія коническаго маятника, и мы сразу получили бы два дифференціальныя уравненія <u>перваго</u> порядка:

$$\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = a,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = b\cos\theta + c,$$

гдѣ черезъ a, b, c мы для краткости обозначили постоянныя величины

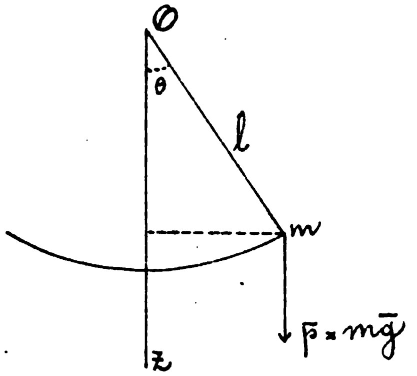
$$a = \sin^2\theta_0\,\psi'_0$$

$$b = \frac{2g}{l}$$

$$c = (\theta'_0)^2 + \sin^2\theta_0\,\psi'^2_0 - \frac{2g}{l}\cos\theta_0$$

опредѣляющіяся изъ начальныхъ обстоятельствъ движенія коническаго маятника.

<u>2)</u>. Дифференціальныя уравненія движенія кругового маятника.



Обозначивъ черезъ θ уголъ, составленный нитью кругового маятника съ вертикальною осью OZ и черезъ l длину нити, получимъ:

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(l\theta')^2}{2} = \frac{ml^2\theta'^2}{2},$$

$$\mathcal{U} = mgz = mgl\,\mathrm{Cos}\,\theta,$$

откуда найдемъ

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \theta'} = ml^2\theta'$$

и

$$\frac{\partial(\mathcal{K} + \mathcal{U})}{\partial \theta} = -mgl\,\mathrm{Sin}\,\theta,$$

и дифференціальное уравненіе движенія кругового маятника, по сокращеніи на ml, напишется подъ видомъ:

$$l\theta'' = -g\,\mathrm{Sin}\,\theta,$$

это же уравненіе можно и прямо написать по закону момента количества ускоренія кругового маятника относительно точки подвѣса O.

Помноживъ обѣ части написаннаго уравненія соотвѣтственно на

$$\theta' dt = d\theta$$

и интегрируя, придемъ къ равенству:

$$\frac{l(\theta')^2}{2} = g\,\mathrm{Cos}\,\theta + C_1$$

выражающему имѣющій здѣсь мѣсто законъ сохраненія полной энергіи, что помноживъ это равенство на ml, получимъ:

$$\frac{m}{2}(l\theta')^2 - mgl\cos\theta = mlC_1$$

или

$$\mathcal{K} - \mathcal{U} = h$$

гдѣ

$$h = mlC_1$$

Замѣтимъ наконецъ, что движеніе кругового маятника есть частный случай движенія коническаго маятника при $\psi' = 0$, и потому всѣ формулы для кругового маятника могутъ быть получены изъ соотвѣтствующихъ формулъ коническаго маятника, если въ этихъ послѣднихъ положить $\psi' = 0$.

§14. Начало Даламбера для несв. мат. точки.

Если геометрическое равенство

$$m\bar{w} = \bar{F} + \bar{\mathcal{R}} \quad \ldots\ldots(*)$$

выражающее общій законъ количества ускоренія несв. м. т., переписать подъ видомъ:

$$\bar{F} + \bar{\mathcal{R}} - m\bar{w} = 0,$$

или

$$\bar{F} + \bar{\mathcal{R}} + \bar{I} = 0,$$

гдѣ

$$\bar{I} = -m\bar{w}.$$

есть сила инерціи несв. м. т., то послѣднему равенству можно дать слѣдующее толкованіе.

При движеніи несв. м. т. равнодѣйствующая

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ приложенныхъ къ ней активныхъ силъ $\bar{F}_i$, равнодѣйствующая

$$\bar{R} = \Sigma \bar{R}_i$$

реакцій всѣхъ связей или всѣхъ приложенныхъ къ ней пассивныхъ силъ и сила инерціи несв. м. т.

$$\bar{I} = - m\bar{w},$$

если эту послѣднюю фиктивно приложить къ самой м. т., взаимно уравновѣшиваются; слѣдовательно, если несв. м. т. въ данный моментъ предположить свободною и пребывающею въ покоѣ и приложить къ ней такія три силы, то м. т. останется въ покоѣ.

Въ этомъ толкованіи геометрическаго равенства

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{I} = 0 \quad \ldots\ldots (^{**})$$

и заключается начало Даламбера для несв. м. т., приводящее вопросы динамики несв. м. т. къ вопросамъ статики св. м. т., причемъ это начало есть лишь другое толкованіе общаго закона количества ускоренія несв. м. т. (*), ибо равенство (**) равносильно равенству (*).

Проектируя равенство (**) на три взаимно перпендикулярныя неподвижныя оси координатъ (O, x, y, z), получимъ три равенства

$$\begin{cases} X + R_x + I_x = 0 \\ Y + R_y + I_y = 0 \\ Z + R_z + I_z = 0 \end{cases}$$

равносильныя дифференціальнымъ уравненіямъ несв. м. т., ибо

$$I_x = -mx'', \quad I_y = -my'', \quad I_z = -mz''$$

Разложивъ наконецъ равнодѣйствующую

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ активныхъ силъ, приложенныхъ къ несв. м. т., на двѣ составляющія

$$\bar{F} = m\bar{u} + (\bar{F} - m\bar{u}) = m\bar{u} + \bar{\mathfrak{P}},$$

а именно: на

1) движущую силу $m\bar{u}$ несв. м. т. и

2) на силу
$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{F} - m\bar{u} = -\bar{\mathfrak{R}},$$

уравновѣшивающуюся реакціей преграды, ибо
$$\bar{\mathfrak{P}} + \bar{\mathfrak{R}} = 0,$$

Даламберъ назвалъ эту послѣднюю силу

$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{F} - m\bar{u}$$

<u>потерянною силою</u> несв. м. т., такъ какъ эта сила, уравновѣшиваясь реакціей связи, не вліяетъ на движеніе несв. м. т.

Введя это понятіе о потерянной силѣ несв. м. т.

$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{F} - m\bar{u},$$

геометрически равной давленію несв. м. т. на связь, Даламберъ высказалъ свое начало въ слѣдующемъ видѣ:

При движеніи несв. м. т. ея потерянная сила

$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{F} - m\bar{u}$$

въ каждой моментъ уравновѣшивается реакціей связи, т. е.

$$\bar{\mathfrak{P}} + \bar{\mathfrak{R}} = 0, \text{ или } \bar{\mathfrak{P}} = -\bar{\mathfrak{R}}.$$

§15. Начало виртуальной работы и равенство Лагранжа для несв. м. т., связанной идеальными связями.

По началу Даламбера мы имеем геометрическія равенства

$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{F} - m\bar{w} = -\bar{\mathfrak{R}};$$

помноживъ обѣ члены этихъ геометрическихъ равенствъ геометрически на одно изъ виртуальныхъ отклоненій $\delta\bar{s}$ несв. м. т., мы придемъ къ равенствамъ:

$$\bar{\mathfrak{P}}\,\delta\bar{s} = (\bar{F} - m\bar{w})\,\delta\bar{s} = -\bar{\mathfrak{R}}\,\delta\bar{s} = 0,$$

ибо виртуальная работа $\bar{\mathfrak{R}}\,\delta\bar{s}$ реакціи идеальной связи по опредѣленію такихъ связей, равна нулю.

Такимъ образомъ, мы можемъ высказать слѣдующее общее начало, называемое началомъ виртуальной работы для несв. м. т., связанной идеальными связями.

При движеніи несв. м. т., связанной идеальными связями, виртуальная работа потерянной силы въ каждый моментъ равна нулю, что и выражается равенствами

$$\bar{\mathfrak{P}}\,\delta\bar{s} = 0, \quad \text{или} \quad (\bar{F} - m\bar{w})\,\delta\bar{s} = 0.$$

Выразивъ это начало аналитически въ проекціяхъ на три взаимно перпендикулярныя неподвижныя оси координатъ $(O, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ придемъ къ равенству Лагранжа

$$(X - mx'')\,\delta x + (Y - my'')\,\delta y + (Z - mz'')\,\delta z = 0 \;\ldots\; (*)$$

для несв. м. т.; въ этомъ равенствѣ $\delta x, \delta y, \delta z$ суть проекціи виртуальныхъ отклоненій δs несв. м. т. на оси координатъ $(O, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, причемъ, какъ мы знаемъ, если

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

есть уравнение связи, то указанныя проекціи удовлетворяютъ равенству

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0;$$

если наконецъ м. т. связана двумя связями

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0,$$

то проекціи виртуальныхъ отклоненій должны удовлетворять двумъ равенствамъ:

$$\delta\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\delta z = 0$$

и

$$\delta\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\delta z = 0$$

проекціи виртуальныхъ отклоненій $(\delta x, \delta y, \delta z)$ несв. м. т. въ данный моментъ для краткости мы будемъ называть еще <u>варіаціями ея координатъ</u> (x, y, z).

Изъ равенства Лагранжа (*) для несв. м. т. могутъ быть <u>получены</u> какъ <u>дифференціальныя уравненія</u> несв. м. т. въ прямоугольныхъ координатахъ (x, y, z), такъ и въ <u>независимыхъ параметрахъ</u>, для чего существуютъ слѣдующіе три пріема.

1) <u>Способъ исключенія зависимыхъ варіацій координатъ.</u>

При существованіи одной идеальной связи

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$

варіаціи координатъ несв. м. т. должны удовлетворять равенству

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0;$$

слѣдовательно одну изъ варіацій координатъ напр. δz можно выразить черезъ двѣ другія $\delta x, \delta y$, которыя въ такомъ случаѣ будутъ вполнѣ произвольны, и мы получимъ равенство

$$\delta z = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\delta x - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\delta y;$$

и подставляя это выраженіе въ равенство Лагранжа (*), придемъ къ равенству:

$$\left[(X - mx'') - (Z - mz'')\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\right]\delta x +$$

$$+\left[(Y - my'') - (Z - mz'')\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\right]\delta y = 0,$$

остающемуся справедливымъ при произвольныхъ безконечно малыхъ величинахъ $\delta x, \delta y$; слѣдовательно, коэффиціенты при этихъ варіаціяхъ необходимо должны быть равны нулю и мы придемъ къ двумъ равенствамъ

$$\frac{X - mx''}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{Y - my''}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{Z - mz''}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}},$$

присоединивъ къ которымъ уравненіе связи, получимъ три уравненія движенія несв. м. т., связанной одною идеальною связью.

Подобнымъ же образомъ въ случаѣ существованія двухъ идеальныхъ связей

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

варіаціи координатъ будутъ связаны двумя равен-

ствами

$$\delta\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\delta z = 0,$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\delta z = 0,$$

изъ которыхъ двѣ зависимыя варіаціи напр. δy, δz можно выразить черезъ третью δx, которая въ такомъ случаѣ будетъ вполнѣ произвольною, причемъ мы получимъ:

$$\delta y = \frac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}}\,\delta x,$$

$$\delta z = \frac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}}\,\delta x.$$

Подставивъ наконецъ эти выраженія въ равенство Лагранжа (*) и сократививъ его на δx, придемъ къ равенству

$$\left(X - mx''\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) +$$
$$+ \left(Y - my''\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right) +$$
$$+ \left(Z - mz''\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) = 0,$$

присоединивъ къ которому два уравненія связей, получимъ три уравненія движенія несв. м. т., связанной двумя идеальными связями.

2.) Способъ введенія произвольныхъ множителей Лагранжа.

Вмѣсто способа исключенія зависимыхъ варіацій координатъ черезъ независимыя Лагранжъ предложилъ способъ введенія произвольныхъ множителей, который состоитъ въ слѣдующемъ.

При движеніи несв. м. т., связаннаго одною идеальною связью

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

варіаціи координатъ несв. м. т. связаны, какъ мы знаемъ, уравненіемъ:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0;$$

помножимъ это равенство на произвольный множитель λ и сложимъ почленно съ равенствомъ Лагранжа (*), тогда мы придемъ къ равенству:

$$\left(X - mx'' + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y - my'' + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\delta y +$$

$$+\left(Z - mz'' + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\delta z = 0,$$

въ которомъ $\delta x, \delta y, \delta z$ связаны между собою вышенаписаннымъ равенствомъ, такъ что одна изъ этихъ проекцій напр δz можетъ быть выражена черезъ первыя двѣ: δx, δy, которыя въ такомъ случаѣ будутъ вполнѣ произвольны.

Но воспользовавшись произвольностью введеннаго множителя λ, мы всегда можемъ такъ его подобрать, что коэффиціентъ при зависимой проекціи δz обратится въ нуль, послѣ чего въ равенствѣ останутся лишь члены, заключающіе произвольныя безконечно малыя проекціи δx, δy; слѣдовательно, для

возможности существованія такого равенства необходимо, чтобы коэффиціенты при проекціяхъ $\delta x, \delta y$ были равны нулю и мы придемъ къ тремъ равенствамъ:

$$X - mx'' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$Y - my'' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$Z - mz'' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

присоединивъ къ которымъ уравненіе связи

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

получимъ четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ функцій x, y, z, λ, введенныхъ нами въ §12 непосредственно; причемъ множитель λ будетъ коэффиціентомъ напряженія связи.

Подобнымъ же образомъ при существованіи двухъ идеальныхъ связей:

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

вариціи координатъ связаны, какъ мы знаемъ, двумя равенствами

$$\delta\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\delta z = 0$$

и

$$\delta\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\delta z = 0$$

Помножимъ эти равенства соотвѣтственно на произвольныхъ множителей λ_1, λ_2 и сложимъ ихъ почленно съ равенствомъ Лагранжа (*), тогда мы придемъ къ равенству

$$\left(X - mx'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y - my'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) +$$

$$+\left(Z - mz'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)\delta z = 0,$$

въ которомъ $\delta x, \delta y, \delta z$ связаны между собою двумя вышенаписанными равенствами и потому двѣ изъ этихъ проекцій напр. $\delta y, \delta z$ суть функціи третьей δx, которая будетъ въ такомъ случаѣ вполнѣ произвольною.

Но воспользовавшись произвольностью введенныхъ нами двухъ множителей λ_1, λ_2, ихъ всегда можно такъ подобрать, что коэффиціенты при зависимыхъ проекціяхъ $\delta y, \delta z$ обратятся въ нули, послѣ чего въ равенствѣ останется лишь одинъ членъ съ произвольнымъ безконечно малымъ множителемъ δx; слѣдовательно, коэффиціентъ при этомъ множителѣ долженъ тоже обратиться въ нуль. и мы придемъ къ тремъ равенствамъ:

$$X - mx'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0,$$

$$Y - my'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0,$$

$$Z - mz'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0,$$

выведеннымъ нами въ §12 непосредственно, присоединивъ къ которымъ два ур.-нія связей

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0,$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0,$$

получимъ пять уравненій для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ функцій: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$, причемъ множители λ_1, λ_2 будутъ коэффиціентами напряженій соотвѣтствующихъ имъ связей.

3) Способъ введенія независимыхъ параметровъ.

Если матеріальная точка связана одною идеальною связью

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

то она обладаетъ двумя степенями свободы, и ея координаты могутъ быть выражены черезъ два независимыхъ параметра q_1, q_2:

$$x = f_1(t, q_1, q_2),$$

$$y = f_2(t, q_1, q_2),$$

$$z = f_3(t, q_1, q_2),$$

причемъ проекціи виртуальныхъ отклоненій выразятся въ такомъ случаѣ, какъ мы доказали, равенствами

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2,$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2,$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2,$$

въ которыхъ δq_1 и δq_2 суть произвольныя безконечно малыя величины.

Подставивъ эти выраженія въ равенство Лагранжа (*), мы придемъ къ равенству:

$$(Q_1 - K_1)\delta q_1 + (Q_2 - K_2)\delta q_2 = 0,$$

въ которомъ δq_1 и δq_2 суть произвольныя безконечно малыя величины, поэтому необходимо, чтобы коэффиціенты при нихъ въ отдѣльности были равны нулю, т.е.

$$Q_1 - K_1 = 0$$

и

$$Q_2 - K_2 = 0$$

или короче

$$Q_k = K_k \quad \text{гдѣ} \quad k = 1, 2.$$

причемъ, какъ было доказано въ §8,

$$K_k = m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_k} + y''\frac{\partial y}{\partial q_k} + z''\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k'}\right)' - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k},$$

гдѣ

$$\mathcal{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) = \mathcal{K}\left(t, q_1, q_2, q_1', q_2'\right)$$

есть кинетическая энергія несв. м. т., выраженная въ параметрахъ q_1, q_2 ихъ производныхъ q_1', q_2'.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ извѣстнымъ намъ уравненіямъ Лагранжа для несв. м. т., связанной одною идеальною связью:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k'}\right)' = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_k} + Q_k, \quad k = 1, 2,$$

выведеннымъ нами непосредственно въ §18.

Подобнымъ же образомъ, если несв. м. т. связана двумя идеальными связями

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0$$

и

$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

то несв. м. т. обладаетъ лишь одною степенью свободы и координаты такой несв. м. т. могутъ быть выражены въ функціяхъ отъ одного независимаго параметра q_1:

$$x = f_1(t, q_1),$$

$$y = f_2(t, q_1),$$

$$z = f_3(t, q_1),$$

причемъ проекціи виртуальныхъ отклоненій, какъ мы доказали, выразятся въ такомъ случаѣ равенствами:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1.$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство Лагранжа, придемъ къ равенству

$$(Q_1 - K_1)\delta q_1 = 0$$

или

$$K_1 = Q_1 ,$$

гдѣ

$$K_1 = m\left(x''\frac{\partial x}{\partial q_1} + y''\frac{\partial y}{\partial q_1} + z''\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \left(\frac{\partial K}{\partial q_1'}\right)' - \frac{\partial K}{\partial q_1}$$

и

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}$$

Положивъ наконецъ въ этихъ равенствахъ для простоты $q_1 = q$, снова приходимъ къ выведенному нами въ §13 уравненію Лагранжа для несв. м. т., связанной двумя идеальными связями:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial q'}\right)' - \frac{\partial K}{\partial q} = Q ,$$

гдѣ

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = K(t, q, q')$$

есть кинетическая энергія несв. м. т., выраженная черезъ независимый параметръ q и его производную q' и

$$Q = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} .$$

IV Динамика относительнаго движенія м. т. по отношенію къ движущейся неизмѣняемой средѣ.

§ I. Динамика относительнаго движенія свободной м. т.

По общему закону количества ускоренія св. м. т.

$$m\bar{u} = \bar{F}.$$

Если теперь мы наблюдаем относительное движение такой м. т. по отношению къ движущейся неизменяемой среде, то, какъ извѣстно,

$$\bar{u} = \bar{u}_o = \bar{u}_r + \bar{u}_e + \bar{u}_c$$

(см. Кинематику стр. 143), слѣдовательно

$$m\bar{u} = m\bar{u}_r + m\bar{u}_e + m\bar{u}_c$$

и потому

$$m\bar{u}_r = \bar{F} - m\bar{u}_e - m\bar{u}_c = \bar{F} + \bar{I}_e + \bar{I}_c,$$

гдѣ

$$\bar{I}_e = -m\bar{u}_e$$

мы назовемъ силою инерціи переноснаго ускоренія $\bar{u}_e$ а

$$\bar{I}_c = -m\bar{u}_c$$

силою инерціи добавочнаго ускоренія $\bar{u}_c$ м. т., причемъ, какъ извѣстно изъ Кинематики:

$$\bar{u}_e = \bar{u}_p + \bar{u}_{\omega_p} + \bar{u}_{\tau_p}$$

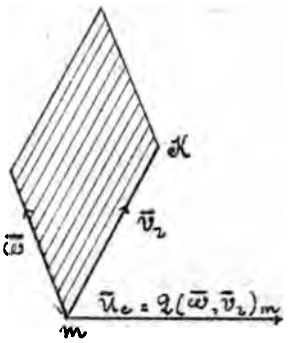
гдѣ $\bar{u}_p$ есть ускореніе выбраннаго полюса неизменяемой среды, а черезъ $\bar{u}_{\omega_p}$ и $\bar{u}_{\tau_p}$ мы обозначили соотвѣтственно осестремительное и вращательное ускореніе той точки A неизменяемой среды, съ которою въ данной моментъ совпадаетъ движущаяся м. т., слѣдовательно

$$\bar{u}_{\omega_p} = \omega^2 r_{\omega_p} \text{ и } \bar{u}_{\tau_p} = \mathfrak{M}_A(\bar{\tau})_p = \mathfrak{M}_m(\bar{\tau})_p,$$

гдѣ r_{ω_p} есть разстояніе точки m до угловой скорости $\bar{\omega}_p$, отложенной отъ выбраннаго полюса P; наконецъ, добавочное ускореніе м. т

$$\bar{u}_c = 2[\bar{\omega}, \bar{v}_r]_m$$

численно равно удвоенной площади параллелограмма, построеннаго на угловой скорости $\bar{\omega}$ среды и относительной скорости $\bar{v}_r$ м. т. въ данный моментъ, отложенныхъ отъ м. т., и направлено по перпендикуляру къ этой плоскости вправо относительно наблюдателя, стоящаго по $\bar{\omega}$ и обращеннаго лицомъ по направленію $\bar{v}_r$



Итакъ, при относительномъ движеніи м. т. по отношенію къ движущейся неизменяемой средѣ:

$$m\bar{u}_r = \bar{F} + \bar{I}_e + \bar{I}_c$$

т. е. количество ускоренія $m\bar{u}_r$ относительнаго движенія св. м. т. геометрически равно равнодѣйствующей

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ приложенныхъ къ м. т. активныхъ силъ, сложенной съ силами инерціи $\bar{I}_e$ и $\bar{I}_c$ переноснаго и добавочнаго ускореній $\bar{u}_e$ и $\bar{u}_c$ м. т., т. е. съ силами

$$\bar{I}_e = -m\bar{u}_e \quad \text{и} \quad \bar{I}_c = -m\bar{u}_c;$$

другими словами, относительное движеніе св. м. т. по отношенію къ движущейся неизменяемой средѣ совершается такъ же, какъ совершалось бы ея абсолютное движеніе, если къ дѣйствующимъ на св. м. т. силамъ присоединить еще силы инерціи

$$\bar{I}_e = -m\bar{u}_e \quad \text{и} \quad \bar{I}_c = -m\bar{u}_c$$

ея переноснаго и добавочнаго ускореній. Поэтому всѣ законы такого относительнаго движенія св. м. т. будутъ тѣ же, что и законы ея абсолютнаго движенія, если

мы къ дѣйствующимъ на св. м. т. силамъ присоединимъ еще двѣ указанныя силы инерціи м. т. $\bar{I}_e$ и $\bar{I}_c$.

Замѣтимъ только, что полная относительная работа

$$T_{t_0}^{t}(\bar{I}_c)_r = 0$$

силы инерціи

$$\bar{I}_c = -m\bar{u}_c$$

добавочнаго ускоренія $\bar{u}_c$ м. т. равна нулю, ибо

$$T_{t_0}^{t}(\bar{I}_c)_r = \int_{t_0}^{t} \bar{I}_c v_r \cos(\bar{I}_c, v_r)\, dt = 0,$$

такъ какъ

$$\bar{I}_c \perp \bar{v}_r ;$$

поэтому законъ кинетической энергіи или живой силы относительнаго движенія несв. м. т. выразится равенствами

$$K_r - K_{r,0} = \frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_{r,0}^2}{2} = T_{t_0}^{t}(\bar{F})_r + T_{t_0}^{t}(\bar{I}_e)_r ,$$

т. е. за данный промежутокъ времени $(t-t_0)$ приращеніе кинетической энергіи относительнаго движенія св. м. т. равно полной работѣ за тотъ же промежутокъ времени равнодѣйствующей

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. и силы инерціи

$$\bar{I}_e = -m\bar{u}_e$$

ея переноснаго ускоренія на относительной траекторіи св. м. т.

При относительномъ равновѣсіи св. м. т

$$\bar{u}_r = 0 \quad \text{и} \quad \bar{v}_r = 0,$$

слѣдовательно

$$I_c = 2m\omega v_r \sin(\omega, v_r) = 0$$

и

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{I}_e + \bar{I}_c$$

обратится въ равенство

$$\bar{F} + \bar{I}_e = 0,$$

т.е. при относительномъ равновѣсіи св. м. т. равнодѣйствующая

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

всѣхъ силъ, приложенныхъ къ св. м. т. и сила инерціи

$$\bar{I}_e = -m\bar{w}_e$$

ея <u>переноснаго ускоренія</u> должны взаимно уравновѣшиваться и наоборотъ, если къ св. м. т., находящейся въ относительномъ покоѣ, т.е. при $\bar{v}_r = 0$ приложить силу $\bar{F}$, равную и прямопротивоположную силѣ инерціи

$$\bar{I}_e = -m\bar{w}_e$$

переноснаго ускоренія м. т., т.е.

$$\bar{F} = m\bar{w}_e,$$

то м. т. будетъ пребывать въ относительномъ равновѣсіи, ибо въ такомъ случаѣ

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{I}_e + \bar{I}_c = 0,$$

слѣдовательно

$$\bar{w}_r = 0$$

<u>Примѣры.</u>

Относительное равновѣсіе тяжелой м. т. вблизи поверхности земли.

1) Относительное равновѣсіе тяжелой м. т. вблизи поверхности земли.

Если тяжелая м. т. пребываетъ вблизи поверхности земли въ относительномъ покоѣ, то, обозначивъ черезъ $\bar{R}$ реакцію опоры и приложивъ эту силу къ м. т., мы можемъ смотрѣть на м. т., какъ на свободную м. т. находящуюся въ относительномъ покоѣ подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ ней силъ: реакціи опоры $\bar{R}$, силы притяженія землею $m\bar{g}_1$, гдѣ подъ g_1 мы обозначили ускореніе силы притяженія земли въ данномъ пунктѣ A, и потому

$$(\bar{R} + m\bar{g}_1) + \bar{I}_e = 0.$$

Сила $\bar{p} = -\bar{R}$ въ такомъ случаѣ называется вѣсомъ тяжелой м. т., слѣдовательно

$$\bar{p} = m\bar{g}_1 + \bar{I}_e,$$

причемъ

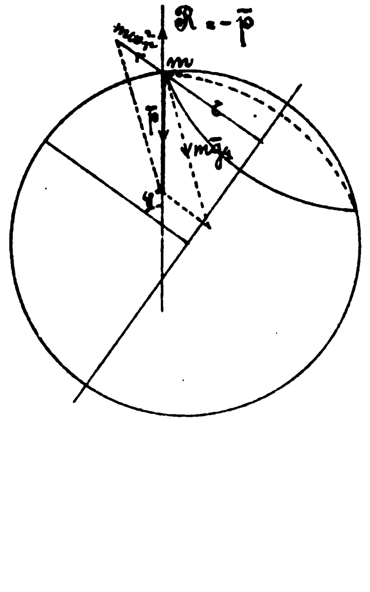
$$\bar{p} = m\bar{g},$$

гдѣ g есть ускореніе силы тяжести въ данномъ пунктѣ A.

Такимъ образомъ, вѣсъ

$$\bar{p} = m\bar{g}$$

тяжелой м. т. составляется изъ силы притяженія земли $m\bar{g}_1$ и силы инерціи



$$\bar{I}_e = -m\bar{w}_e.$$

переноснаго ускоренія м. т., равнаго и прямо-противоположнаго ускоренію $\bar{w}_A$ того пункта земной поверхности,

въ которомъ находится м. т.

Принимая во вниманіе лишь вращательное движеніе земли, получимъ

$$\bar{I}_e = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos\varphi,$$

гдѣ черезъ R и φ мы обозначили соотвѣтственно радіусъ земли и широту мѣста A; кромѣ того, направленіе $\bar{I}_e$ идетъ по продолженію r и потому $\bar{I}_e$ называется центробѣжною силою точки m.

Направленіе вѣса

$$\bar{p} = m\bar{g}$$

называется вертикалью въ разсматриваемомъ пунктѣ A, причемъ направленіе вертикали, какъ мы видимъ, вообще не проходитъ черезъ центръ земли O, во-первыхъ вслѣдствіе сплюснутости земли и во-вторыхъ вслѣдствіе центробѣжной силы, обращающейся въ нуль только на полюсахъ и оказывающей наиболь-шее дѣйствіе на экваторѣ, гдѣ она прямопротиво-положна силѣ притяженія земли mg_1 и потому на экваторѣ

$$p = mg_1 - m\omega^2 R$$

причемъ полагая

$$\omega = 0{,}000073\,[\sec^{-1}],$$

$$R = 6376\,821\ m.$$

и на экваторѣ

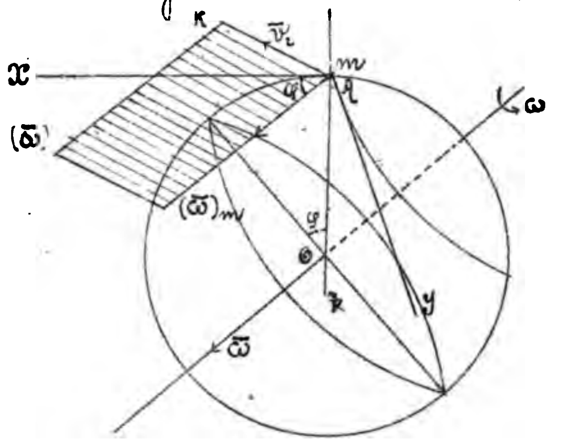
$$g = 9{,}781031\ m.,$$

приближенно получимъ

$$\frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g + \omega^2 R} = \frac{1}{289},$$

т. е. на экваторѣ отношеніе центробѣжной силы къ силѣ притяженія равно приближенно $\frac{1}{289} = \frac{1}{(17)^2}$; слѣдовательно, если бы угловая скорость земного шара была въ 17 разъ больше, то на экваторѣ тѣла не обладали бы вѣсомъ.

2). Относительное движеніе св. м. т. вблизи поверхности земли.



Примѣняя общій законъ количества относительнаго ускоренія св. м. т. къ движенію тяжелой м. т. вблизи поверхности земли, мы придемъ къ геометрическому равенству:

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + m\bar{g}_1 + \bar{I}_e + \bar{I}_c$$

какъ мы доказали, но

$$m\bar{g}_1 + \bar{I}_e = \bar{p} = m\bar{g}$$

слѣдовательно

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + m\bar{g} + \bar{I}_c$$

Чтобы получить теперь дифференціальныя уравненія относительнаго движенія тяжелой м. т., возьмемъ проекціи обѣихъ частей этого равенства на слѣдующія три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(A; X, Y, Z)$, неизмѣнно связанныя съ землею; пунктъ A примемъ за начало координатъ и ось AZ направимъ по вертикали внутрь земли, а оси AX и AY возьмемъ въ горизонтальной плоскости, причемъ ось AX направимъ по касательной къ меридіану въ пунктѣ A — къ югу и ось AY по касательной къ параллели — на востокъ; въ такомъ случаѣ мы получимъ три дифференціальныхъ уравненія св. м. т. вблизи поверхно-

сти земли:

$$mx'' = \mathcal{X} + \dot{I}_{c,x}$$

$$my'' = \mathcal{Y} + \dot{I}_{c,y}$$

$$mz'' = \mathcal{Z} + \dot{I}_{c,z}$$

Намъ остается только выразить проекціи силы инерціи

$$\bar{\dot{I}}_c = -m\bar{u}_c$$

добавочнаго ускоренія $\bar{u}_c$ м. т. на три указанныя оси координатъ; съ этою цѣлью припомнимъ изъ кинематики, что

$$\bar{\dot{I}}_c = -m\bar{u}_c = -m\,2[\bar{\omega}, \bar{v}_r] =$$

$$= -2m\bar{\mathcal{M}}_k(\bar{\omega})_m = 2m\bar{\mathcal{M}}_m(\bar{\omega})_k.$$

Вообразивъ теперь въ точкѣ m три оси $(m; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, параллельныя осямъ $(A; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ и одинаково съ ними направленныя, по извѣстнымъ формуламъ (аналитическія выраженія моментовъ векторовъ) получимъ:

$$\dot{I}_{c,x} = 2m(y'\omega_z - z'\omega_y),$$

$$\dot{I}_{c,y} = 2m(z'\omega_x - x'\omega_z),$$

$$\dot{I}_{c,z} = 2m(x'\omega_y - y'\omega_x),$$

причемъ

$$\omega_x = \omega \cos\varphi$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = \omega \sin\varphi,$$

гдѣ φ есть широта мѣста A.

Подставивъ эти выраженія въ предыдущія уравненія, придемъ къ слѣдующимъ уравненіямъ движенія св. м. т. вблизи пункта A поверхности земли:

$$\begin{cases} mx'' = X + 2m\omega \sin\varphi\, y' \\ my'' = Y + 2m\omega (z'\cos\varphi - x'\sin\varphi) \\ mz'' = Z + mg - 2m\omega \cos\varphi\, y' \end{cases}$$

Примѣнимъ эти формулы къ свободному паденію м. т. съ высоты h безъ начальной скорости вблизи пункта A земной поверхности; въ такомъ случаѣ

$$X = Y = Z = 0$$

и въ виду малости отклоненій м. т. отъ вертикали для перваго приближенія можно положить

$$x' = y' = 0,$$

тогда мы придемъ къ уравненіямъ:

$$x'' = 0,$$

$$y'' = 2\omega z' \cos\varphi,$$

$$z'' = g,$$

слѣдовательно

$$z' = gt$$

и

$$y'' = 2\omega g t \cos\varphi,$$

откуда найдемъ:

$$z = \frac{1}{2}gt^2,$$

$$y' = \omega g t^2 \cos\varphi \quad , \quad y = \frac{\omega g t^3}{3}\cos\varphi,$$

то время паденія t можно выразить черезъ высоту h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

слѣдовательно

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{g^3}}\,\omega \cos\varphi \sqrt{h^3};$$

послѣдняя приближенная формула показываетъ, что при свободномъ паденіи тяжелой м. т. безъ начальной скорости съ высоты h всегда происходитъ отклоненіе къ востоку, что было подтверждено опытами, причемъ при 51° сѣв. широты и $h = 158,5$ [метр.] наблюдалась средняя величина $y = 0,0283$ [метр.], а по найденной формулѣ получается 0,0276 [метр.].

§ 2. Динамика относительнаго движенія несв. м. т.

По принципу освобожденія отъ связей на относительное равновѣсіе и движеніе несвободной м. т. можно смотрѣть, какъ на относительное равновѣсіе и движеніе свободной м. т., если къ дѣйствующимъ на несв. м. т. активнымъ силамъ присоединить еще реакціи связей, и потому, обозначивъ черезъ $\bar{F}$ и $\bar{R}$ соотвѣтственно равнодѣйствующія всѣхъ активныхъ силъ и реакцій связей, приложенныхъ къ несв. м. т., мы можемъ смотрѣть на несв. м. т., какъ на свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ силы

$$(\bar{F} + \bar{R})$$

и вопросы динамики относительнаго равновѣсія и движенія несвободной м. т. сводятся къ таковымъ же вопросамъ динамики свободной м. т.; слѣдовательно:

1) при относительном движении несв. м. т. закон относительнаго количества ускорения м. т. выразится равенством

$$m\bar{u}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{I}_e + \bar{I}_c,$$

откуда получим

$$\bar{R} = m\bar{u}_r - \bar{I}_e - \bar{I}_c - \bar{F} =$$

$$= m\bar{u}_r + m\bar{u}_e + m\bar{u}_c - \bar{F} = m\bar{u} - \bar{F},$$

т. е. реакция связи в относительном движении несв. м. т. геометрически равна реакции той же связи при абсолютном движении несв. м. т. и потому

$$\bar{P} = -\bar{R} = \bar{F} - m\bar{u},$$

т. е. давление несв. м. т. на связь при относительном движении м. т. тоже равно давлению той же несв. м. т. при абсолютном ея давлении на ту же связь.

2) при относительном равновесии несв. м. т., т. е. при

$$\bar{u}_r = 0 \quad \text{и} \quad \bar{v}_r = 0$$

$$\dot{I}_c = 2\omega v_r \sin(\omega, v_r) = 0$$

и потому

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{I}_e = 0,$$

следовательно

$$\bar{R} = -(\bar{F} + \bar{I}_e)$$

и

$$\bar{P} = -\bar{R} = \bar{F} + \bar{I}_e$$

Примеры.

1) Определить относительное движение тяжелой.

м. т., остающейся на идеально гладкой горизонтальной прямой, вращающейся въ горизонтальной плоскости вокругъ одной изъ своихъ точекъ O съ постоянною угловою скоростью ω.

По общему закону количества относительнаго ускоренія несв. м. т. мы имѣемъ геометрическое равенство:

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{I}_e + \bar{I}_c;$$

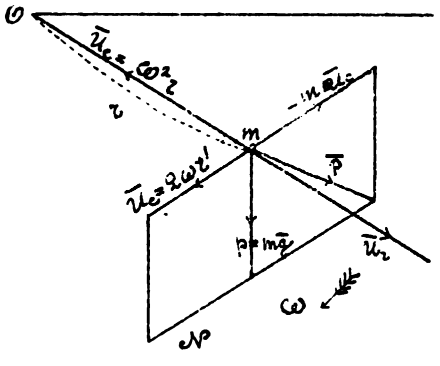
въ разсматриваемомъ случаѣ:

$$\bar{F} = mg,$$

$$\dot{I}_e = m\omega^2 r$$

$$\dot{I}_c = 2m\omega r',$$

причемъ направленія $\bar{F}$, $\bar{R}$ и $\bar{I}_c$ перпендикулярны къ направленію прямой и потому, проектируя обѣ части вышенаписаннаго геометрическаго равенства на направленіе этой прямой, мы придемъ къ равенству:



$$mr'' = m\omega^2 r$$

или

$$r'' - r\omega^2 = 0;$$

изъ перваго равенства видно, что относительное движеніе м. т. по прямой будетъ совершаться такъ, какъ будто бы къ ней была приложена ея центробѣжная сила, если бы мы закрѣпили м. т. въ данномъ ея положеніи на прямой.

Для рѣшенія линейнаго уравненія второго порядка

$$r'' - r\omega^2 = 0$$

положимъ

$$r = Ce^{zt},$$

тогда

$$r'' = z^2 C e^{zt};$$

подставивъ эти выраженія въ наше уравненіе, мы придемъ къ уравненію

$$z^2 - \omega^2 = 0,$$

т.е.

$$z = \pm\omega;$$

слѣдовательно, частныя рѣшенія нашего дифференціальнаго уравненія будутъ:

$$r_1 = C_1 e^{\omega t} \quad \text{и} \quad r_2 = C_2 e^{-\omega t}$$

и общее рѣшеніе для r, заключающее двѣ произвольныя постоянныя, будетъ:

$$r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t},$$

причемъ произвольныя постоянныя опредѣлятся изъ начальныхъ обстоятельствъ движенія; положивъ, напр., при $t = 0$

$$r = r_0 \quad \text{и} \quad r' = r'_0,$$

получимъ

$$C_1 + C_2 = r_0$$

и

$$C_1 - C_2 = \frac{r'_0}{\omega};$$

слѣдовательно

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{r'_0}{\omega}\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{r'_0}{\omega}\right)$$

и

$$r = \frac{1}{2}\left[\left(r_0 + \frac{r'_0}{\omega}\right)e^{\omega t} + \left(r_0 - \frac{r'_0}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right]$$

Наконецъ, для опредѣленія давленія нѣсв. м. т. на прямую

$$\bar{P} = -\bar{R} = \bar{F} - m\bar{u}$$

достаточно спроектировать обѣ части этого геометрическаго равенства на плоскость N, перпендикулярную къ прямой въ разсматриваемой точкѣ, тогда мы придемъ къ равенствамъ:

$$\bar{P}_N = \bar{P} = \bar{F}_N - m\bar{u}_N =$$

$$= m\bar{g} - m(\bar{u}_{r,N} + \bar{u}_{e,N} + \bar{u}_{c,N}) =$$

$$= m\bar{g} - m\bar{u}_{c,N} = m\bar{g} - m\bar{u}_c,$$

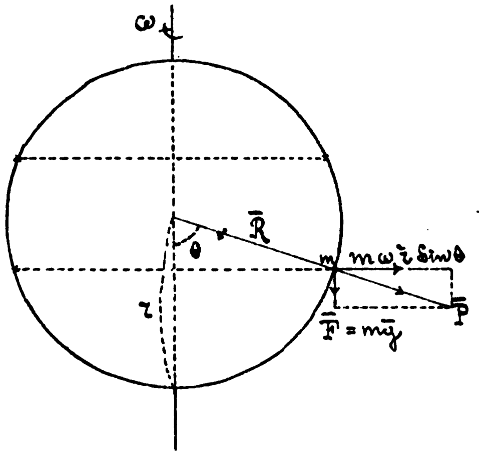
ибо $\bar{u}_r$ и $\bar{u}_e$ направлены по прямой, а

$$\bar{u}_c = 2\overline{\omega v_r}$$

нормально къ прямой и къ $\bar{\omega}$, т.е. лежитъ въ горизонтальной плоскости и потому:

$$P = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2 r'^2}.$$

2). Опредѣлить положеніе относительнаго равновѣсія несв. м. т., находящейся на идеально гладкой вертикальной окружности, вращающейся вокругъ своей вертикальной оси съ постоянною угловою скоростью $\bar{\omega}$.



По условію относительнаго равновѣсія несв. м. т.

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{I}_e = 0,$$

слѣдовательно, эти три силы должны лежать въ одной плоскости, но

$$\bar{F} = mg$$

и

$$\bar{I}_e = -m\ddot{\pi}_e = -m\omega^2 r \sin\theta$$

лежать въ плоскости окружности, поэтому и $\bar{R}$ должна лежать въ той же плоскости, кромѣ того при идеально гладкой окружности $\bar{R}$ нормальна къ окружности, слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ $\bar{R}$ должна проходить черезъ центръ окружности, и потому направленіе давленія м. т. на окружность

$$\bar{P} = -\bar{R} = \bar{F} + \bar{I}_e$$

должно идти по продолженію радіуса r, слѣдовательно

$$tg\,\theta = \frac{mr\sin\theta\,\omega^2}{mg} = \frac{r\sin\theta}{g}\,\omega^2 \ldots\ldots\ (^*).$$

1) Если теперь $\sin\theta \gtrless 0$, то сократимъ предыдущее уравненіе на $\sin\theta$, мы найдемъ, что

$$\cos\theta = \frac{g}{r\omega^2}$$

или

$$\theta = \operatorname{arc}\cos\frac{g}{r\omega^2}$$

Обозначивъ наконецъ черезъ θ_1 наименьшій положительный изъ такихъ угловъ, мы получимъ четыре возможныхъ положенія относительнаго равновѣсія несв. м. т.

$$\theta = \theta_1\ ;\quad \theta = -\theta_1\ ;\quad \theta = \pi - \theta_1\ ;\quad \theta_1 = \theta - \pi,$$

удовлетворяющихъ требуемому условію (*)

2) Если же $\sin\theta = 0$, т. е. $\theta = 0$, или π, то $v = 0$ и $u = 0$, слѣдовательно эти два положенія будутъ положеніями не только относительнаго, но и абсолютнаго равновѣсія разсматриваемой несв. м. т.

Глава II.

Динамика системы матеріальныхъ точекъ.

Системою м. т. называется совокупность нѣкотораго числа м. т., на которыя кромѣ внѣшнихъ силъ могутъ дѣйствовать еще внутреннія силы или силы взаимодѣйствія, попарно равныя, прямопротивоположныя и дѣйствующія по прямымъ, соединяющимъ точки данной системы.

I. Повторительныя кинематическія понятія, связанныя съ системою м. точекъ.

§1. Центръ инерціи системы мат. точекъ

Центромъ инерціи системы м. т. называется такая воображаемая точка, статическій моментъ (см. Статику стр. 41) которой относительно любой плоскости Q, если въ этой точкѣ сосредоточить массу всей системы, равенъ суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости всѣхъ точекъ этой системы, т. е.

$$mq_c = \Sigma m_i q_i \text{, гдѣ } m = \Sigma m_i$$

и суммированія распространены на всѣ точки данной системы.

При неизмѣняемой системѣ м. т. центръ инерціи системы совпадаетъ съ ея центромъ тяжести и потому центръ инерціи системы въ данный моментъ можетъ быть построенъ такъ же, какъ центръ тяжести

этой системы, если систему м. т. въ данный моментъ предположить неизмѣннымъ.

Примѣнивъ вышенаписанное равенство къ тремъ плоскостямъ прямоугольной системы координатъ $(O; X, Y, Z)$, мы придемъ къ тремъ равенствамъ, опредѣляющимъ координаты (x_c, y_c, z_c) центра инерціи системы м. т. въ данный моментъ:

$$mx_c = \Sigma m_i x_i,$$

$$my_c = \Sigma m_i y_i,$$

$$mz_c = \Sigma m_i z_i,$$

въ которыхъ $m = \Sigma m_i$ и которыя выражаютъ, что статическій моментъ системы м. т. относительно любой плоскости координатъ равенъ суммѣ статическихъ моментовъ относительно той же плоскости всѣхъ точекъ системы.

§2. Кинетическіе элементы системы мат. точекъ.

1) Количествомъ движенія системы м. т. въ данный моментъ мы будемъ называть геометрическую сумму $\Sigma m_i \bar{v}_i$ количествъ движеній въ данный моментъ всѣхъ точекъ этой системы.

Изъ этого опредѣленія ясно, что

$$(\Sigma m_i \bar{v}_i)_x = \Sigma m_i v_{ix} = \Sigma m x_i' = (\Sigma m x_i)' = m x_c' = m v_{c,x},$$

$$(\Sigma m_i \bar{v}_i)_y = \dots\dots\dots\dots = m y_c' = m v_{c,y},$$

$$(\Sigma m_i \bar{v}_i)_z = \dots\dots\dots\dots = m z_c' = m v_{c,z},$$

слѣдовательно

$$\Sigma m_i \bar{v}_i = m \bar{v}_c$$

гдѣ

$$m = \Sigma m_i,$$

т. е. <u>количество движенія системы м. т. въ каждый моментъ геометрически равно количеству движенія ея центра инерціи, если въ немъ предположить сосредоточенною массу всей системы</u> $m = \Sigma m_i$.

2) <u>Моментами количествъ движенія</u> $\bar{k}_o$ и k_{ox} системы м. т. относительно нѣкотораго центра O и нѣкоторой оси OX мы будемъ называть соотвѣтственно геометрическую и алгебраическую сумны моментовъ количествъ движеній всѣхъ точекъ системы относительно того же центра и той же оси, т. е.

$$\bar{k}_o = \Sigma \bar{M}_o (m_i \bar{v}_i)$$

и

$$k_{ox} = \Sigma M_{ox} (m_i \bar{v}_i),$$

причемъ, какъ извѣстно (см. стр. 4)

$$k_{o,x} = k_{ox} = \Sigma M_{ox} (m_i \bar{v}_i) = \Sigma 2 m_i S'_{i,x},$$

гдѣ черезъ $S'_{i,x}$ мы обозначили секторіальную скорость точки m_i въ плоскости, перпендикулярной къ оси OX относительно точки пересѣченія оси OX съ этою плоскостью.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$k_{ox} = 2 \Sigma m_i S'_{i,x},$$

$$k_{oy} = 2 \Sigma m_i S'_{i,y},$$

$$k_{oz} = 2 \Sigma m_i S'_{i,z}.$$

3.) <u>Количествомъ ускоренія</u> системы м. т. въ данный моментъ мы будемъ называть геометрическую сумму $\Sigma m_i \bar{w}_i$ количествъ ускоренія всѣхъ точекъ данной системы въ этотъ моментъ.

Изъ этого опредѣленія ясно, что

$$\begin{cases} (\Sigma m_i \bar{u}_i)_x = \Sigma m_i u_{i,x} = \Sigma m_i x'' = (\Sigma m_i x_i)'' = m x_c'' = m u_{c,x} \\ (\Sigma m_i \bar{u}_i)_y = \dots\dots\dots\dots\dots = m y_c'' = m u_{c,y} \\ (\Sigma m_i \bar{u}_i)_z = \dots\dots\dots\dots\dots = m z_c'' = m u_{c,z} \end{cases}$$

слѣдовательно

$$\Sigma m_i \bar{u}_i = m u_c ,$$

гдѣ

$$m = \Sigma m_i ,$$

т. е. количество ускоренія системы м. т. въ каждый моментъ геометрически равно количеству ускоренія ея центра инерціи, если въ немъ предположить сосредоточенною массу всей системы $m = \Sigma m_i$.

4). Моментами количествъ ускореній $\bar{l}_o$ и l_{ox} системы м. т. относительно нѣкотораго центра О и нѣкоторой оси ОХ мы будемъ называть соотвѣтственно геометрическую и алгебраическую суммы моментовъ количествъ ускореній всѣхъ точекъ системы относительно того же центра и той же оси.

$$\bar{l}_o = \Sigma \bar{M}_o (m_i \bar{u}_i)$$

и

$$\bar{l}_{o,x} = \Sigma M_{ox} (m_i \bar{u}_i),$$

причемъ, какъ мы знаемъ, (см. стр. 7)

$$l_{o,x} = l_{ox} = \Sigma M_{ox}(m_i \bar{u}_i) = \Sigma 2 m_i S''_{i,x},$$

гдѣ черезъ $S''_{i,x}$ мы обозначили секторіальное ускореніе точки m_i въ плоскости, перпендикулярной къ оси ОХ, относительно точки пересѣченія оси ОХ съ этою плоскостью.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся въ справедливости равенствъ:

$$l_{ox} = 2 \Sigma m_i S''_{i,x},$$

$$l_{oy} = 2\Sigma m_i S''_{i,y},$$
$$l_{oz} = 2\Sigma m_i S'_{i,z}.$$

Кромѣ того,

$$\begin{cases} l_{ox} = \Sigma m_i (y_i z''_i - z_i y''_i) = \Sigma m_i (y_i z'_i - z_i y'_i)' = k'_{ox}, \\ l_{oy} = \Sigma m_i (z_i x''_i - x_i z''_i) = \Sigma m_i (z_i x'_i - x_i z'_i)' = k'_{oy}, \\ l_{oz} = \Sigma m_i (x_i y''_i - y_i x''_i) = \Sigma m_i (x_i y'_i - y_i x'_i)' = k'_{oz}. \end{cases}$$

Принимая наконецъ во вниманіе, что

$$\begin{cases} l_{o_1x} = l_{ox} = k'_{ox} = k'_{o_1x} = v_{\kappa,x}, \\ l_{o_1y} = l_{oy} = k'_{oy} = k'_{o_1y} = v_{\kappa,y}, \\ l_{o_1z} = l_{oz} = k'_{oz} = k'_{o_1z} = v_{\kappa,z}; \end{cases}$$

мы приходимъ къ заключенію, что

$$\bar{l}_o = \bar{v}_\kappa,$$

т. е. <u>линейной моментъ количествъ ускореній $\bar{l}_o$ системы м. т. въ каждой моментъ геометрически равенъ скорости $\bar{v}_\kappa$ точки, чертящей годографъ линейнаго момента $\bar{k}_o$ количествъ движеній той же системы м. т.</u>

5). Кинетической энергіею K или живою силою системы м. т. въ данный моментъ мы будемъ называть сумму кинетическихъ энергій или живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы въ этотъ моментъ, т. е.

$$K = \Sigma K_i = \Sigma \frac{m_i v_i^2}{2};$$

это есть количество, а не векторъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что символы единицъ кинетическихъ элементовъ системы м. т. конечно будутъ тѣ же, что и символы единицъ соотвѣтственныхъ кинетическихъ элементовъ одной м. т.

§3. Импульсъ силъ, приложенныхъ къ системѣ м. т.

Обозначивъ черезъ $\overline{F}_i$ и $\overline{f}_i$ соотвѣтственно равнодѣйствующія всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i данной системы и помноживъ ихъ геометрическую сумму $\overline{F}_i + \overline{f}_i$ на Δt, мы получимъ элементарный импульсъ

$$(\overline{F}_i + \overline{f}_i)\,\Delta t$$

силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ m_i.

Элементарнымъ импульсомъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ данной системѣ м. т., называется геометрическая сумма

$$\Sigma(\overline{F}_i + \overline{f}_i)\,\Delta t$$

элементарныхъ импульсовъ всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ этой системы.

Но

$$\Sigma(\overline{F}_i + \overline{f}_i)\,\Delta t = \Sigma\overline{F}_i\,\Delta t + \Sigma\overline{f}_i\,\Delta t = \overline{F}\Delta t + \overline{f}\,\Delta t,$$

гдѣ

$$\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i \quad и \quad \overline{f} = \Sigma\overline{f}_i = 0,$$

ибо внутреннія силы попарно равны и прямопротивоположны и потому

$$\Sigma(\overline{F}_i + \overline{f}_i)\,\Delta t = \overline{F}\,\Delta t$$

т. е. элементарный импульсъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ системѣ м. т., геометрически равенъ элементарному

импульсу $\overline{F}\Delta t$ равнодѣйствующей:
$$\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$$
лишь внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, и потому полный импульсъ всѣхъ такихъ силъ за данный промежутокъ времени $(t - t_0)$, т. е.
$$\text{Пред.} \int_{t_0}^{t} \Sigma(\overline{F}_i + \overline{f}_i)\Delta t = \text{Пред.} \mathop{S}_{t_0}^{t} \overline{F}\Delta t = \mathfrak{J}_{t_0}^{t}(\overline{F})$$
тоже геометрически равенъ полному импульсу за тотъ же промежутокъ времени равнодѣйствующей $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_i$ внѣшнихъ силъ, причемъ, обозначивъ черезъ $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ проекціи этой равнодѣйствующей силы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ ея полный импульсъ можетъ быть вычисленъ, какъ мы знаемъ (см. стр. 13) по тремъ его проекціямъ
$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{J}_x &= \int_{t_0}^{t} \mathfrak{X}\,dt \\ \mathfrak{J}_y &= \int_{t_0}^{t} \mathfrak{Y}\,dt \\ \mathfrak{J}_z &= \int_{t_0}^{t} \mathfrak{Z}\,dt \end{aligned}\right. \quad \text{, гдѣ} \quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \Sigma \mathfrak{X}_i \\ \mathfrak{Y} &= \Sigma \mathfrak{Y}_i \\ \mathfrak{Z} &= \Sigma \mathfrak{Z}_i \end{aligned}\right.$$

§ 4. Полная работа силъ, приложенныхъ къ системѣ м. т. и консервативныя системы силъ.

Полною работою за данный промежутокъ времени $(t - t_0)$ силъ, приложенныхъ къ системѣ м. т., называется сумма полныхъ работъ всѣхъ такихъ силъ за этотъ промежутокъ времени, т. е.
$$\Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i + \overline{f}_i) = \Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i) + \Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{f}_i),$$

гдѣ

$$T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i) = \text{Пред.}\ \mathfrak{S}_{t_0}^{t}\ \overline{F}\,\overline{\Delta s}_i = \int_{t_0}^{t}(F_{ix}\,dx_i + F_{iy}\,dy_i + F_{iz}\,dz_i)$$

и

$$T_{t_0}^{t}(\overline{f}_i) = \text{Пред.}\ \mathfrak{S}_{t_0}^{t}\ \overline{f}_i\,\overline{\Delta s}_i = \int_{t_0}^{t}(f_{ix}\,dx_i + f_{iy}\,dy_i + f_{iz}\,dz_i)$$

Если полная работа силъ, приложенныхъ къ системѣ м.т., при переходѣ этой системы изъ одного положенія въ другое зависитъ лишь отъ начальнаго и конечнаго положеній системы, т.е. не зависитъ отъ вида траекторіи описываемыхъ точками приложенія силъ, то такая система силъ называется консервативною системою силъ, а система м.т., подверженная дѣйствію такихъ силъ – консервативною системою м.т.

Условившись полную работу консервативной системы отсчитывать отъ нѣкотораго опредѣленнаго ея положенія A, заданнаго координатами:

$$(a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots a_i, b_i, c_i, \ldots\ldots a_n, b_n, c_n),$$

мы приходимъ къ заключенію, что при переходѣ системы изъ этого исходнаго положенія A въ любое положеніе S:

$$(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n)$$

полная работа T_A^S такой системы силъ будетъ зависить лишь отъ конечнаго положенія системы, т.е. будетъ нѣкоторой функціей координатъ системы м.т.

$$T_A^S = U(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n)$$

причемъ функція эта очевидно обращается въ нуль для выбраннаго исходнаго положенія A системы, отъ котораго мы условились отсчитывать полную работу, т.е.

$$U(a_1, b_1, c_1, \ldots a_i, b_i, c_i, \ldots a_n, b_n, c_n) = 0$$

Кромѣ того, при заменѣ исходнаго положенія A системы м. т. нѣкоторымъ новымъ исходнымъ положеніемъ B функція $\mathfrak{U}$ измѣняется лишь на нѣкоторую постоянную величину, а именно, на полную работу T_B^A консервативной системы силъ при переходѣ системы м. т. изъ положенія B въ положеніе A.

Дѣйствительно, такъ какъ полная работа консервативной системы силъ не зависитъ отъ вида траекторій, описанныхъ ихъ точками приложенія, то переводя систему изъ положенія B въ положеніе A и затѣмъ въ положеніе S, мы получимъ:

$$T_B^S = T_B^A + T_A^S = \mathfrak{U} + T_B^A.$$

Такая функція

$$\mathfrak{U} = T_A^S,$$

выражающая полную работу консервативной системы силъ при переходѣ системы м. т. изъ нѣкотораго исходнаго положенія A въ данное положеніе S называется **потенціаломъ данной консервативной системы силъ.**

Такимъ образомъ каждому положенію S системы м. т., подверженныхъ дѣйствію консервативной системы силъ, будетъ соотвѣтствовать опредѣленное значеніе потенціала этой системы.

Если консервативная система м. т. переходитъ изъ исходнаго положенія A въ нѣкоторое положеніе S и затѣмъ обратно въ то же положеніе A, то полная работа приложенныхъ къ ней силъ очевидно будетъ равна нулю, т. е.

$$T_A^S + T_S^A = 0,$$

слѣдовательно

$$T_S^A = -T_A^S;$$

такимъ образомъ полная работа консервативной си-

стемы силъ при переходѣ системы м. т. изъ даннаго ея положенія S въ исходное положеніе A равна взятой съ противоположнымъ знакомъ полной работѣ той же системы силъ при переходѣ системы м. т. изъ исходнаго положенія A въ данное положеніе S, причемъ функція

$$\Pi = -U = -T_A^S = T_S^A,$$

выражающая полную работу консервативной системы при переходѣ ея изъ даннаго положенія S въ исходное положеніе A, называется потенціальною энергіею данной консервативной системы м. т., а сумма

$$E = K + \Pi = K - U$$

кинетической и потенціальной энергій — полною энергіею той же системы.

Теорема.

При переходѣ консервативной системы изъ одного положенія S_1 въ другое S_2 полная работа $T_{S_1}^{S_2}$ приложенныхъ къ ней силъ равна разности $U_2 - U_1$ значеній потенціала этой консервативной системы силъ для втораго и перваго положеній системы м. т.

Дѣйствительно,

$$T_{S_1}^{S_2} = T_{S_1}^{A} + T_{A}^{S_2} = T_{A}^{S_2} - T_{A}^{S_1} = U_2 - U_1.$$

Слѣдствіе.

Элементарное приращеніе ΔT полной работы консервативной системы силъ равно элементарному приращенію ΔU потенціала этой системы, т. е.

$$\Delta T = \Delta U,$$

но

$$\Delta T = \Sigma \bar{F}_i \Delta \bar{S}_i + \Sigma \alpha_i \Delta S_i = \Sigma (X_i \Delta x_i + Y_i \Delta y_i + Z_i \Delta z_i + \alpha_i \Delta S_i).$$

и

$$\Delta U = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\Delta z_i + \beta_i \Delta S_i\right),$$

гдѣ черезъ $\alpha_i \Delta S_i$ и $\beta_i \Delta S_i$ мы обозначили нѣкоторыя безконечно малыя величины высшихъ порядковъ относительно элементарныхъ перемѣщеній ΔS_i точекъ системы и поэтому, принимая во вниманіе, что написанныя выраженія должны быть равны при произвольныхъ значеніяхъ безк. мал. вел. Δx_i, Δy_i, Δz_i, мы приходимъ къ заключенію, что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

т. е. проекціи на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$ силъ консервативной системы выражаются соотвѣтственными частными производными отъ потенціала этой консервативной системы силъ, другими словами, для консервативной системы силъ выраженіе

$$\Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right) =$$
$$= dU$$

есть полный дифференціалъ отъ нѣкоторой функціи

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

зависящей лишь отъ координатъ точекъ системы и наоборотъ, если

$$\Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU,$$

то такая система силъ будетъ консервативна, ибо

$$T_{S_1}^{S_2} = \text{Пред.}\, S_{S_1}^{S_2} \overline{F}_i \overline{\Delta S}_i = \int_{S_1}^{S_2}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) =$$
$$= \int_{S_1}^{S_2} dU = U_2 - U_1,$$

т. е. полная работа такой системы силъ при переходѣ системы изъ положенія S_1 въ положеніе S_2 зависитъ лишь отъ начальнаго и конечнаго положеній системы.

Теорема.

Силы взаимодѣйствія между точками системы, зависящія лишь отъ взаимныхъ разстояній и массъ этихъ точекъ, представляютъ консервативную систему силъ.

Дѣйствительно, въ статикѣ мы доказали (см. стр. 129), что элементарная работа

$$\bar{f}_{i,k}\,\overline{\Delta S}_i + \bar{f}_{k,i}\,\overline{\Delta S}_k$$

силъ взаимодѣйствія двухъ м. т. m_i, m_k эквивалентна произведенію

$$f_{i,k}\,\Delta r_{i,k},$$

гдѣ

$$f_{i,k} = f_{k,i}$$

есть функція, выражающая величину силы взаимодѣйствія въ зависимости отъ взаимнаго разстоянія $r_{i,k}$ двухъ точекъ и $\Delta r_{i,k}$ — элементарное измѣненіе этого разстоянія, причемъ при силахъ притяженія $f_{i,k} < 0$, а при силахъ отталкиванія $f_{i,k} > 0$; слѣдовательно, полная работа такихъ двухъ силъ выразится равенствомъ

$$\int_{t_0}^{t} f_{i,k}\,dr_{i,k} = \Big| F_{i,k}(r_{i,k}) \Big|_{t_0}^{t}$$

т. е. будетъ зависѣть лишь отъ начальнаго ($r_{i,k}$) и конечнаго $r_{i,k}$ взаимныхъ разстояній этихъ точекъ, и нисколько не зависитъ ни отъ вида траекторій, описанныхъ этими точками, ни даже отъ абсолютнаго положенія ихъ въ пространствѣ, поэтому функція

$$U_{i,k} = F_{i,k}(r_{i,k})$$

будетъ потенціаломъ этихъ двухъ силъ и потенціалъ всей системы силъ взаимодѣйствій будетъ

$$U = \Sigma U_{i,k},$$

причемъ этотъ потенціалъ будетъ зависѣть лишь отъ взаимныхъ положеній точекъ системы или отъ конфигураціи системы, а не отъ абсолютнаго положенія системы въ пространствѣ.

Примѣры.

1) Для силъ взаимодѣйствія, дѣйствующихъ по закону:

$$f_{i,k} = \mp k m_i m_k r_{ik},$$

$$U_{i,k} = \mp \int k m_i m_k r_{ik} \, dr_{ik} = \mp k m_i m_k \frac{r_{i,k}^2}{2}$$

слѣдовательно

$$U = \mp k \Sigma m_i m_k \frac{r_{i,k}^2}{2},$$

причемъ верхній знакъ соотвѣтствуетъ силамъ притяженія, а нижній силамъ отталкиванія.

2). Для силъ притяженія по закону Ньютона

$$f_{ik} = - \frac{k m_i m_k}{r_{ik}^2},$$

$$U_{i,k} = - \int \frac{k m_i m_k}{r_{ik}^2} dr_{ik} = + k \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

и потому

$$U = k \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

Замѣтимъ наконецъ, что въ случаѣ, если къ каждой точкѣ системы приложена консервативная сила F_i, потенціалъ которой есть $U_i(x_i, y_i, z_i)$, то совокупность всѣхъ такихъ силъ будетъ консервативною системою,

причемъ потенціалъ U этой консервативной системы опредѣлится изъ равенства

$$U = \Sigma U_i .$$

Примѣры.

1). Потенціалъ системы тяжелыхъ м. т.

Принявъ за исходное положеніе A системы тяжелыхъ м. т. то ея положеніе, при которомъ всѣ ея точки находятся въ нѣкоторой горизонтальной плоскости XOY, и направивъ ось OZ по вертикали вверхъ, мы знаемъ, что потенціалъ каждой отдѣльной тяжелой точки будетъ

$$U_i = -p_i z_i = -m_i g_i z_i \quad (\text{см. стр. } 19),$$

слѣдовательно

$$U = \Sigma U_i = -g\Sigma m_i z_i = -gmz_c =$$

$$= -mgz_c , \quad \text{гдѣ } m = \Sigma m_i .$$

и z_c — высота центра инерціи системы надъ выбранною горизонтальною плоскостью.

2) Потенціалъ силъ притяженія системы м. т. къ постоянному центру по закону Ньютона.

Въ этомъ случаѣ, если за исходное положеніе A системы принять то ея положеніе, когда всѣ точки ея находятся въ безконечности, то, какъ мы знаемъ, (стр. 20)

$$U_i = k\frac{m_i}{r_i},$$

слѣдовательно

$$U = \Sigma U_i = k\Sigma\frac{m_i}{r_i}.$$

II. Динамика системы свободныхъ мат. точекъ.

§1. Общiе законы движенiя системы св. мат. точекъ.

Пяти кинетическимъ элементамъ системы м. т. соотвѣтствуютъ пять общихъ законовъ движенiя системы св. м. т.

I. Законъ количества ускоренiя системы св. м. т. или законъ движенiя центра инерцiи системы св. матерiальныхъ точекъ.

Количество ускоренiя системы св. м. т. геометрически равно геометрической суммѣ всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ этой системѣ, т. е.

$$\sum m_i \bar{w}_i = m\bar{w}_c = \sum \bar{\bar{F}}_i = \bar{\bar{F}},$$

гдѣ

$$m = \sum m_i .$$

Дѣйствительно, по закону количества ускоренiя для св. м. т.

$$m_i \bar{w}_i = \bar{\bar{F}}_i + \bar{f}_i ,$$

гдѣ черезъ $\bar{\bar{F}}_i$ и $\bar{f}_i$ мы обозначили соотвѣтственно равнодѣйствующiя всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_i; слѣдовательно

$$\sum m_i \bar{w}_i = \sum(\bar{\bar{F}}_i + \bar{f}_i) = \sum \bar{\bar{F}}_i + \sum \bar{f}_i = \sum \bar{\bar{F}}_i = \bar{\bar{F}},$$

ибо $\sum \bar{f}_i = 0$, такъ какъ внутреннiя силы попарно равны и прямопротивоположны.

Наконецъ изъ равенствъ

$$m\bar{w}_c = \sum \bar{\bar{F}}_i = \bar{\bar{F}} \quad и \quad m = \sum m_i$$

видно, что центръ инерцiи системы св. м. т. движется,

какъ св. м. т., если въ этой точкѣ сосредоточить массу всей системы и приложить къ ней всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на систему.

Этотъ законъ называется закономъ движенія центра инерціи системы м. т., такъ какъ при отсутствіи внѣшнихъ силъ

$$\bar{u}_c = 0,$$

слѣдовательно

$$\bar{v} = Const.,$$

т. е. центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномѣрно; другими словами, - какъ св. м. т. по инерціи.

II. Законы моментовъ количествъ ускореній системы св. м. т.

а). Линейный моментъ

$$\bar{l}_o = \Sigma \bar{M}_o(m\bar{u}_i)$$

количествъ ускореній системы св. м. т. относительно любого центра O геометрически равенъ линейному моменту относительно того же центра O системы всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ данной системы св. м. т., т. е.

$$\bar{l}_o = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i) = \bar{L}_o$$

в). Моментъ количествъ ускореній системы св. м. т. относительно любой оси OX равенъ моменту относительно той же оси OX системы всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ данной системы св. м. т., т. е.

$$l_{ox} = \Sigma M_{ox}(\bar{F}_i) = L_{ox}$$

Дѣйствительно, мы знаемъ, что по общему закону моментовъ количества ускоренія одной св. м. т. m_i

$$\overline{M}_o(m\overline{v}_i) = \overline{M}_o(\overline{F}_i + \overline{f}_i)$$

и

$$M_{ox}(m\overline{v}_i) = M_{ox}(\overline{F}_i + \overline{f}_i)$$

слѣдовательно

$$\overline{l}_o = \Sigma M_o(m\overline{v}_i) = \Sigma M_o(\overline{F} + \overline{f}_i) = \Sigma M_o(\overline{F}_i) + \Sigma M_o(\overline{f}_i) =$$
$$= \Sigma \overline{M}_o(\overline{F}_i) = \overline{L}_o ,$$

т. е.

$$\overline{l}_o = \overline{L}_o$$

и

$$l_{ox} = \Sigma M_{ox}(m\overline{v}_i) = \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i + \overline{f}_i) = \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i) + \Sigma M_{ox}(\overline{f}_i) =$$
$$= \Sigma M_{ox}(\overline{F}_i) = L_{ox} ,$$

т. е.

$$l_{ox} = L_{ox} ,$$

ибо

$$\Sigma \overline{M}_o(\overline{f}_i) = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma M_{ox}(\overline{f}_i) = 0,$$

такъ какъ внутреннія силы попарно равны, прямо-противоположны и дѣйствуютъ по прямымъ, соединяющимъ м. т.

III. Законъ измѣненія количества движенія системы св. м. т.

Геометрическое приращеніе

$$(\Sigma m_i \overline{v}_i) - (\Sigma m_i \overline{v}_{i,o})$$

количества движенія системы св. м. т. за данный промежутокъ времени $(t - t_o)$ геометрически равно полному импульсу

$$\Sigma \overline{J}_{t_o}^{t}(\overline{F}_i) = \overline{J}_{t_o}^{t}(\overline{F})$$

за тотъ же промежутокъ времени всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ системѣ св. матеріальныхъ точекъ, т. е.

$$(\Sigma m_i \bar{v}_i) - \Sigma(m_i \bar{v}_i)_0 = \Sigma \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}_i) = \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F})$$

Дѣйствительно, мы знаемъ, что по общему закону измѣненія количества движенія одной св. м. т. m_i

$$m\bar{v}_i - m\bar{v}_{i0} = \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}_i + \bar{f}_i) = \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}_i) + \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{f}_i)$$

откуда суммируя подобныя равенства для всѣхъ точекъ системы, мы получимъ

$$\Sigma(m_i \bar{v}_i) - \Sigma(m_i \bar{v}_{i,0})_0 = \Sigma \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}_i) + \Sigma \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{f}_i) =$$

$$= \Sigma \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}_i) = \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}),$$

гдѣ

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i,$$

ибо

$$\Sigma \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{f}_i) = 0,$$

такъ какъ внутреннія силы попарно равны и прямо противоположны.

Принимая, наконецъ, во вниманіе, что

$$\Sigma m_i \bar{v}_i = m\bar{v}_c$$

и

$$\Sigma m_i \bar{v}_{i,0} = m\bar{v}_{c0},$$

гдѣ

$$m = \Sigma m_i,$$

мы придемъ къ равенству

$$m\bar{v}_c - m\bar{v}_{c,0} = \bar{\mathcal{J}}^t_{t_0}(\bar{F}),$$

выражающему общій законъ измѣненія количества движенія центра инерціи системы св. м. т., которое и непосредственно очевидно изъ общаго закона движенія этой воображаемой м. т.

IV. Общіе законы измѣненія моментовъ коли-

чествъ движенія системы св. м. т.

а) Скорость $\bar{v}_k$ точки k, чертящей годографъ линейнаго момента количествъ движенія

$$\bar{k}_o = \Sigma \bar{M}_o(m_i \bar{v}_i)$$

системы св. м. т. относительно любого неподвижнаго центра O, геометрически равенъ линейному моменту

$$\bar{L}_o = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i)$$

относительно того же центра O всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ системѣ св. м. т., т. е.,

$$\bar{v}_k = \bar{L}_o = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i)$$

Дѣйствительно, изъ свойствъ кинетическихъ элементовъ системы м. т. мы знаемъ, что

$$\bar{v}_k = \bar{l}_o ;$$

кромѣ того, по второму общему закону для системы св. м. т.

$$\bar{l}_o = \bar{L}_o ,$$

слѣдовательно

$$\bar{v}_k = \bar{L}_o = \Sigma \bar{M}_o(\bar{F}_i) .$$

в) Производная k'_{ox} отъ момента количествъ движенія системы м. т. относительно любой неподвижной оси OX равна моменту L_{ox} относительно той же оси OX всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ системѣ св. м. точекъ, т. е.

$$k'_{ox} = L_{ox} .$$

Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$k'_{ox} = k'_{o,x} = v_{k,x} = L_{o,x} = L_{ox} ,$$

ч. т. д.

V. Законъ измѣненія кинетической энергіи или живой силы системы св. м. т.

Приращеніе

$$\mathcal{K}-\mathcal{K}_0 = \left(\Sigma\frac{m_i v_i^2}{2}\right)-\left(\Sigma\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_0$$

кинетической энергіи или живой силы системы св. м. т. за данный промежутокъ времени $(t-t_0)$ равно полной работѣ за тотъ же промежутокъ времени всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ данной системы, т. е.

$$\mathcal{K}-\mathcal{K}_0 = \left(\Sigma\frac{m_i v_i^2}{2}\right)-\left(\Sigma\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_0 = \Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i)+\Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{f}_i).$$

Дѣйствительно, мы знаемъ, что по закону измѣненія кинетической энергіи или живой силы одной св. м. т. m_i

$$\mathcal{K}-\mathcal{K}_0 = \frac{m_i v_i^2}{2}-\frac{m_i v_{i,0}^2}{2} = T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i)+T_{t_0}^{t}(\overline{f}_i);$$

суммируя подобныя равенства для всѣхъ точекъ системы, мы придемъ къ требуемымъ равенствамъ:

$$\mathcal{K}-\mathcal{K}_0 = \left(\Sigma\frac{m_i v_i^2}{2}\right)-\left(\Sigma\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_0 = \Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{F}_i)+\Sigma T_{t_0}^{t}(\overline{f}_i).$$

§2. Частные случаи общихъ законовъ движенія системы св. м. т.

I. Если геометрическая сумма

$$\overline{F} = \Sigma\overline{F}_i = 0$$

всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ системѣ св. м. т. во все время движенія равна нулю, то центръ инерціи такой системы движется прямолинейно и равномѣрно.

Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ изъ общаго закона количества ускоренія системы св. м. т., мы получимъ:

$$\Sigma m_i \overline{w}_i = m\overline{w}_c = \Sigma\overline{F}_i = \overline{F} = 0;$$

следовательно

$$\bar{w}_c = 0$$

и потому

$$\bar{v}_c = Const, \quad ч. т. д.$$

II. Если моментъ

$$L_{ox} = \Sigma M_{ox}(\bar{F}_i)$$

внѣшнихъ силъ относительно нѣкоторой неподвижной оси OX во все время движенія равенъ нулю, то сумма произведеній $\Sigma 2 m_i S'_{i,x}$ изъ удвоенныхъ массъ на секторіальныя скорости точекъ системы въ плоскости, перпендикулярной къ оси OX, относительно точки пересѣченія этой оси съ плоскостью, сохраняетъ постоянную величину, т. е.

$$\Sigma 2 m_i S'_{i,x} = Const. = C$$

или, какъ говорятъ, въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто законъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ оси OX.

Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ на основаніи общаго закона движенія системы св. м. т. III (в) мы получимъ

$$k'_{ox} = L_{ox} = 0$$

сл. д.

$$k_{ox} = Const. = C,$$

но изъ кинетическихъ элементовъ системы м. т. мы знаемъ, что

$$k_{ox} = 2 \Sigma m_i S'_{ix},$$

следовательно

$$2 \Sigma m_i S'_{ix} = Const. = C, \quad ч. т. д.$$

III. Если главный моментъ

Преподаватель [подпись]

$$\bar{L}_0 = \Sigma \bar{M}_0(\bar{F}_i)$$

системы внѣшнихъ силъ относительно нѣкотораго неподвижнаго центра О во все время движенія равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ эту точку, причемъ линейной моментъ

$$\bar{k}_0 = \Sigma \bar{M}_0(m_i \bar{v}_i)$$

количествъ движеній системы относительно этой точки О сохраняетъ постоянную величину и направленіе, принявъ которое за ось OA убѣдимся, что въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, сумма $2\Sigma m_i S'_{i,a}$ имѣетъ наибольшую величину, гдѣ черезъ $S'_{i,a}$ мы обозначили секторіальныя скорости точекъ m_i данной системы въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси OA; такая плоскость Лапласомъ названа неизмѣняемою плоскостью.

Дѣйствительно, если

$$L_0 = 0,$$

то

$$L_{0x} = L_{0,x} = 0,$$

слѣдовательно, законъ площадей въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ мѣсто въ любой плоскости, проходящей черезъ точку О, кромѣ того

$$\bar{v}_k = \bar{L}_0 = 0,$$

слѣдовательно, точка k, чертящая годографъ линейнаго момента количества движенія

$$\bar{k}_0 = \Sigma \bar{M}_0(m_i \bar{v}_i)$$

системы м. т. относительно центра О остается неподвижною, т.е. этотъ линейной моментъ сохраняетъ постоянную величину и направленіе въ пространствѣ, принявъ которое за ось OA, получимъ:

$$\overline{k}_{oA} = k_{o,1} = 2\Sigma m_i S'_{i,a},$$

причемъ

$$2\Sigma m_i S'_{i,x} = k_{ox} = k_{o,x} = k_o \cos(k_o, x) = 2\Sigma m_i S'_{i,a} \cos(OA, x),$$

т. е. $2\Sigma m_i S'_{i,a}$ есть maximum, ч. т. д.

IV. Законъ сохраненія полной энергіи системы св. м. т.

Если внѣшнія и внутреннія силы, приложенныя къ точкамъ системы представляютъ консервативную систему силъ, то полная энергія такой системы м. т. сохраняетъ во все время движенія постоянную величину, т. е.

$$E = \mathcal{K} + \Pi = \mathcal{K} - \mathcal{U} = Const. = h,$$

гдѣ черезъ

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_1, y_1, z_1, \dots x_i, y_i, z_i, \dots x_n, y_n, z_n)$$

для краткости мы обозначили потенціалъ всѣхъ внутреннихъ и внѣшнихъ силъ.

Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ изъ общаго закона измѣненія кинетической энергіи системы св. м. т., мы получимъ:

$$\mathcal{K} - \mathcal{K}_o = \Sigma T_{t_o}^{t}(\overline{F}_i) + \Sigma T_{t_o}^{t}(\overline{f}_i) = \mathcal{U} - \mathcal{U}_o;$$

слѣдовательно

$$\mathcal{K} - \mathcal{U} = \mathcal{K}_o - \mathcal{U}_o = Const = h, \text{ ч. т. д.}$$

§3. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на систему св. м. т.

Если къ каждой точкѣ m_i системы св. м. т. приложить мгновенную силу, мгновенный импульсъ которой мы обозначимъ черезъ $\overline{J}_i$, то количество движенія м. т. m_i мгновенно измѣнится, причемъ

$$m\overline{v}_{i,1} - m\overline{v}_i = \overline{J} \quad (\text{см. стр. 40.});$$

слѣдовательно

$$(\Sigma m\overline{v}_i)_1 - \Sigma(m\overline{v}_i) = \Sigma \overline{J}_i = \overline{J};$$

т. е. приращение количества движения системы св. м. т. при действии на нее мгновенных сил равно геометрической сумме мгновенных импульсов всех этих сил.

Подобным же образом суммируя равенства

$$\mathcal{K}_{i,1} - \mathcal{K}_i = \frac{m_i v_{i,1}^2}{2} - \frac{m_i v_i^2}{2} =$$

$$= \frac{J_i^2}{2m_i} + \overline{J}_i \overline{v}_i \quad (\text{см. стр. 41.})$$

выражающія измѣненія кинетической энергіи отдѣльныхъ точекъ системы при дѣйствіи на нихъ мгновенныхъ силъ, мы придемъ къ равенству:

$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K} = \left(\Sigma \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_1 - \left(\Sigma \frac{m_i v_i^2}{2}\right) =$$

$$= \Sigma \frac{J_i^2}{2m_i} + \Sigma \overline{J}_i \overline{v}_i ,$$

выражающему мгновенное измѣненіе кинетической энергіи

$$\mathcal{K} = \Sigma \frac{m_i v_i^2}{2}$$

системы св. м. т. при дѣйствіи на нее мгновенныхъ силъ.

§4. Дифференціальныя уравненія движенія системы св. м. т. и ихъ рѣшенія.

Положимъ, мы имѣемъ систему n св. м. т.; въ такомъ случаѣ для каждой точки m_i этой системы имѣемъ геометрическое равенство:

$$m_i \overline{u}_i = \overline{F}_i + \overline{f}_i ,$$

выражающее законъ количества ускоренія этой точки; проектируя обѣ части этого геометрическаго равенства на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$, мы получимъ три равенства:

$$\begin{cases} m_i x_i'' = F_{i,x} + f_{i,x} = X_i, \\ m_i y_i'' = F_{i,y} + f_{i,y} = Y_i, \\ m_i z_i'' = F_{i,z} + f_{i,z} = Z_i, \end{cases}$$

въ которыхъ черезъ X_i, Y_i, Z_i мы обозначили для краткости проэкціи равнодѣйствующихъ всѣхъ внутреннихъ и внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ каждой точкѣ m_i данной системы на три взаимно перпендикулярныя оси координатъ $(O; X, Y, Z)$.

Такимъ образомъ для всѣхъ точекъ системы мы получимъ $3n$ дифференціальныхъ уравненій вида

$$m_i x_i'' = X_i, \quad m_i y_i'' = Y_i, \quad m_i z_i'' = Z_i, \; \ldots\ldots \; (*)$$

въ которыхъ X_i, Y_i, Z_i суть вообще нѣкоторыя функціи времени t, координатъ n. точекъ:

$$x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n$$

и ихъ первыхъ производныхъ:

$$x_1', y_1', z_1', \ldots\ldots\; x_i', y_i', z_i', \ldots\ldots, x_n', y_n', z_n'$$

Такія уравненія называются дифференціальными уравненіями движенія системы св. м. т.

Для того, чтобы познакомиться съ общимъ видомъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій второго порядка $(*)$, вообразимъ неизвѣстныя намъ $3n$ функціи времени t:

$$x_1, y_1, z_1, \ldots\; x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n$$

разложенными въ безконечные ряды по формулѣ Тайлора, причемъ для краткости положимъ $t - t_0 = h$; въ такомъ случаѣ мы получимъ $3n$ равенствъ

$$(**) \quad \begin{cases} x_i = (x_i)_0 + \frac{h}{1}(x_i')_0 + \frac{h^2}{1\cdot 2}(x_i'')_0 + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}(x_i''')_0 + \ldots \\ y_i = (y_i)_0 + \frac{h}{1}(y_i')_0 + \frac{h^2}{1\cdot 2}(y_i'')_0 + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}(y_i''')_0 + \ldots \end{cases}$$

$$z_i = (z_i)_0 + \frac{h}{1}(z_i')_0 + \frac{h^2}{1\cdot 2}(z_i'')_0 + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}(z_i''')_0 + \ldots\ldots$$

въ которыхъ вторыя и высшія производныя отъ координатъ могутъ быть выражены при помощи равенствъ (*) черезъ время t, координаты и ихъ первыя производныя, если дифференцируя последовательно равенства (*), мы будемъ подставлять въ получаемыя выраженія вмѣсто вторыхъ производныхъ отъ координатъ ихъ выраженія и тѣ же равенства (*).

Такимъ образомъ, задавъ для некотораго начальнаго момента t_0 положенія всѣхъ точекъ системы и величины и направленія ихъ начальныхъ скоростей, т.е. $6n$ величинъ

$$(***)\quad \begin{cases} (x_1)_0, (y_1)_0, (z_1)_0, \ldots, (x_i)_0, (y_i)_0, (z_i)_0, \ldots, (x_n)_0, (y_n)_0, (z_n)_0 \\ \text{и} \\ (x_1')_0, (y_1')_0, (z_1')_0, \ldots, (x_i')_0, (y_i')_0, (z_i')_0, \ldots (x_n')_0, (y_n')_0, (z_n')_0 \end{cases}$$

называемыхъ начальными обстоятельствами движенія, мы опредѣлимъ всѣ коэффиціенты въ разложеніяхъ (**).

Но начальныя обстоятельства движенія можно задавать вполнѣ произвольно, поэтому общія рѣшенія дифференціальныхъ уравненій (*) всегда будутъ заключать $6n$ произвольныхъ постоянныхъ, т.е. будутъ вида

$$\begin{cases} x_i = f_{i,1}(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}), \\ y_i = f_{i,2}(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}), \\ z_i = f_{i,3}(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}), \end{cases}$$

причемъ эти произвольныя постоянныя опредѣляются на основаніи начальныхъ обстоятельствъ движенія (***) системы св. м. т. и изъ $6n$ равенствъ

$$\begin{cases} (x_i)_0 = f_{i,1}(t_0, c_1, \ldots, c_{6n}) \\ (y_i)_0 = f_{i,2}(t_0, c_1, \ldots, c_{6n}) \end{cases}$$

$$(****) \begin{cases} (z_i)_0 = f_{i,3}(t_0, c_1, \ldots\ldots\ldots, c_{6n}) \\ \text{и} \\ (x_i')_0 = f'_{i,1}(t_0, c_1, \ldots\ldots\ldots, c_{6n}) \\ (y_i')_0 = f'_{i,2}(t_0, c_1, \ldots\ldots\ldots, c_{6n}) \\ (z_i')_0 = f'_{i,3}(t_0, c_1, \ldots\ldots\ldots, c_{6n}) \end{cases}$$

§5. Первые и вторые интегралы дифференціальныхъ уравненій движенія системы св. м. т.

Если, преобразовывая какимъ-нибудь образомъ дифференціальныя уравненія второго порядка движенія системы св. м. т.

$$(*) \quad m_i x_i'' = \mathfrak{X}_i \quad , \quad m_i y_i'' = \mathfrak{Y}_i \, , \quad m_i z_i'' = \mathfrak{Z}_i$$

мы придемъ къ равенству

$$\frac{d}{dt} F(t, x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, x_1', y_1', z_1', \ldots, x_n', y_n', z_n') = 0$$

тождественно обращающемуся въ нуль при замѣнѣ въ немъ, послѣ дифференцированія, вторыхъ производныхъ отъ координатъ x_i'', y_i'', z_i'' ихъ выраженіями изъ дифференціальныхъ уравненій $(*)$.

$$x_i'' = \frac{\mathfrak{X}_i}{m_i} \, , \quad y_i'' = \frac{\mathfrak{Y}_i}{m_i} \, , \quad z_i'' = \frac{\mathfrak{Z}_i}{m_i} \, ,$$

то проинтегрировавъ такое равенство, мы придемъ къ равенству

$$(**) \qquad F(t, x_1, \ldots\ldots, z_n, x_1', \ldots\ldots\ldots, z_n') = C \, ,$$

заключающему время t, координаты м. т. x_i, y_i, z_i, ихъ производныя x_i', y_i', z_i' и произвольную постоянную C, причемъ производная отъ этого равенства

$$F'(t, x_1, \ldots\ldots, z_n, x_1', \ldots\ldots, z_n') = 0$$

будетъ тождественно обращаться въ нуль на основаніи диф. ур.-ній движенія (*).

Такія равенства называются первыми интегралами дифференціальныхъ уравненій движенія системы св. м. т. (*).

Найдя $6n$ независимыхъ первыхъ интеграловъ:

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad F_{6n} = C_{6n}$$

дифференціальныхъ уравненій (*), т. е. такихъ интеграловъ, изъ которыхъ нельзя получить зависимости между $6n$ произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_{6n}$ и рѣшивъ эти $6n$ уравненій относительно координатъ и ихъ производныхъ, мы придемъ къ $6n$ равенствамъ:

$$\begin{cases} x_i = f_{i,1}(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ y_i = f_{i,2}(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ z_i = f_{i,3}(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ x_i' = f_{i,1}'(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ y_i' = f_{i,2}'(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ z_i' = f_{i,3}'(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \end{cases}$$

въ которыхъ произвольныя постоянныя опредѣляются на основаніи начальныхъ обстоятельствъ движенія, что при $t = t_0$

$$x_i = (x_i)_0, \quad y_i = (y_i)_0, \quad z_i = (z_i)_0 \quad \text{и} \quad x_i' = (x_i')_0, \quad y_i' = (y_i')_0, \quad z_i' = (y_i')_0.$$

III. Динамика несвободной системы матеріальныхъ точекъ.

§1. Понятіе о несвободной системѣ м. т. Связи. Кинематическія условія, налагаемыя связями на систему.

Система мат. точекъ (т.е. такая совокупность мат. точекъ, въ которой положеніе и движеніе каждой точки зависитъ отъ положеній и движеній всѣхъ остальныхъ точекъ) называется несвободною, если координаты ея точекъ подчинены нѣкоторымъ условіямъ задаваемымъ или уравненіями вида:

$$
(*)\quad \begin{cases}
\varphi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\
\varphi_2(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_p(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0
\end{cases}
$$

или неравенствами вида

$$
\begin{cases}
\varphi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n) \geqq 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_p(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n) \geqq 0
\end{cases}
$$

которымъ точки системы должны во все время движенія удовлетворять. Условія эти называются связями, причемъ первыя удерживающими, вторыя — неудерживающими, и въ зависимости отъ того, содержатъ ли функціи связей время t явно или нѣтъ, связи называются измѣняемыми или неизмѣняемыми. Оставляя пока связи неудерживающія въ сторонѣ, мы займемся несвободною системою мат. точекъ, въ которой всѣ связи суть удерживающія вида (*)

Что касается числа связей, то число ихъ p обыкновенно бываетъ $< 3n$, такъ какъ при $p = 3n$ уравненія (*) опредѣляютъ вполнѣ положеніе каждой точки системы, независимо отъ силъ, дѣйствующихъ на систему

притомъ уравненія (*) всѣ независимы другъ отъ друга и рѣшаются относительно p любыхъ изъ 3n координатъ.

Выяснимъ теперь понятіе о дифференціальныхъ параметрахъ связи въ каждой ея точкѣ, съ этою цѣлью вообразимъ себѣ на моментъ закрѣпленными всѣ точки кромѣ i-ой и что имѣется только одна связь

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

тогда она обратится въ уравненіе поверхности, проходящей черезъ точку $i(x_i, y_i, z_i)$ и мы можемъ, какъ для одной мат. точки, находящейся на удерживающей поверхности $f_1(x_i, y_i, z_i) = 0$; составить дифференціальный параметръ $N_i^{(1)}$, котораго проекціи на оси X, Y, Z суть

$$N_i^{(1)} \operatorname{Cos}(N_i^{(1)}, X) = (N_i^{(1)})_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}$$

$$N_i^{(1)} \operatorname{Cos}(N_i^{(1)}, Y) = (N_i^{(1)})_y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}$$

$$N_i^{(1)} \operatorname{Cos}(N_i^{(1)}, Z) = (N_i^{(1)})_z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}$$

а величина его:

$$N_i^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}\right)^2}$$

Продѣлывая тоже съ каждою точкою системы, мы получимъ n дифференціальныхъ параметровъ: $N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$, $N_3^{(1)}$, ..., $N_i^{(1)}$, ... $N_n^{(1)}$ связи

$$\varphi_1(x_1, y_1, \ldots\ldots z_n, t) = 0$$

въ соотвѣтственныхъ точкахъ $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$

Если у насъ не одна связь, а p связей вида (*), то мы условимся отличать величины дифференціальныхъ параметровъ разныхъ связей особыми индексами вверху, означающими номеръ точки, т. е. напр. для j-ой связи $f_j = 0$ въ точкѣ m_i имѣемъ:

$$\left(\mathcal{N}_i^{(\gamma)}\right)_x = \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_i}, \quad \left(\mathcal{N}_i^{(\gamma)}\right)_y = \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i}, \quad \left(\mathcal{N}_i^{(\gamma)}\right)_z = \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z_i},$$

$$\mathcal{N}_i^{(\gamma)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial z_i}\right)^2}$$

Напр. Система состоитъ изъ трехъ мат. точекъ: $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2)$, $m_3(x_3, y_3, z_3)$ и подчинена двумъ условіямъ:

$$\varphi_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_1^2 = 0$$

$$\varphi_2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - l_2^2 = 0$$

Имѣемъ здѣсь:

$$\left(\mathcal{N}_1^{(1)}\right)_x = 2(x_1 - x_2), \quad \left(\mathcal{N}_2^{(1)}\right)_x = -2(y_1 - y_2), \quad \left(\mathcal{N}_2^{(2)}\right)_x = 2(x_2 - x_3),$$

$$\left(\mathcal{N}_3^{(2)}\right)_x = -2(x_2 - x_3)$$

$$\left(\mathcal{N}_1^{(1)}\right)_y = 2(y_1 - y_2), \quad \left(\mathcal{N}_2^{(1)}\right)_y = -2(y_1 - y_2), \quad \left(\mathcal{N}_2^{(2)}\right)_y = 2(y_2 - y_3),$$

$$\left(\mathcal{N}_3^{(2)}\right)_y = -2(y_2 - y_3),$$

$$\left(\mathcal{N}_1^{(1)}\right)_z = 2(z_1 - z_2), \quad \left(\mathcal{N}_2^{(1)}\right)_z = -2(z_1 - z_2), \quad \left(\mathcal{N}_2^{(2)}\right)_z = 2(z_2 - z_3),$$

$$\left(\mathcal{N}_3^{(2)}\right)_z = -2(z_2 - z_3),$$

$$\mathcal{N}_1^{(1)} = +2l_1, \quad \mathcal{N}_2^{(1)} = +2l_1, \quad \mathcal{N}_2^{(2)} = +2l_2, \quad \mathcal{N}_3^{(2)} = +2l_2.$$

Разсуждая такъ же, какъ и въ случаѣ несвободной мат. точки (см. стр. 123), мы найдемъ такъ называемыя кинематическія условія, которымъ должны удовлетворять скорости и ускоренія мат. точекъ несвободной системы во все время движенія. Для этого беремъ первую полную производную по времени отъ равенствъ (*)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} z_i'\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i} z_i'\right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0$$

. . . .

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \sum_{i=1}^{i=w}\left(\frac{\delta\varphi_p}{\delta x_i}x_i' + \frac{\delta\varphi_p}{\delta y_i}y_i' + \frac{\delta\varphi_p}{\delta z_i}z_i'\right) + \frac{\delta\varphi_p}{\partial t} = 0.$$

Или, пользуясь введенными обозначеніями для дифференц. параметровъ, получимъ:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=w}\left((\mathcal{N}_i^{(1)})_x x_i' + (\mathcal{N}_i^{(1)})_y y_i' + (\mathcal{N}_i^{(1)})_z z_i'\right) + \frac{\delta\varphi_1}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=w} v_i \mathcal{N}_i^{(1)} \operatorname{Cos}(v_i, \mathcal{N}_i^{(1)}) + \frac{\delta\varphi_1}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=w} \overline{v}_i \overline{\mathcal{N}}_i^{(1)} + \frac{\delta\varphi_1}{\partial t} = 0$$

. . . .

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \sum_{i=1}^{i=w}\left((\mathcal{N}_i^{(p)})_x x_i' + (\mathcal{N}_i^{(p)})_y y_i' + (\mathcal{N}_i^{(p)})_z z_i'\right) + \frac{\delta\varphi_p}{\partial t} = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{i=w} v_i \mathcal{N}_i^{(p)} \operatorname{Cos}(v_i, \mathcal{N}_i^{(p)}) + \frac{\delta\varphi_p}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=w} \overline{v}_i \overline{\mathcal{N}}_i^{(p)} + \frac{\delta\varphi_p}{\delta t} = 0$$

Взявъ вторыя полныя производныя отъ этихъ же равенствъ (*), получимъ:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=w}\left(\frac{\delta\varphi_1}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\delta\varphi_1}{\delta y_i}y_i'' + \frac{\delta\varphi_1}{\partial z_i}z_i''\right) + (\varphi_1)_{,,} = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=w}\left(\frac{\delta\varphi_2}{\delta x_i}x_i'' + \frac{\delta\varphi_2}{\delta y_i}y_i'' + \frac{\delta\varphi_2}{\delta z_i}z_i''\right) + (\varphi_2)_{,,} = 0$$

. . . .

$$\frac{d^2\varphi_p}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=w}\left(\frac{\delta\varphi_p}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\delta\varphi_p}{\delta y_i}y_i'' + \frac{\delta\varphi_p}{\delta z_i}z_i''\right) + (\varphi_p)_{,,} = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=w}\left((\mathcal{N}_i^{(1)})_x x_i'' + (\mathcal{N}_i^{(1)})_y y_i'' + (\mathcal{N}_i^{(1)})_z z_i''\right) + (\varphi_1)_{,,} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=w} u_i \mathcal{N}_i^{(1)} \operatorname{Cos}(u_i, \mathcal{N}_i^{(1)}) + (\varphi_1)_{,,} = \sum_{i=1}^{i=w} \overline{u}_i \overline{\mathcal{N}}_i^{(1)} + (\varphi_1)_{,,} = 0$$

. . . .

$$\frac{d^2\varphi_p}{dt^2} = \sum_{i=1}^{i=w}\left((\mathcal{N}_i^{(p)})_x x_i'' + (\mathcal{N}_i^{(p)})_y y_i'' + (\mathcal{N}_i^{(p)})_z z_i''\right) + (\varphi_p)_{,,} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=w} u_i \mathcal{N}_i^{(p)} \operatorname{Cos}(u_i, \mathcal{N}_i^{(p)}) + (\varphi_p)_{,,} = \sum_{i=1}^{i=w} \overline{u}_i \overline{\mathcal{N}}_i^{(p)} + (\varphi_p)_{,,} = 0,$$

гдѣ черезъ $(\varphi_1)_{,,}$, $(\varphi_2)_{,,}$, ... $(\varphi_p)_{,,}$ для краткости обозначены всѣ члены соотвѣтственныхъ полныхъ производныхъ $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$, $\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}$, ... $\frac{d^2\varphi_p}{dt^2}$, не заключающіе вторыхъ производныхъ отъ координатъ.

[Напр. Если имѣемъ двѣ точки $m_1(x_1, y_1, z_1)$ и $m_2(x_2, y_2, z_2)$ и связь $\varphi_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$, то

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 2(x_1 - x_2)x_1' + 2(y_1 - y_2)y_1' + 2(z_1 - z_2)z_1' - 2(x_1 - x_2)x_2' -$$
$$- 2(y_1 - y_2)y_2' - 2(z_1 - z_2)z_2' = 0$$

или

$$v_1 N_1^{(1)} \cos(v_1, N_1^{(1)}) = v_2 N_2^{(1)} \cos(v_2, N_2^{(1)}),$$

т.е. проекція скорости точки m_1 на направленіе стержня должна быть равна проекціи скорости точки m_2 на то же направленіе.

Пользуясь знаніемъ законовъ движенія свободной системы мат. точекъ и примѣняя принципъ освобожденія отъ связей, мы получимъ общіе законы движенія системы несв. м. т., если къ дѣйствующимъ на нее активнымъ силамъ присоединимъ еще реакціи связей.

§2. Дифференціальныя уравненія движенія несвободной системы м. точекъ, связанныхъ идеальными связями.

Для свободной системы м. мат. точекъ мы имѣли $3n$ дифференціальныхъ уравненій движенія вида

$$(1') \begin{cases} m_i x_i'' = X_i \\ m_i y_i'' = Y_i \\ m_i z_i'' = Z_i \end{cases}$$

Въ случаѣ, если система мат. точекъ несвободна,

то ускоренія, опредѣляемыя уравненіями (1'), вообще говоря, не будутъ удовлетворять вышеприведеннымъ кинематическимъ условіямъ, а значитъ точки системы должны подъ дѣйствіемъ тѣхъ же силъ (активныхъ) получить иныя ускоренія, что возможно только, если къ активнымъ силамъ присоединятся еще нѣкоторыя силы, которыя и вызовутъ требуемое измѣненіе ускореній точекъ. Эти силы носятъ названіе пассивныхъ силъ или реакцій связей, т. к. онѣ вызываются присутствіемъ связей.

Обозначая реакцію связи $f_1=0$ въ точ. i черезъ $R_i^{(1)}(R_{ix}^{(1)}, R_{iy}^{(1)}, R_{iz}^{(1)})$

" " " $f_2=0$ . . $R_i^{(2)}(R_{ix}^{(2)}, R_{iy}^{(2)}, R_{iz}^{(2)})$

. . . .

" " " $f_p=0$ . . $R_i^{(p)}(R_{ix}^{(p)}, R_{iy}^{(p)}, R_{iz}^{(p)})$

требуемыя $3n$ дифференціальныхъ уравненій получаются въ видѣ:

$$(1)\begin{cases} m_i x_i'' = X_i + R_{ix}^{(1)} + R_{ix}^{(2)} + \dots\dots + R_{ix}^{(p)} \\ m_i y_i'' = Y_i + R_{iy}^{(1)} + R_{iy}^{(2)} + \dots\dots + R_{iy}^{(p)} \\ m_i z_i'' = Z_i + R_{iz}^{(1)} + R_{iz}^{(2)} + \dots\dots + R_{iz}^{(p)} \end{cases}$$

Для простоты дальнѣйшихъ выкладокъ допустимъ на время, что у насъ имѣется только одна связь

$$f_1(x_1, y_1, z_1, \dots\dots x_i, y_i, z_i, \dots\dots x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Притомъ такъ же, какъ и въ случаѣ движенія одной несвободной мат. точки мы пользовались преимущественно такъ называемыми идеальными связями, которыя опредѣляются при помощи понятій о виртуальныхъ перемѣщеніяхъ и виртуальной работѣ реакцій связи, также и здѣсь мы будемъ имѣть въ виду идеальныя связи и скажемъ, что идеальною связью называется такая связь $f_1=0$, сумма виртуальныхъ

работъ реакцій которой при всѣхъ виртуальныхъ отклоненіяхъ равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(R^{(1)}_{ix}\,\delta x_i + R^{(1)}_{iy}\,\delta y_i + R^{(1)}_{iz}\,\delta z_i\right)=0 \;\ldots\ldots\; (2),$$

гдѣ черезъ δx_i, δy_i, δz_i обозначены виртуальныя отклоненія (варіаціи координатъ) точки m_i, удовлетворяющія уравненію

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\delta f_1}{\delta x_i}\,\delta x_i + \frac{\delta f_1}{\delta y_i}\,\delta y_i + \frac{\delta f_1}{\delta z_i}\,\delta z_i\right)=0 \;\ldots\ldots\; (3).$$

Сопоставляя уравненія (2) и (3), мы видимъ, что должны имѣть мѣсто равенства:

$$\begin{cases} R^{(1)}_{ix} = \lambda_1 \dfrac{\delta f_1}{\delta x_i} \\ R^{(1)}_{iy} = \lambda_1 \dfrac{\delta f_1}{\delta y_i} \\ R^{(1)}_{iz} = \lambda_1 \dfrac{\delta f_1}{\delta z_i}, \end{cases}$$

гдѣ λ_1 есть нѣкоторый множитель, пока намъ неизвѣстный.

Допуская теперь не одну связь, а p связей вида (*), мы для каждой изъ нихъ, предполагая ихъ идеальными, получимъ выраженія вида

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(R^{(\nu)}_{ix}\,\delta x_i + R^{(\nu)}_{iy}\,\delta y_i + R^{(\nu)}_{iz}\,\delta z_i\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\delta f_\nu}{\delta x_i}\,\delta x_i + \frac{\delta f_\nu}{\delta y_i}\,\delta y_i + \frac{\delta f_\nu}{\delta z_i}\,\delta z_i\right)=0$$

$$\begin{cases} R^{(\nu)}_{ix} = \lambda_\nu \dfrac{\delta f_\nu}{\delta x_i} \\ R^{(\nu)}_{iy} = \lambda_\nu \dfrac{\delta f_\nu}{\delta y_i} \\ R^{(\nu)}_{iz} = \lambda_\nu \dfrac{\delta f_\nu}{\delta z_i} \end{cases}$$

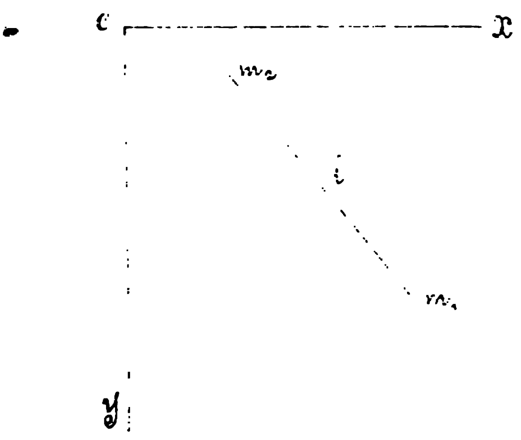
и значитъ получаемъ слѣдующія $3n$ дифференціальныхъ уравненій движенія несвободной системы n мат. точекъ,

связанных, p идеальными связями вида

$$(4)\quad \begin{cases} m_i x_i'' = X_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial x_i} \\ m_i y_i'' = Y_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial y_i} \\ m_i z_i'' = Z_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial z_i} \end{cases}$$

Присоединяя к этим $3n$ уравнениям p уравнений (*) связей, имеем $(3n+p)$ уравнений для определения $(3n+p)$ неизвестных: $3n$ координат точек и p коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$. Для интегрирования уравнений (4) исключают p неизвестных коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, остается $3n-p$ уравнений, которые и интегрируют, выразив напр. при помощи уравнений (*) связей p из координат через остальные $(3n-p)$ и подставив в получившиеся дифф. ур-ния. Проинтегрировав эти уравнения, получим $3n-p$ координат, как функции от t, и $2(3n-p)$ произвольных постоянных, которые определяются из начальных обстоятельств движения; остальные p координат выразятся через t и те же $2(3n-p)$ произвольные постоянные.

При интегрировании уравнений (4) обыкновенно пользуются законами, которые дает нам механика, к изучению которых мы и перейдем, решив сначала задачу для пояснения предыдущего.



Задача: Определить движение двух тяжелых материальных точек массы m_1 и m_2 в вертикальной плоскости XY, связанных стержнем (идеальным) неизменяемой

длины l, разсматриваемымъ, какъ идеальная связь, выражаемая уравненіемъ

$$f_1 = +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} - l \equiv 0$$

$$\left(\mathcal{N}_1^{o(1)}\right)_x = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1-x_2}{l}, \quad \left(\mathcal{N}_2^{o(1)}\right)_x = -\frac{x_1-x_2}{l}$$

$$\left(\mathcal{N}_1^{o(1)}\right)_y = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{y_1-y_2}{l}, \quad \left(\mathcal{N}_2^{o(1)}\right)_y = -\frac{y_1-y_2}{l}$$

$$\mathcal{N}_1^{o(1)} = +1, \qquad \mathcal{N}_2^{o(1)} = +1.$$

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = \lambda_1 \dfrac{x_1-x_2}{l} \\ m_1 y_1'' = m_1 g + \lambda_1 \dfrac{y_1-y_2}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 x_2'' = -\lambda_1 \dfrac{x_1-x_2}{l} \\ m_2 y_2'' = m_2 g - \lambda_1 \dfrac{y_1-y_2}{l} \end{cases}$$

Исключивъ λ_1, мы должны получить 3 дифф. ур-нія: одно изъ нихъ есть

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = 0 \text{ ....(a)}$$

другое есть

$$m_1 y_1'' + m_2 y_2'' = (m_1+m_2) g \text{.....(b)}$$

Для полученія третьяго ур-нія поступаемъ такъ:

$$x_1'' - x_2'' = \lambda_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{x_1-x_2}{l}$$

$$y_1'' - y_2'' = \lambda_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{y_1-y_2}{l}$$

и

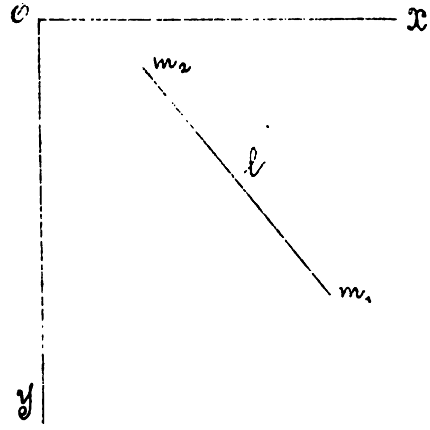
$$-(x_1''-x_2'')(y_1-y_2) + (y_1''-y_2'')(x_1-x_2) = 0 \text{......(c)}$$

связанныхъ, р идеальными связями вида

$$(4)\begin{cases} m_i x_i'' = X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \\ m_i y_i'' = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \\ m_i z_i'' = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \end{cases}$$

Присоединяя къ этимъ $3n$ уравненіямъ p уравненій (*) связей, имѣемъ $(3n+p)$ уравненій для опредѣленія $(3n+p)$ неизвѣстныхъ: $3n$ координатъ точекъ и p коэффиціентовъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$. Для интегрированія уравненій (4) исключаютъ p неизвѣстныхъ коэффиціентовъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, остается $(3n-p)$ уравненій, которыя и интегрируютъ, выразивъ напр. при помощи уравненій (*) связей p изъ координатъ черезъ остальные $(3n-p)$ и подставивъ въ имѣющіяся дифф. ур-нія. Проинтегрировавъ эти уравненія, получимъ $(3n-p)$ координатъ, какъ функціи отъ t, и $2(3n-p)$ произвольныхъ постоянныхъ, которыя опредѣляются изъ начальныхъ обстоятельствъ движенія; остальныя p координатъ выразятся черезъ t и тѣ же $2(3n-p)$ произвольныя постоянныя.

При интегрированіи уравненій (4) обыкновенно пользуются законами, которые даетъ намъ механика, къ изученію которыхъ мы и перейдемъ, рѣшивъ сначала задачу для поясненія предыдущаго.



Задача. Опредѣлить движеніе двухъ тяжелыхъ м. точекъ массы m_1 и m_2 въ вертикальной плоскости XY, связанныхъ стержнемъ (идеальнымъ) неизмѣняемой

длины l, разсматриваемымъ, какъ идеальная связь, выражаемая уравненіемъ

$$f_1 = +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} - l = 0$$

$$\left(N_1^{0(1)}\right)_x = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1-x_2}{l}, \quad \left(N_2^{0(1)}\right)_x = -\frac{x_1-x_2}{l}$$

$$\left(N_1^{0(1)}\right)_y = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{y_1-y_2}{l}, \quad \left(N_2^{0(1)}\right)_y = -\frac{y_1-y_2}{l}$$

$$N_1^{0(1)} = +1, \qquad N_2^{0(1)} = +1.$$

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = \lambda_1 \dfrac{x_1-x_2}{l} \\ m_1 y_1'' = m_1 g + \lambda_1 \dfrac{y_1-y_2}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 x_2'' = -\lambda_1 \dfrac{x_1-x_2}{l} \\ m_2 y_2'' = m_2 g - \lambda_1 \dfrac{y_1-y_2}{l} \end{cases}$$

Исключивъ λ_1, мы должны получить 3 дифф. ур-нія: одно изъ нихъ есть

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = 0 \ldots\ldots\ldots (a)$$

другое есть

$$m_1 y_1'' + m_2 y_2'' = (m_1+m_2)\, g \ldots\ldots (b)$$

Для полученія третьяго ур.-нія поступаемъ такъ:

$$x_1'' - x_2'' = \lambda_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{x_1-x_2}{l}$$

$$y_1'' - y_2'' = \lambda_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{y_1-y_2}{l}$$

и

$$-(x_1''-x_2'')(y_1-y_2) + (y_1''-y_2'')(x_1-x_2) = 0 \ldots\ldots (c)$$

Уравнения (a) и (b) даютъ легко

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = C_1 t + D_1$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = (m_1 + m_2) g \frac{t^2}{2} + C_2 t + D_2$$

Уравненіе (c) послѣ перваго интегрированія даетъ:

$$(x_1 - x_2)(y_1' - y_2') - (y_1 - y_2)(x_1' - x_2') = C_3$$

раздѣливъ это уравненіе на

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2,$$

мы еще разъ его проинтегрируемъ:

$$\operatorname{arctng} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{C_3 t}{l^2} + D_3$$

Для опредѣленія постоянныхъ $C_1 \ldots D_3$ мы должны задать начальныя обстоятельства движенія, т. е. начальныя скорости точекъ и ихъ положенія; только три координаты могутъ быть заданы произвольно (въ начальный моментъ $t_0 = 0$), четвертая опредѣлится по ур.-нію связи, такъ напр. взявъ $(x_2)_0 = (y_1)_0 = (y_2)_0 = 0$, находимъ $(x_1)_0 = l$; то же относится къ начальнымъ проекціямъ скоростей, взявъ напр. $(x_2')_0 = \alpha$, $(y_1')_0 = \beta$, $(y_2')_0 = 0$, найдемъ изъ ур.-нія связи:

$$(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (y_1 - y_2)(y_1' - y_2') = 0$$

$$(x_1')_0 = \alpha$$

При такъ выбранныхъ начальныхъ обстоятельствахъ движенія находимъ, что

$$C_1 = (m_1 + m_2)\alpha, \quad D_1 = m_1 l,$$

$$C_2 = m_1 \beta, \quad D_2 = 0,$$

$$C_3 = l\beta, \quad D_3 = 0.$$

и значитъ

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 = (m_1 + m_2)\alpha t + m_1 l \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = (m_1 + m_2)\frac{gt^2}{2} + m_1 \beta t \\ \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\beta}{l} t \end{cases}$$

Присоединяя уравненіе связи, мы найдемъ и самыя координаты

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(m_1 + m_2)\alpha t + m_1 l}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \operatorname{Cos}\left(\frac{\beta}{l} t\right) \\ y_1 = \frac{m_1 \beta}{m_1 + m_2} + \frac{gt^2}{2} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \operatorname{Sin}\left(\frac{\beta}{l} t\right) \\ x_2 = \frac{(m_1 + m_2)\alpha t + m_1 l}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \operatorname{Cos}\left(\frac{\beta}{l} t\right) \\ y_2 = \frac{m_1 \beta}{m_1 + m_2} + \frac{gt^2}{2} - \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \operatorname{Sin}\left(\frac{\beta}{l} t\right) \end{cases}$$

Множитель λ_1 опредѣлится легко изъ дифференціальнаго уравненія

$$m_1 x_1'' = \lambda_1 \frac{x_1 - x_2}{l}:$$

$$\lambda_1 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\beta^2}{l}$$

знакъ (−) показываетъ, что реакція направлена по отрицательной нормали, т. е. внутрь стержня.

§3. Общій законъ движенія центра инерціи несвободной системы мат. точекъ. Частные случаи движенія центра инерціи.

Написавъ дифференціальныя уравненія движенія свободной системы n мат. точекъ, подчиненныхъ p связямъ (*):

$$
(4)\ldots\left\{\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= \mathfrak{X}_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \\
m_1 y_1'' &= \mathfrak{Y}_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_1} \\
m_1 z_1'' &= \mathfrak{Z}_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_i x_i'' &= \mathfrak{X}_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \\
m_i y_i'' &= \mathfrak{Y}_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \\
m_i z_i'' &= \mathfrak{Z}_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_n x_n'' &= \mathfrak{X}_n + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\
m_n y_n'' &= \mathfrak{Y}_n + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_n} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_n} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_n} \\
m_n z_n'' &= \mathfrak{Z}_n + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_n} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_n} + \ldots\ldots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_n}
\end{aligned}\right.
$$

Сложимъ всѣ дифференціальныя уравненія, заключающія проекціи ускореній на одну и ту же ось координатъ и получимъ слѣдующія 3 уравненія:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{X}_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots\ldots + \lambda_p \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \\
\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Y}_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots\ldots + \lambda_p \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \\
\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots\ldots + \lambda_p \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_p}{\partial z_i}
\end{aligned}
$$

или

$$
(5)\ldots\left\{\begin{aligned}
M x_e'' &= \mathfrak{B}_x + V_x \\
M y_e'' &= \mathfrak{B}_y + V_y \\
M z_e'' &= \mathfrak{B}_z + V_z
\end{aligned}\right.
$$

гдѣ B_x, B_y, B_z суть проекціи главнаго вектора задаваемыхъ (активныхъ) силъ, V_x, V_y, V_z суть проекціи главнаго вектора реакцій всѣхъ связей Mx''_c, My''_c, Mz''_c суть проекціи количествъ ускореній центра инерціи, и ур.-нія (5) показываютъ, что центръ инерціи несвободной системы мат. точекъ движется такимъ образомъ, какъ будто бы это была своб. мат. точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и къ которой приложены всѣ задаваемыя силы и всѣ реакціи связей.

Въ частномъ случаѣ, если главный векторъ силъ и главный векторъ реакцій связей равны нулю, то $Mx''_c=0$, $My''_c=0$, $Mz''_c=0$, т.е. центръ инерціи движется равномѣрно и прямолинейно, т.е. по инерціи.

Если только главный векторъ реакцій связей равенъ нулю, то центръ инерціи движется подъ вліяніемъ силъ задаваемыхъ, какъ напр. въ вышеприведенной задачѣ, гдѣ мы имѣли:

$$m_1 x''_1 + m_2 x''_2 = Mx''_c = 0$$

$$m_1 y''_1 + m_2 y''_2 = My''_c = Mg,$$

откуда

$$x_c = \alpha t + \frac{m_1}{M} l$$

$$y_c = \frac{gt^2}{2} + \frac{m_1}{M} \beta t,$$

т.е. центръ инерціи движется, какъ брошенная тяжелая мат. точка, по параболѣ (см. стр. 54).

§4. Дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ движеній и законъ сохраненія площадей несв. системы мат. точекъ.

Написавъ дифференціальныя уравненія движенія одной изъ точекъ (i-ой) несвободной системы

$$(4)\dots\begin{cases} m_i x_i'' = X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \\ m_i y_i'' = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \\ m_i z_i'' = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \end{cases}$$

помножимъ второе изъ нихъ на $-z_i$, третье на y_i, сложимъ ихъ и получимъ:

$$m_i(y_i z_i'' - z_i y_i'') = (y_i Z_i - z_i Y_i) + \Big[\lambda_1\Big(y_i \frac{\partial f_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\Big) + \lambda_2\Big(y_i \frac{\partial f_2}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f_2}{\partial y_i}\Big) + \dots + \lambda_p\Big(y_i \frac{\partial f_p}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f_p}{\partial y_i}\Big)\Big]$$

Продѣлавъ то же съ уравненіями каждой точки системы, и такъ полученныя ур-нія сложимъ, принявъ во вниманіе, что

$$m_i(y_i z_i'' - z_i y_i'') = \frac{d}{dt} m_i(y_i z_i' - z_i y_i'),$$

получимъ

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = \sum_{i=1}^{i=n}(y_i Z_i - z_i Y_i) + \Big[\lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n}\Big(y_i \frac{\partial f_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\Big) + \dots + \lambda_p \sum_{i=1}^{i=n}\Big(y_i \frac{\partial f_p}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial f_p}{\partial y_i}\Big)\Big] \dots\dots (6').$$

Обозначимъ $\sum_{i=1}^{i=n} m_i(y_i z_i' - z_i y_i')$ черезъ k_{ox} — это есть сумма моментовъ количествъ движенія точекъ системы относительно оси OX и называется главнымъ моментомъ количествъ движенія точекъ системы относительно оси OX.

Обозначимъ $\sum_{i=1}^{i=n}(y_i Z_i - z_i Y_i)$ черезъ L_{ox} — это есть сумма моментовъ силъ, задаваемыхъ относительно оси OX и называется главнымъ моментомъ задаваемыхъ силъ относит. оси OX.

Сумму членовъ, стоящихъ въ скобкахъ, обозначимъ черезъ

Λ_{ox} — это есть главный моментъ всѣхъ реакцій связей вокругъ оси OX

Уравненіе (6') можетъ быть написано въ видѣ:

подобнымъ образомъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_{ox}}{dt} &= L_{ox} + \Lambda_{ox} \\ \frac{dK_{oy}}{dt} &= L_{oy} + \Lambda_{oy} \\ \frac{dK_{oz}}{dt} &= L_{oz} + \Lambda_{oz} \end{aligned}\right\} \dots (6.)$$

Эти уравненія выражаютъ, что производная отъ главнаго момента количествъ движеній точекъ системы относительно одной изъ осей координатъ = суммѣ главнаго момента задаваемыхъ силъ и главнаго момента всѣхъ реакцій связей вокругъ той же оси.

Съ другой стороны мы знаемъ (см. стр. 191.), что

$$\left\{\begin{aligned} k_{ox} &= 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i S'_{ix} \\ k_{oy} &= 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i S'_{iy} \\ k_{oz} &= 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i S'_{iz} \end{aligned}\right.$$

Если правыя части уравненій (6) равны нулю, т. е. главный моментъ задаваемыхъ силъ и реакцій связи равны нулю, то получаемъ законъ сохраненія площадей въ плоскостяхъ YZ, ZX, XY:

$$\left\{\begin{aligned} k_{ox} &= 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i S'_{ix} = Const. \\ k_{oy} &= 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i S'_{iy} = Const. \\ k_{oz} &= 2\sum_{i=1}^{i=n} m_i S'_{iz} = Const. \end{aligned}\right.$$

т. е. главный моментъ количествъ движеній точекъ системы относительно начала координатъ сохраняетъ постоянную величину и направленіе и законъ сохраненія

площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости Q, проходящей черезъ начало координатъ, т. е.

$$k_0 \operatorname{Cos}(k_0, P) = k_{0p} = 2\Sigma m_i S'_{ip} = Const,$$

гдѣ $P \perp Q$.

Maximum $\Sigma m_i S'_{ip} = k_0 = \sqrt{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2}$ будетъ въ плоскости, перпендикулярной къ направленію k_0 $(\operatorname{Cos}(k_0, P) = 1)$; эта плоскость названа Лапласомъ неизмѣняемою.

Вообразимъ себѣ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи C системы (напр. координатныя оси CX, CY, CZ, проходящія черезъ C и остающіяся параллельными осямъ OX, OY, OZ), тогда, обозначая черезъ ξ_i, η_i, ζ_i относительныя координаты точки m_i, имѣемъ:

$$x_i = x_c + \xi_i$$

$$y_i = y_c + \eta_i$$

$$z_i = z_c + \zeta_i$$

и уравненія (4) могутъ быть такъ написаны:

$$m_i x_i'' = m_i x_c'' + m_i \xi_i'' = X_i + R_{ix}$$

(понимая подъ R_{ix} сумму проекцій на ось OX реакцій связей въ точкѣ m_i) откуда:

$$m_i \xi_i'' = X_i + R_{ix} - m_i x_c''$$

$$m_i \eta_i'' = Y_i + R_{iy} - m_i y_c''$$

$$m_i \zeta_i'' = Z_i + R_{iz} - m_i z_c''$$

Умножая второе уравненіе на $-\zeta_i$, третье η_i, складывая и суммируя, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i \zeta_i'' - \zeta_i \eta_i'') = \sum_{i=1}^{i=n}(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) + \sum_{i=1}^{i=n}(\eta_i R_{iz} - \zeta_i R_{iy}) -$$

$$- z_c'' \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i + y_c'' \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i ,$$

но $\sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i = 0$, $\sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i = 0$, значитъ получаемъ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta_i \zeta_i' - \zeta_i \eta_i')\right) = \Sigma(\eta_i Z_i - \zeta_i Y_i) + \Sigma(\eta_i R_{iz} - \zeta_i R_{iy})$$

или

$$\frac{d k_{c\xi}}{dt} = L_{c\xi} + \lambda_{c\xi}$$

а также:

$$\frac{d k_{cy}}{dt} = L_{cy} + \lambda_{cy}$$

$$\frac{d k_{cz}}{dt} = L_{cz} + \lambda_{cz}$$

т. е. все сказанное въ этомъ §-ѣ примѣняется и къ относительному движенію точекъ системы относительно неизмѣняемой среды, движущейся поступательно съ центромъ инерціи.

§5. Законъ измѣненія живой силы точекъ несвободной системы. Законъ сохраненія энергіи и интегралъ живой силы.

Написавъ уравненія (4) движенія точекъ несвободной системы (ср. §3) и помноживъ каждое изъ нихъ соотвѣтственно на $x_1'dt$, $y_1'dt$, $z_1'dt$, ... $x_i'dt$, $y_i'dt$, $z_i'dt$, ... $x_n'dt$, $y_n'dt$, $z_n'dt$ и сложивъ всѣ уравненія, получимъ:

$$(\tau) \ldots \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i'' x_i' + y_i'' y_i' + z_i'' z_i')\, dt = \sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) +$$

$$+ \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i} dz_i\right) + \cdots + \lambda_p \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_p}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_p}{\partial z_i} dz_i\right)$$

лѣвую часть этого равенства можно представить въ видѣ:

$$d \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

т.е. какъ дифференціалъ живой силы: $d\,\Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$ нашей системы.

Правая сторона равенства есть сумма элементарных работ сил задаваемых и сил реакций связей.

А значит, получаем, что бесконечно малое приращение живой силы, получаемое системою за бесконечно малый промежуток времени dt, равняется сумме элементарных работ, совершаемых всеми задаваемыми силами и реакциями всех связей в течение этого промежутка времени.

При переходе системы из одного положения (1) во второе (2) изменение живой силы

$$\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} \left(\mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i} dz_i\right) + \cdots\cdots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} \lambda_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_p}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_p}{\partial z_i} dz_i\right),$$

т. е. изменение живой силы системы при переходе системы из одного положения в другое равняется сумме работ, совершаемых всеми задаваемыми силами (как внешними, так и внутренними) и реакциями связей на протяжении путей, пробегаемых точками системы при этом переходе.

Если уравнения связей не заключают времени явно, то суммы вида

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i\right) = 0$$

и сумма элементарных работ реакций связей равна нулю; и получаем

$$d \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i\right);$$

если притом задаваемые силы консервативны, имеют потенциал, и потенциальную ф-ию обозначим через

$U(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n)$, то

$$d\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = dU$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = U + h \ldots$$ интегралъ живой силы.

или $$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 + (-U) = h$$ – аналитическое выраженіе закона сохраненія полной энергіи.

Воображая себѣ (такъ же, какъ и §4) неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи, можемъ получить слѣдующее выраженіе для живой силы (теорема Кенига):

$$K = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) =$$

$$= \sum\frac{1}{2}m_i[(x_c' + \xi_i')^2 + (y_c' + \eta_i')^2 + (z_c' + \zeta_i')^2] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i(x_c'^2 + y_c'^2 + z_c'^2) + \sum\frac{1}{2}m_i(\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2) +$$

$$+ x_c'\sum m_i\xi_i' + y_c'\sum m_i\eta_i' + z_c'\sum m_i\zeta_i' = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_{ir}^2,$$

т. е. живая сила системы равна живой силѣ движенія центра инерціи, сложенной съ суммою живыхъ силъ относительныхъ движеній точекъ системы по отношенію къ воображаемой средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы.

§6. Начало Даламбера, начало виртуальныхъ работъ и равенство Лагранжа для несв. системы м. т.

Дифференціальныя уравненія (4) движенія можемъ такъ написать:

$$(4)\ldots\ldots\begin{cases} 0 = X_i - m_i x_i'' + R_{ix} \\ 0 = Y_i - m_i y_i'' + R_{iy} \\ 0 = Z_i - m_i z_i'' + R_{iz} \end{cases}$$

Правая сторона равенства есть сумма элементарных работ силъ задаваемыхъ и силъ реакцій связей.

А значитъ, получаемъ, что безконечно малое приращеніе живой силы, получаемое системою за безконечно малый промежутокъ времени dt, равняется суммѣ элементарныхъ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами и реакціями всѣхъ связей въ теченіе этого промежутка времени.

При переходѣ системы изъ одного положенія (1) во второе (2) измѣненіе живой силы

$$\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} \left(\mathcal{X}_i dx_i + \mathcal{Y}_i dy_i + \mathcal{Z}_i dz_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i} dz_i\right) + \ldots\ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} \lambda_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_p}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_p}{\partial z_i} dz_i\right),$$

т. е. измѣненіе живой силы системы при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое равняется суммѣ работъ, совершаемыхъ всѣми задаваемыми силами (какъ внѣшними, такъ и внутренними) и реакціями связей на протяженіи путей, пробѣгаемыхъ точками системы при этомъ переходѣ.

Если уравненія связей не заключаютъ времени явно, то суммы вида

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i\right) = 0$$

и сумма элементарныхъ работъ реакцій связей равна нулю; и получаемъ

$$d \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\mathcal{X}_i dx_i + \mathcal{Y}_i dy_i + \mathcal{Z}_i dz_i\right);$$

если притомъ задаваемыя силы консервативны, имѣютъ потенціалъ, и потенціальную ф-ю обозначимъ черезъ

$U(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n)$, то

$$d\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = dU$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = U + h \ldots$$ интеграл живой силы.

или $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + (-U) = h$$ – аналитическое выражение закона сохранения полной энергии.

Воображая себе (так же, как и § 4) неизменяемую среду, движущуюся поступательно вместе с центром инерции, можем получить следующее выражение для живой силы (теорема Кенига):

$$K = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) =$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i [(x_c' + \xi_i')^2 + (y_c' + \eta_i')^2 + (z_c' + \zeta_i')^2] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i (x_c'^2 + y_c'^2 + z_c'^2) + \sum \frac{1}{2} m_i (\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2) +$$

$$+ x_c' \sum m_i \xi_i' + y_c' \sum m_i \eta_i' + z_c' \sum m_i \zeta_i' = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_{ir}^2,$$

т. е. живая сила системы равна живой силе движения центра инерции, сложенной с суммою живых сил относительных движений точек системы по отношению к воображаемой среде, движущейся поступательно вместе с центром инерции системы.

§ 6. Начало Даламбера, начало виртуальных работ и равенство Лагранжа для несв. системы м. т.

Дифференциальные уравнения (4) движения можем так написать:

$$(4) \ldots \begin{cases} 0 = X_i - m_i x_i'' + R_{ix} \\ 0 = Y_i - m_i y_i'' + R_{iy} \\ 0 = Z_i - m_i z_i'' + R_{iz} \end{cases}$$

или

$$0 = \overline{F}_i + \overline{I}_i + \overline{R}_i \text{ (ср. стр. 161.)}$$

Эти уравненія выражаютъ начало Даламбера, что во всякій моментъ движенія системы несв. мат. точекъ потерянныя силы уравновѣшиваются черезъ посредство реакцій связей.

Умножая уравненія (4) соотвѣтственно на $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, складывая и суммируя получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[(X_i - m_i x_i'')\delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\delta y_i + (Z_i - m_i z_i'')\delta z_i\right] = 0$$

равенство Лагранжа, выражающее начало виртуальныхъ работъ, что при всякомъ положеніи системы м. точекъ, связанныхъ какими-либо идеальными связями и движущихся подъ вліяніемъ какихъ-либо задаваемыхъ силъ, сумма виртуальныхъ работъ потерянныхъ силъ на всякомъ виртуальномъ отклоненіи системы отъ разсматриваемаго положенія равна нулю.

§7. Дифференціальныя уравненія движенія мат. точекъ несв. системы въ независимыхъ координатныхъ параметрахъ (Лагранжевы уравненія II рода).

Для системы n мат. точекъ, связанныхъ p связями, имѣемъ $3n$ диф. уравненій вида (4) и p уравненій (*) связей. Какъ уже сказано было p уравненій связей независимы другъ отъ друга и могутъ быть рѣшены относительно любыхъ p изъ координатъ, а тогда $(3n-p)$ координатъ, черезъ которыя выразятся эти p координатъ, носятъ названіе независимыхъ, а число ихъ $(3n-p)$ называется числомъ степеней свободы системы.

Иногда представляется удобнымъ вмѣсто прямоугольныхъ, прямолинейныхъ координатъ ввести иныя

(напр. сферическія) координаты или прямо ввести въ разсмотрѣніе новыя перемѣнныя, т.е. выразить наши координаты въ видѣ функцій отъ новыхъ перемѣнныхъ, которыя вполнѣ бы ихъ замѣнили, т.е. опредѣляли въ каждый моментъ положеніе нашей системы. Если примемъ эти новыя перемѣнныя взять въ числѣ $3n-p=k$, т.е. какъ разъ столько, сколько степеней свободы наша система имѣетъ, и всѣ координаты выразимъ въ новыхъ, принимая во вниманіе уравненія связей, то эти новыя координаты называютъ независимыми координатными параметрами и обозначаютъ ихъ буквами $q_1, q_2, \ldots q_k$ и тогда значитъ будемъ имѣть:

$$x_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$$

$$y_1 = \varphi_2(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$$

$$z_1 = \varphi_3(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \varphi_{3n-2}(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$$

$$y_n = \varphi_{3n-1}(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$$

$$z_n = \varphi_{3n}(q_1, q_2, \ldots q_k, t)$$

Если функціи $f_1, f_2, \ldots f_p$ не заключаютъ явно времени t, то и ф-іи φ могутъ его не заключать.

Чтобы вывести дифференціальныя уравненія движенія мат. точекъ системы въ координатныхъ параметрахъ, возьмемъ равенство Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] = 0 \ldots (8).$$

и преобразуемъ его такъ же, какъ и въ случаѣ одной мат. точки (ср. стр. 91-93):

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

Подставляя въ равенство (8), получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\left[(X_i - m_i x_i'')\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + (Y_i - m_i y_i'')\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + (Z_i - m_i z_i'')\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right]\delta q_1 + \ldots\ldots +$$

$$+\sum_{i=1}^{i=N}\left[(X_i - m_i x_i'')\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + (Y_i - m_i y_i'')\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + (Z_i - m_i z_i'')\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0$$

или

$$(Q_1 - K_1)\delta q_1 + (Q_2 - K_2)\delta q_2 + \ldots\ldots + (Q_k - K_k)\delta q_k = 0$$

гдѣ

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{i=N}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(x_i''\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + y_i''\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + z_i''\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)$$

Такъ какъ написанныя равенства должны оставаться справедливыми при всѣхъ значеніяхъ $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_k$, то необходимо, чтобы имѣли мѣсто равенства:

$$\begin{cases} K_1 = Q_1 \\ K_2 = Q_2 \\ \ldots\ldots \\ K_k = Q_k \end{cases}$$

Выраженія $K_1, K_2, \ldots K_k$ преобразуются слѣдующимъ образомъ (ср. стр. 70-72)

$$K_1 = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(x_i''\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + y_i''\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + z_i''\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + y_i'\frac{\partial y_i}{\partial q_1} +\right.$$

$$\left.+ z_i'\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right) - \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(x_i'\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right)' + y_i'\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\right)' + z_i'\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)'\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=N}\frac{m_i}{2}\frac{\partial}{\partial q_1'}\left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right) - \sum_{i=1}^{i=N}\frac{m_i}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial q'_1}\cdot\frac{m_i v_i^2}{2} - \Sigma \frac{\partial}{\partial q_1}\cdot\frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{d\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_1}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1},$$

гдѣ

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

есть живая сила точекъ системы.

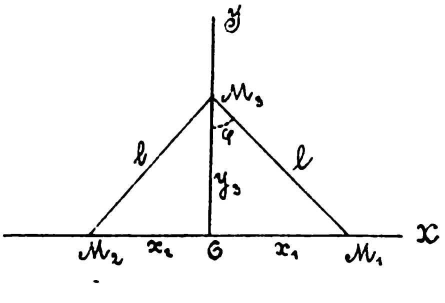
Итакъ, получаемъ слѣдующія k уравненій Лагранжа (II рода):

$$(9)\ldots\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_1}\right)' - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = Q_1 \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_2}\right)' - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_k}\right)' - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = Q_k \end{cases}$$

Если силы имѣютъ потенціалъ U, то

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots\ldots\ldots, Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Задача. Система состоитъ изъ трехъ мат. точекъ M_1 (массы m_1), M_2 (массы m_2) и M_3 (массы m_3), причемъ массы эти таковы, что $m_1 + m_2 = m_3$. Точка M_3 остается на оси Y, а точки M_1 и M_2 — на оси X, причемъ M_3 связана съ M_1 и M_2 твердыми стержнями одной и той же длины.



На точки дѣйствуютъ силы притяженія къ началу координатъ пропорціональныя разстояніямъ точекъ отъ него и массамъ ихъ. Коэффиціентъ пропорціональности есть μ^2.

Въ начальный моментъ $t_0 = 0$ дано, что $(y_3)_0 = 0$; а начальная скорость $(y'_3)_0 = \mu l$. Опредѣлить движеніе системы.

Система наша подчинена пяти связямъ:

$$f_1 = y_1 = 0$$
$$f_2 = y_2 = 0$$
$$f_3 = x_3 = 0$$
$$f_4 = x_1^2 + y_3^2 - l^2 = 0$$
$$f_5 = x_2^2 + y_3^2 - l^2 = 0,$$

а значитъ имѣетъ $2n - p = 6 - 5 = 1$ степень свободы.

Уравненія движенія суть:

$$m_1 x_1'' = - m_1 \mu^2 x_1^2 + \lambda_4 2x_1$$
$$m_2 x_2'' = - m_2 \mu^2 x_2^2 + \lambda_5 2x_2$$
$$m_3 y_3'' = - m_3 \mu^2 y_3^2 + \lambda_4 2y_3 + \lambda_5 2y_3$$

Не останавливаясь надъ непосредственнымъ интегрированіемъ этихъ уравненій, мы прямо воспользуемся знакомыми законами механики. Связи явно времени t не заключаютъ, а силы имѣютъ потенціалъ, значитъ можемъ написать интегралъ живой силы:

$$T = U + h$$

$$T = \frac{m_1}{2} x_1'^2 + \frac{m_2}{2} x_1'^2 + \frac{m_3}{2} y_3'^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} x_1'^2 + \frac{m_3}{2} y_3'^2 = \frac{m_3}{2}\left(y_3'^2 + x_1'^2\right);$$

изъ четвертаго уравненія связей имѣемъ:

$$x_1 = \sqrt{l^2 - y_3^2}$$
$$x_1' = \frac{-y_3 y_3'}{\sqrt{l^2 - y_3^2}},$$

значитъ

$$T = \frac{m_3}{2}\left(\frac{y_3^2}{l^2 - y_3^2} + 1\right) y_3'^2 = \frac{m_3 l^2 y_3'^2}{2\,(l^2 - y_3^2)}$$

$$U = -\frac{\mu^2}{2}\left(m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 y_3^2\right) = -\frac{\mu^2}{2} m_3 l^2$$

Итакъ:

$$\frac{m_3}{2}\frac{l^2 y_3'^2}{l^2-y_3^2} = -\frac{\mu^2}{2} m_3 l^2 + h,$$

$$h = \frac{m}{2}\cdot\frac{l^2\mu^2 l^2}{l^2-0} + \frac{\mu^2}{2} m_3 l^2 = \mu^2 m_3 l^2$$

$$\frac{y_3'^2}{l^2-y_3^2} = -\mu^2 + 2\mu^2 = \mu^2$$

$$\frac{dy}{\sqrt{l^2-y_3^2}} = \mu dt$$

$$\arcsin\frac{y_3}{l} = \mu t + c \quad , \quad c = 0$$

$$y_3 = l\sin \mu t$$

$$x_1 = x_2 = l\cos \mu t.$$

Применимъ уравненія Лагранжа II-го рода, взявъ за независимый координатный параметръ уголъ φ; тогда:

$y_3 = l\cos\varphi$	$\cos\varphi_0 = \frac{(y_3)_0}{l} = 0,\ \varphi_0 = 90^\circ$
$y_3' = -l\sin\varphi\cdot\varphi'$	$(y_3')_0 = \mu l = -l\sin\varphi_0\,\varphi_0',\ \varphi_0' = -\mu$

$$T = \frac{m_3}{2} l^2 \varphi'^2$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right)' = m_3 l^2 \varphi''$	$m_3 l^2 \varphi'' = 0$
$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$	$\varphi' = \varphi_0' = -\mu$
$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$	$\varphi = -\mu t + \varphi_0 = 90 - \mu t$
	$y_3 = l\sin\mu t.$

Конецъ.

Динамика. Листъ 16.
Лит. И. Трофимова Можайск., 3.
Преподаватель. [illegible]

From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

90 23447
Osnovy mekhaniki /
Stanford University Libraries
3 6105 043 178 339

DATE DUE

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004